517.982.256

Равномерно выпуклые несимметричные конус-пространства[1]

И. Г. Царьков (Москва, Россия)
tsar@mech.math.msu.su

Для равномерно выпуклых несимметричных конус-пространств рассматриваются вопросы выпуклости чебышевских множеств. Общая теорема иллюстрируется примером.

Ключевые слова: Несимметричные пространства, равномерно выпуклые пространства, чебышевские множества.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00204).

Uniformly rotund asymmetrical cone-spaces[1]

I. G. Tsarkov (Moscow, Russia)
tsar@mech.math.msu.su

For uniformly convex asymmetric cone-spaces, the issues of convexity of Chebyshev sets are considered. The general theorem is illustrated by an example.

Keywords: Asymmetric spaces, uniformly rotund spaces, Chebyshev sets.

Acknowledgements: This research was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant no. 22-21-00204).

Введение

Пусть в линейном пространстве X над полем $\mathbb{R}$ есть выпуклое множество B со следующими свойствами:

1. $0 \in B$;

2. любая прямая $\ell = \{te \mid t \in \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]\}$ $(e \neq 0)$, проходящая через ноль, пересекает множество B по отрезку в расширенном смысле, т.е. $B \cap \ell = \{te \mid t \in [\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{R}}\}$. При этом мы считаем, что расширенный конец $\alpha = -\infty$ $(\beta = +\infty)$, если промежуток пересечения прямой-оси ℓ с множеством B неограничен снизу (сверху).

С множеством B свяжем расширенный функционал Минковского $p_B : X \to [0, +\infty]$, положив для всех $e \in X \setminus \{0\}$ его значение равным

$$\inf\{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, +\infty] \mid tB \ni x\}.$$

Если ни при каком конечном $t \geqslant 0$ точка x не принадлежит множеству tB, то мы по определению считаем, что $p_B(x) = +\infty$. И, конечно, полагаем, что $p_B(0) = 0$.

Тем самым, формула
$$\| \cdot | := p_B(\cdot)$$
задает на X расширенную несимметричную полунорму. Множество ненулевых векторов $e \in X$, для которых $\|e| < +\infty$ будем называть значимыми и через $\mathbf{Z}$ будем обозначать множество всех таких векторов, а множество $\mathbf{K} = \mathbf{K}(X)$, состоящее из векторов te ($t \geqslant 0$, $e \in \mathbf{Z}$), будем называть конус-пространством для полунормы $\| \cdot |$. Таким образом, $\mathbf{K} = \mathbf{Z} \cup \{0\}$. Если $\|e| > 0$ для всех ненулевых векторов $e \in \mathbf{Z}$, то расширенную полунорму $\| \cdot |$ будем называть расширенной нормой. Вместе с несимметричной нормой часто рассматривается норма симметризации $\| \cdot \|_{sym} := \max\{\| \cdot |, \| - \cdot|\}$. Топология, порожденная нормой симметризации, называется симметризованной.

Для $x_0 \in X$, $r > 0$ определению положим
$$\mathring{B} := \{x \in X \mid \|x| < 1\}, \quad \mathring{B}(x_0, r) = x_0 + r\mathring{B} = \{x \in X \mid \|x - x_0| < r\}.$$
$$B(x_0, r) = x_0 + rB = \{x \in X \mid \|x - x_0| \leqslant r\}, S(x, r) := B(x_0, r) \setminus \mathring{B}(x_0, r).$$
Через S будем обозначать множество $S(0, 1)$. Отметим, что в случае, когда $\| \cdot |$ – норма, шар $B(0, 1)$ состоит из отрезков вида $[0, x]$, где $x \in S$. Если же $\| \cdot |$ – полунорма, то надо добавить все лучи $\{te \mid t \geqslant 0\}$, где $e \in \mathbf{K}$ – произвольный ненулевой вектор, для которого $\|e| = 0$.

На X вводится топология, порожденную шарами $\{\mathring{B}(x_0, r)\}_{x,r}$, как предбазой.

Так же, как и ранее для непустого множества $A \subset X$: $A \cap \mathbf{K}_x \neq \emptyset$, где $\mathbf{K}_x = (\mathbf{K} + x)$, будем через $\varrho(x, A)$ будем обозначать величину
$$\inf\{\|y - x| \mid y \in A\}.$$

В случае, когда $A \cap \mathbf{K}_x = \emptyset$, будем полагать, что $\varrho(x, A) = +\infty$.

В несимметричных пространствах мы выделим подкласс пространств, которые будем называть равномерно выпуклыми (см. [1]). Отметим, что главной целью здесь является нахождение такого определения, при котором большинство свойств равномерно выпуклых пространств (в случае симметричной нормы) переносились бы на существенно несимметричные пространства (норма которых не эквивалентна норме симметризации).

Для произвольного множества M через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x| = \varrho(x, M)\}$.

Основные результаты

Перейдем к определению равномерно выпуклых несимметричных пространств (см. [1]).

Положим

$$\Delta(a) := \|f - ag| + a\|g| - \|f|, \quad a \in [0,1].$$

Определение 1. *Несимметричное пространство* $\mathbf{K}$ *называется равномерно выпуклым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $a \in (0,1]$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любых* $f, g \in X$*:* $\|f| = \|g| = 1$ *из условия* $\Delta(a) < \delta$ *вытекает, что* $f \in B(\mu g, \varepsilon)$ *для некоторого* $\mu \in [1-\varepsilon, 1]$.

