УДК 517.51

Разложение элементов пространств $L_p\{(0,1]^m\}$, $p \geq 1$, по системам из сжатий и сдвигов одной функции с коэффициентами в виде простых чисел[1]

В.И. Филиппов (г. Саратов, Россия)
888vadim@mail.ru

Получено, что можно получать не только целочисленное разложение функций из пространств L_p по системам состоящих из разных сжатий и сдвигов одной функции, но и разложения с коэффициентами в виде простых чисел. Эти исследования интересны также и специалистам по кодированию и шифровке сигналов.

Ключевые слова: целочисленное разложение функций, системы из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах $L_p\{(0,1]^m\}$, цифровая обработка информации, цифровая передача информации..

Decomposition of elements of spaces $L_p\{(0,1]^m\}$, $p \geq 1$, in systems of contractions and shifts of one function with coefficients in the form of prime numbers [1]

V.I. Filippov (Saratov, Russia)
888vadim@mail.ru

It was found that it is possible to obtain not only an integer decomposition of functions from L_p spaces into systems consisting of different contractions and shifts of one function, but also decompositions with coefficients in the form of prime numbers. These studies are also of interest to specialists in signal coding and encryption.

Keywords: Integer decomposition of functions, systems from contractions and shifts of one function in multidimensional spaces $L_p\{(0,1]^m\}$, digital information processing, digital information transmission..

Для получения результатов использованы методы, полученные автором в работах [1, 2]. Интерес к системам из сжатий и сдвигов одной функции усилился в связи с исследованиями по всплескам и фреймам. В предложенных нами исследованиях не строятся ортонормированные системы из систем сжатий и сдвигов одной функции. Мы получаем разложение элементов пространств L_p непосредственно по данной системе, состоящей из сжатий и сдвигов одной функции. Рассмотренные системы переполнены [1, 2], но предложенный в данной работе алгоритм позволяет получить разложения с большим числом нулевых коэффициентов, при этом коэффициенты являются простыми числами. Ранее подобных исследований, с приближением или разложением функций с коэффициентами в виде простых чисел, в функциональных пространствах не проводилось. Но интерес к равномерному приближению непрерывных функций с любой точностью многочленами с целыми коэффициентами на сегменте вещественной оси возник, начиная с 1914 г., в работах I. Pal, C. Какейя, M. Fekete, И. Н. Хлодовского, С. Н. Бернштейна, Л. В. Канторовича, Р. М.Тригуба [3] и других авторов. В статье [4] получены результаты об алгебраических многочленах с целыми коэффициентами, мало уклоняющихся от нуля на отрезке. А в работе [5] приводится результат о существовании последовательности тригонометрических многочленов с целыми положительными коэффициентами, которая сходится к нулю почти всюду.

В статьях [6, 7] рассмотрены, также, системы из сжатий и сдвигов одной функции, но коэффициенты разложения находятся почти как коэффициенты Фурье и несколько по другому, чем в предложенной работе.

Предположим, что

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in (0,1]; \\ 0, \text{ if } x \notin (0,1], \end{cases} \tag{1}$$

$\Psi(t) = \Psi(t_1, t_2, ..., t_m) = \psi(t_1) \cdot \psi(t_2) \cdots \psi(t_m)$, $t_i \in (0,1]$, $i = \overline{1,m}$.

Разложение элементов из пространств L_p будем производить по системам функций

$$\begin{gathered} \{\Psi_{n,\mathbf{j}}\} = \{\Psi_{n,j_1,j_2,...,j_m}\} = \{\alpha_{n-1}\psi({b_1}^{n-1}t_1 - j_1 + 1)\cdot \\ \psi({b_2}^{n-1}t_2 - j_2 + 1) \cdots \psi({b_m}^{n-1}t_m - j_m + 1)\} = \{\Psi_l\}, \\ \alpha_{n-1} \to 0,\, \alpha_{n-1} > 0,\, n = 1,2,...,\, b_i \in N,\, b_i > 1,\, j_i = \overline{1, {b_i}^{n-1}}, \\ t_i \in (0,1],\, i = \overline{1,m},\, l = 1,2,.... \end{gathered} \tag{2}$$

Покажем как l согласуется с номерами n и $j_i = \overline{1, {b_i}^{n-1}}$, $i = \overline{1,m}$. Предлагаем следующую нумерацию. Пусть $n = 1, 2, ...$ Далее для каждого фиксированного n номер j_i изменяется от 1 до ${b_i}^{n-1}$. Совокупность этих элементов (при фиксированном n) назовем пачкой. Легко видеть, что элементов системы (2) в n-ой пачке $r_n = \prod_{i=1}^m {b_i}^{n-1}$. Очевидно, что при $n = 1$ элементов в пачке 1. Поэтому $l = 1 = r_1$, $\Psi_{1,1,...,1} = \Psi_1$. Далее переходим ко второй пачке и так далее. Порядок нумерации элементов системы в пачке не влияет на сходимость ряда.

Пусть произвольная функция $f \in L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$. Рассмотрим разложение в ряд функции f

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l^* \Psi_l = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{{b_1}^{i-1}} \sum_{j_2=1}^{{b_2}^{i-1}} \cdots \sum_{j_m=1}^{{b_m}^{i-1}} d^*_{i,j_1,j_2,...,j_m} \Psi_{i,j_1,j_2,...,j_m} \right), \tag{3}$$

где коэффициенты $d^*_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}$ находятся специальным образом по рекурентным формулам и являются простыми числами.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \leq p < \infty$. *Тогда ряд (3) по системе (2) с образующей функцией* ψ *как в (1), а коэффициенты* $d^*_{i,j_1,j_2,\ldots,j_m}$ *находятся специальным образом и являются простыми числами, сходится по норме пространства* $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \leq p < \infty$ *к* $f(t)$, *т.е.* $\|f - \sum_{l=0}^{n} d^*_l \Psi_l\|_p \to 0, \quad n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Filippov V., Oswald P.* Representation in L^p by series of translates and dilates of one function // Journal of Approximation Theory, 1995, 82:1, P. 15-29.

[2] *Филиппов В. И.* Ряды типа Фурье с целыми коэффициентами по системам из сжатий и сдвигов одной функции в пространствах $L_p, p \geq 1$ // Изв. вузов. Матем., 2019, №6, С.58–64.

[3] *Тригуб Р. М.* Приближение функций многочленами с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1962, 26:2, С. 261–280.

[4] *Кашин Б. С.* Об алгебраических многочленах с целыми коэффициентами, мало уклоняющихся от нуля на отрезке // Матем. заметки, 1991, 50:3, С. 58–67.

[5] *Borodin P. A., Konyagin S. V.* Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of single function on the line // Analysis Math., 2018, 44 (2), P. 163-183.

[6] *Лукашенко Т. П., Садовничий В. А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Доклады Академии наук, 2012, 445:2, С. 135-138.

[7] *Кудрявцев А. Ю.* О сходимомсти орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам // Матем. заметки, 2012, 92:5, С. 707-720.