УДК 517.96;517.984

Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью[1]

А. П. Хромов (Саратов, Россия)
KhromovAP@sgu.ru

На основе законности перестановки операций суммирования и интегрирования тригонометрического ряда Фурье дается решение обобщенной смешанной задачи для однородного волнового уравнения с нулевой начальной скоростью и условиями закрепления на концах. Решение дается в виде ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения этот ряд является таким решением.

Ключевые слова: расходящийся ряд, волновое уравнение, смешанная задача.

Divergent series and generalized mixed problem for homogeneous wave equation with zero initial velocity[1]

A. P. Khromov (Saratov, Russia)
KhromovAP@sgu.ru

Allowing the inversion of the operations of summation and integration for trigonometric Fourier series we present the solution by Fourier method of the generalized mixed problem for the homogeneous wave equation with zero initial velocity and fixed ends boundary conditions. The solution has a form of a series converging at exponential rate. This series converges the classic solution if the latter equists.

Keywords: divergent series, wave equation, mixed problem.

Обобщенная смешанная задача [1, с. 217] является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи.

1. Рассмотрим сначала следующую обобщенную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) + f(x,t), \quad x,t \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(t), \quad u'_t(x,0) = \psi(x). \tag{3}$$

Считаем, что все функции, входящие в (1)–(3), комплекснозначные, причем $q(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L[0,1]$ и $f(x,t)$ класса Q, т.е. $f(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, $Q_T = [0,1]\times[0,T]$.

Задача (1)–(3) при таких исходных данных чисто формальная,т.е. имеет лишь внешний вид. Несмотря на это, можно дать [1, с. 217] формальное решение по методу Фурье в следующем виде:

$$u(x,t) = \Big(\ \Big)\Bigg[(R_\lambda\varphi)\cos\rho t + (R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho} +$$
$$+\int\limits_0^t R_\lambda(f(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau)}{\rho}\,d\tau\Bigg]d\lambda, \tag{4}$$

где $\Big(\ \Big) = -\frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum\limits_{n\geq n_0}\int\limits_{\gamma_n}\Big)$, $R_\lambda = (L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L: $Ly = -y''(x) + q(x)y(x)$, $y(0) = y(1) = 0$, λ — спектральный параметр, E — единичный оператор, $R_\lambda(f(\cdot,\tau))$ означает, что R_λ применяется к $f(x,t)$ по переменной x (τ — параметр), $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, γ_n — образ в λ-плоскости окружности $\tilde{\gamma}_n = \{\rho : |\rho - n\pi| = \delta\}$, $\delta > 0$ и достаточно мало, $r > 0$ достаточно велико, фиксировано, n_0 — такой номер, что при $n \geq n_0$ внутри γ_n находится по одному собственному значению и все γ_n при $n \geq n_0$ находятся вне $|\lambda| = r$, а остальные собственные значения — внутри. Считаем, что задача (1)–(3) и ее формальное решение тесно связаны.

Ряд (4) может быть и расходящимся. Таким образом, в нашей обобщенной смешанной задаче сама задача имеет чисто формальный вид, а формальное решение может быть и расходящимся рядом.

2. При действиях с расходящимися рядами будем пользоваться аксиомой:

$$\int\sum = \sum\int, \tag{5}$$

где $\int$ — определенный интеграл.

С помощью(5) формальное решение (4) приводится к виду

$$u(x,t) = Z(x,t;\varphi) + \int\limits_0^t Z(x,\tau;\psi)\,d\tau + \int\limits_0^t d\tau\int_0^{t-\tau} Z(x,\eta;f(\cdot,\tau))\,d\tau, \tag{6}$$

где $Z(x,t;\varphi)$ есть формальное решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{7}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{8}$$
$$u(x,0) = \varphi(t), \quad u'_t(x,0) = 0. \tag{9}$$

Значение формулы (6) в том, что хорошо объясняется роль смешанной задачи (7)–(9) и поэтому в дальнейшем ограничимся лишь задачей (7)–(9).

3. При решении обобщенной смешанной задачи (7)–(9) потребуется следующий факт, относящийся к тригонометрическому ряду Фурье [2].

Рассмотрим на $[-1, 1]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in L[-1, 1]$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\pi x + b_k \sin k\pi x), \tag{10}$$

где $a_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \cos k\pi t \, dt$, $k = 0, 1, \ldots$; $b_k = \int\limits_{-1}^{1} f(t) \sin k\pi t \, dt$, $k = 1, 2, \ldots$.

