УДК 517.9

Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным элементам одного дифференциального пучка с граничными условиями Неймана[1]

В. С. Гуреев (Саратов, Россия)
gureev.vladislaw@yandex.ru

В статье рассматривается обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка с постоянными коэффициентами и граничными условиями Неймана. Находятся собственные значения и собственные элементы этого пучка. Проводится его линеаризация и находится его резольвента, а именно находится функция Грина. В заключении формулируется теорема о разложении первой компоненты и поясняется где она используется.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго пордяка, функция Грина, теорема о разложении.

Decomposition of the first component of a vector function by eigenfunctions of a differential beam with Neumann boundary conditions[1]

V. S. Gureev (Saratov, Russian)
gureev.vladislaw@yandex.ru

The article considers an ordinary second-order differential quadratic beam with constant coefficients and Neumann boundary conditions. The eigenvalues and eigenvalues of this bundle are found. Its linearization is carried out and its resolvent is found, namely, the Green function is found. In conclusion, the theorem on the decomposition of the first component is formulated and it is explained where it is used.

Keywords: an ordinary second-order differential quadratic beam, Green's function, decomposition theorem.

Введение

Рассмотрим обыкновенный дифференциальный квадратичный пучок второго порядка $L(\lambda)$ с постоянными коэффициентами, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и определяемый дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{1}$$

и краевыми условиями Неймана

$$y'(0) = y'(1) = 0. \tag{2}$$

Далее используем определения и факты из [1], не оговаривая этого особо. Предполагается, что выполняется условие $p_1^2 - 4p_2 > 0$, то есть корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

являются вещественными и различными. Пусть корни этого уравнения удовлетворяют условию регулярности

$$\omega_1 < 0 < \omega_2. \tag{3}$$

Теорема о разложении

Для оператор-функции $L(\lambda)$, определяемой (1)–(2) найдем собственные элементы и собственные значения. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу

$$L(\lambda)y = 0 \tag{4}$$

или, подробнее,

$$l(y,\lambda) = 0, \qquad y'(0) = y'(1) = 0.$$

Общее решение уравнения $l(y,\lambda) = 0$ задачи (4) имеет вид

$$y(x,\lambda) = C_1 e^{\lambda\omega_1 x} + C_2 e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Учитывая краевые условия (2), находим собственные значения и собственные элементы для оператор-функции $L(\lambda)$

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

$$y_0(x) = 1, \quad y_k(x) = e^{\frac{2k\pi i\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} - e^{\frac{2k\pi i\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}}, \quad k \in \mathbb{Z}/\{0\}.$$

Линеаризуем задачу (4), как это сделано в [2]. Пусть $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, тогда краевая задача (4) перейдет в задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = 0$, где $\mathcal{L}$ – линейный оператор в пространстве вектор-функций $Z = (z_1, z_2)^T$, определяемый выражением

$$AZ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{p_2}\frac{d^2}{dx^2} & -\frac{p_1}{p_2}\frac{d}{dx} \end{pmatrix} Z,$$

и следующими краевыми условиями

$$z_1'(0) = z_1'(1) = 0.$$

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = F$, где $F = (f_1, f_2)^T$, где $f_1, f_2 \in L_2[0,1]$. Первая компонента $Z = \mathcal{R}_\lambda F$ является решением следующей краевой задачи:

$$z_1'' + \lambda p_1 z_1' + \lambda^2 p_2 z_1 = f_\lambda, \qquad z'(0) = z'(1) = 0, \tag{6}$$

где $f_\lambda := -p_2 f_2 - p_1 f_1' - \lambda p_2 f_1$.

Для функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (6) справедлива формула

$$G(x,\xi,\lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)\delta(\lambda)}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}e^{\lambda(\omega_1 x+\omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_1}{\omega_2}e^{\lambda(\omega_2 x+\omega_1(1-\xi))} - e^{\lambda(\omega_1+\omega_2(x-\xi))}\right) -$$
$$-\frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}e^{\lambda\omega_1(x-\xi)}\chi(x-\xi) - \frac{1}{\lambda(\omega_2-\omega_1)}e^{\lambda\omega_2(x-\xi)}\chi(\xi-x),$$

где $\delta(\lambda) = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1}$, а $\chi(x)$ есть функция Хевисайда.

Если обозначить через R_λ резольвенту пучка $L(\lambda)$, то получим

$$z_1(x,\lambda) = (R_\lambda f_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) f_\lambda(\xi)d\xi =$$
$$= \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)(-p_2 f_2(\xi) - p_1 f_1'(\xi) - \lambda p_2 f_1(\xi))d\xi.$$

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Обозначим

$$I_n = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\gamma_k}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)d\xi d\lambda =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f_\lambda(\xi)d\xi d\lambda,$$

где Γ_n, $n \in \mathbb{N}$, есть круговые контуры, отстоящие от чисел λ_k на расстоянии не меньше некоторого достаточно малого фиксированного числа $\delta > 0$, между соседними контурами лежит ровно одно число λ_k и имеют место оценки:

$$C_1 n < \text{длина } \Gamma_n < C_2 n \quad (0 < C_1 < C_2 < +\infty).$$

Такие контуры существуют на основании формул (5).

Основным результатом статьи является следующая теорема, которая доказывается методом, аналогичным методу в [2].

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (3). *Если* $f_1(x) \in W_p^1[0,1]$, $f_2(x) \in L_p[0,1]$, *где* $p > 1$, *то*

$$I_n(x) = f_1(x) + o_n(1),$$

где $o_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *равномерно по* $x \in [0,1]$.

Теорема 1 используется для доказательства теоремы единственности классического решения и получения формулы для него в виде контурного интеграла для гиперболической начально-граничной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t),$$
$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x),$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции φ, ψ, f комплекснозначные при соответствующих условиях гладкости на эти функции.

Подробности можно найти в статьях [3–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М : Наука, 1969. 528 с.

[2] *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильнонерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. 2013. Т. 13, № 1. С. 21–26.

[3] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения сл смешанной производной и формула для решения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф.. 2023. Т. 23, № 2. С. 183–194.

[4] *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 24. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2022. С. 53–58.

[5] *Рыхлов В. С.* Обобщенная начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл.. 2023. Т. 69, № 2. С. 342–363.

[6] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.. 2023. Т. 226. С. 89–107.