Здесь μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\}$ — евклидов шар с центром в точке x радиуса $r > 0$.

Согласно классической теореме Лебега $\mu(\Lambda(f)) = 0$ для любой функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Для более регулярных функций можно утверждать большее. Именно, *если* $p > 1$, $l \in \mathbb{N}$, $lp < N$ *и* $f \in W^p_l(\mathbb{R}^N)$ *(обычные классы Соболева), то*

$$\mathrm{Cap}_{l,p}(\Lambda(f)) = 0, \quad \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f)) \leq N - lp.$$

([1] при $l = 1$ и [2–4] в общем случае). Здесь $\mathrm{Cap}_{l,p}$ — емкость, порождаемая классом Соболева $W^p_l(\mathbb{R}^N)$, $\dim_{\mathbb{H}}$ — размерность Хаусдорфа. Наш основной результат показывает точность этого утверждения.

Теорема. *Пусть* $1 < p < N/l$. *Тогда существуют такая функция* $f_0 \in W^p_l\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что* $\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda(f_0)) = N - lp$ *и* $\mathrm{Cap}_{l,q}(\Lambda(f_0)) > 0$ *для любого* $q > p$.

Подобные результаты получены также для некоторой непрерывной шкалы соболевских пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Federer H., Ziemer C.* The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are p-th power summable // Indiana Univ. Math. J. 1972. Vol. 22, № 2. P. 139–158.

2. *Calderon C. P., Fabes E. B., Riviere N. M.* Maximal smoothing operators // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 232, № 10. P. 889–898.

3. *Meyers N. G.* Taylor expansion of Bessel potentials // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23, № 11. P. 1043–1049.

4. *Bagby T., Ziemer C.* Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 191. P. 129–148.

Ю. С. Крусс (Саратов)
KrussUS@gmail.com

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КОМПАКТНОЙ НУЛЬМЕРНОЙ ГРУППЕ

Пусть $(G, \dot{+})$ — компактная нульмерная аддитивная топологическая группа, топология в которой задана счетной системой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ таких, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 — нулевой элемент группы G). $g_n \in G_n \backslash G_{n+1}$ — базисная последовательность, $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ — функции Радемахера на группе G, $H_{jm_n+k}(x) = \sqrt{m_n} * r_n^j(x \dot{-} q) * 1_{G_n}(x \dot{-} q)$ — функции Хаара, где $j = \overline{1, p_n - 1}$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = \overline{0, m_n - 1}$, а k и q связаны следующим образом $k = a_0m_0 + a_1m_1 + \ldots + a_{n-1}m_{n-1}$, $q = a_0g_0 \dot{+} a_1g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1}g_{n-1}$, $(a_j = \overline{0, p_j - 1})$. О функциях Хаара см. [1, 2].

Определение 1. Пусть $f : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$,

$$K_n(\gamma, x, t) = \sum_{s=0}^{n} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} H_{jm_s+k}(x) \overline{H_{jm_s+k}(t)}.$$

Определим оператор $\mathcal{K}_n(f)$ равенством: $\mathcal{K}_n(f) = \int\limits_G f(t) K_n(\gamma, x, t) dt$. Если для функции $f \in L_1(G)$ существует функция $g : G \to \mathbb{C}$ из $L_1(G)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{K}_n(f) - g\|_{L_1} = 0$, то g называется *производной* функции f и обозначается $D^{\gamma}(f)$.

Теорема 1. *Если $f \in L_1(G)$ дифференцируема, $D^{\gamma}(f) \in L_1(G)$ и $f(x) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{p_s-1} \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \hat{f}(jm_s + k) H_{jm_s+k}(x)$, то справедливо равенство:*

$$D^{\gamma} f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p_s-1} \sum_{k=0}^{m_s-1} \gamma_{jm_s+k} \hat{f}(jm_s + k) H_{jm_s+k}(x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нульмерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2009. Т. 9. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 14–19.

2. *Sergei F. Lukomskii.* Haar system on a product of zero-dimensional compact group. // Centr. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. C. 627–639.

Л. С. Крыжевич (Курск)
Leonid@programist.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ УРОВНЯ ПОТЕРЬ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВ

При преобразованиях одного вида информации в другой мы вносим некоторые искажения, и данные неизбежно отличаются от исходных. В общем виде этот процесс представим так:

$$Y = \lfloor f(X) \rfloor, \quad \widetilde{X} = \lfloor f^{-1}(Y) \rfloor,$$

тогда $|X - \widetilde{X}|$ — абсолютная величина отличий между исходной и восстановленной информацией. В данном случае X может представлять собой вектор в n-мерном пространстве.