Определение 2. *Последовательность* $\{x_n\} \subset \mathbf{K}$ *называется фундаментальной (обратно фундаментальной), если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\|x_m - x_n| < \varepsilon$ $(\|x_n - x_m| < \varepsilon)$ *для всех* $m \geqslant n \geqslant N$.

Несимметричное конус-пространство $\mathbf{K}$ *называется лево-полным (обратно лево-полным), если для любой фундаментальной (обратно фундаментальной) последовательности* $\{x_n\} \subset \mathbf{K}$ *существует точка* $x \in \mathbf{K}$ *такая, что* $\|x_n - x| \to 0$.

Теорема 1. *Пусть* M *– чебышёвское множество, ограниченно компактное относительно топологии симметризации, в равномерно выпуклом гладком обратно лево-полном конус-пространстве* $\mathbf{K}$. *Тогда множество* M *выпукло.*

Пример. Рассмотрим линейное множество всех μ-измеримых функций функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых конечна норма этой функции в $L_p(\Omega, \mu)$ и $L_p(\Omega, \mu)$ $(1 < p, q < +\infty)$. Профакторизуем это пространство по множеству функций равных нулю почти всюду относительно меры μ. Для классов эквивалентностей определим несимметричную норму положив для ее представителей $\|f|_{p,q} := \|f_+\|_{L_p(\Omega,\mu)} + \|f_-\|_{L_q(\Omega,\mu)}$, где $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \min\{f, 0\}$. Затем обратно лево пополним это пространство относительно этой несимметричной нормы. Это пространство будет обратно лево-полным. Обозначим это пространство как $L_{p,q}^{ReLe} = L_{p,q}^{ReLe}(\Omega, \mu)$ $(1 < p, q < +\infty)$ – несимметричное пространство, состоящее из классов эквивалентностей μ-измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Пространство $L_{p,q}^{ReLe}(\Omega, \mu)$ является гладким, т.е. для любой точки $f \in X = L_{p,q}^{ReLe}$: $\|f|_{p,q} = \varepsilon > 0$ найдется линейный ограниченный функционал $\varphi \in X^*$ единичной нормы, для которого $\varphi(f) = \varepsilon$ (см. теорему Хана-Банаха для несимметричных пространств [2]– [4]. Отметим, что сопряженное пространство к произвольному существенно несимметричному пространству Y не может быть линейным пространством даже в случае, когда Y линейно (см. [5]). Также пространство $L_{p,q}^{ReLe}$ является равномерно выпуклым и хаусдорфовым конус-пространством. В качестве примера приложения теоремы 1 рассмотрим конкретное множество M в пространстве $X := L_{p,q}^{ReLe}[a,b]$ $(a < b,\ 1 < p, q < +\infty)$:

$$M := \Big\{\frac{\lambda}{t - t_\alpha} \mid \lambda \in \mathbb{R}, t_\alpha \in K\Big\},$$

где K – замкнутое неодноточечное подмножество $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Множество M не является выпуклым, откуда в силу теоремы 1 вытекает, что множество M не является чебышевским в $L_{p,q}^{ReLe}[a,b]$. Понятно, что аналогичные рассуждения можно провести и для специального вида обобщенных дробей.

Для свойства Q через $\mathring{B}$-Q обозначим класс таких множеств, что пересечение их с любыми открытыми шарами обладает свойством Q.

В работе [6] в частности получено следующее утверждение.

Теорема A. *Пусть $(X, \|\cdot|)$ – несимметричное лево-полное линейное пространство, непустое множество $A \subset X$ является $\mathring{B}$-замкнутым (или множество A и шар $B(0,1)$ замкнуты). Тогда условие, что множество A является $\mathring{B}$-связным, равносильно его $\mathring{B}$-линейно связности.*

Это утверждение дает возможность получать результаты, аналогичные в рассмотренном выше примере, в случае уже негладких несимметричных пространств.

Теорема 2. *Пусть $(X, \|\cdot|)$ – банахово пространство, непустое множество $A \subset X$ является ограниченно слабо компактным и аппроксимативно компактным. Тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε-выборка, непрерывная как отображение из сильной топологии в слабую, то найдется ε-выборка, непрерывная как отображение из сильной топологии в сильную, для всех $\varepsilon > 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Царьков И. Г.* Равномерная выпуклость в несимметричных пространствах // Матем. заметки. 2021. Т. 110 (5). С. 773–785.

[2] *Cobzas S.* Separation of convex sets and best approximation in spaces with asymmetric norm // Quaestiones Mathematicae. 2004. Vol. 279, № 3(11). P. 275–296.

[3] *Cobzas S.* Functional analysis in asymmetric normed spaces // Название конференции или сборника. Front. Math. Birkhäuser/Springer Basel AG. Basel. 2013.

[4] *Tsar'kov I. G.* Reflexivity for spaces with extended norm // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. Vol. 30. № 3. P. 399–417.

[5] Donjuán V., Jonard-Pérez N. Separation axioms and covering dimension of asymmetric normed spaces // Quaestiones Mathematicae. 2020. Vol. 43, № 4. P. 467–491.

[6] *Tsar'kov I. G.* Connectedness in asymmetric spaces // Journal of mathematical analysis and applications. 2023. Vol. 527, № 1. Part 1. P. 1–14.