Рассматриваем ряд (10) как расходящийся. К нахождению его суммы привлечем аксиому (5), где $\int = \int\limits_{-1}^{x}$.

Теорема 1. *Сумма расходящегося ряда* (10) *почти всюду равна* $f(x)$.

К этому же результату приходим при суммировании ряда (10) по Фейеру.

4. Приступаем к решению задачи (7)–(9).

Представим формальное решение $Z(x, t; \varphi)$ задачи (7)–(9) в виде:

$$u(x, t) = u_{01}(x, t) + u_1(x, t), \tag{11}$$

где $u_{01}(x, t)$ есть ряд $Z(x, t; \varphi)$ при $q(x) = 0$. Этот ряд обозначим $Z_0(x, t; \varphi)$. Поэтому $u_1(x, t)$ есть ряд $u_1(x, t) = Z(x, t; \varphi) - Z_0(x, t; \varphi)$.

Лемма 1 ([3, с. 315]). *Сумма ряда* $u_{01}(x, t)$ *есть*

$$a_0(x, t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x + t) + \tilde{\varphi}(x - t)], \tag{12}$$

где $\tilde{\varphi}(x)$ *нечетна и* 2*-периодична при* $x \in (-\infty, \infty)$ *и* $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ *при* $x \in [0, 1]$.

Ряду $u_1(x, t)$ соответствует смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u_1(x, t) + f_0(x, t), \tag{13}$$

$$u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \tag{14}$$

$$u_1(x, 0) = u'_{1t}(x, 0) = 0, \tag{15}$$

где $f_0(x, t) = -q(x)a_0(x, t)$.

Но ряд $u_1(x,t)$ не является рядом формального решения по методу Фурье этой задачи и мы его меняем на ряд формального решения задачи (13)–(15). Этот переход является основным методом нашей процедуры.

Повторяем теперь вышеприведенную процедуру с рядом

$$u_1(x,t) = \Big(\ \Big)\left[\int\limits_0^t R_\lambda(f_0(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda, \tag{16}$$

т. е. представим $u_1(x,t) = u_{02}(x,t) + u_2(x,t))$, где $u_{02}(x,t)$ есть ряд формального решения обобщенной смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2} + f_0(x,t), \tag{17}$$

$$u_{02}(0,t) = u_{02}(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u_{02}(x,0) = u'_{02,t}(x,0) = 0. \tag{19}$$

Лемма 2. *Сумма ряда $u_{02}(x,t)$ есть*

$$u_{02}(x,t) = a_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{20}$$

где $\tilde{f}_0(\eta,\tau)$ нечетна, 2-периодична по η и $\tilde{f}_0(\eta,\tau) = f_0(\eta,\tau)$ при $\eta\in[0,1]$.

Продолжая далее указанный процесс получим на m-м шаге, что формальное решение $u(x,t)$ задачи (7)–(9) переходит в

$$u(x,t) = A_m(x,t) + \Omega_m(x,t), \tag{21}$$

где $A_m(x,t) = \sum\limits_{k=0}^m a_k(x,t)$,

$$a_k(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}_{k-1}(\eta,\tau)\,d\eta, \quad k\geq 1,$$

$$f_k(\eta,\tau) = -q(\eta)a_k(\eta,\tau),$$

$$\Omega_m(x,t) = \Big(\ \Big)\left[\int\limits_0^t (R_\lambda - R_\lambda^0)(f_{m-1}(\cdot,\tau))\frac{\sin\rho(t-\tau}{\rho}\,d\tau\right]d\lambda.$$

Лемма 3 ([1, с. 221]). *Ряд $A(x,t) = \sum\limits_{k=0}^\infty a_k(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно с экспоненциальной скоростью.*

Лемма 4 ([1, с. 235]). *Сумма ряда $\Omega_m(x,t)$ абсолютно и равномерно по $x, t \in Q_T$ стремится к нулю при $m \to \infty$.*

Поэтому справедлива

Теорема 2. *Сумма ряда $A(x,t)$ представляет собой решение обобщенной смешанной задачи* (7)–(9).

Основанием для такого заключения является

Теорема 3 ([4, с.729, теорема 6]). *Если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны на* $[0,1]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, *то ряд $A(x,t)$ является классическим решением задачи* (7)–(9).

Замечание. Условие на $\varphi(x)$ в теореме 3 являются необходимыми и достаточными для классического решения задачи (7)–(9).

Таким образом, аксиома о перестановочности операций интегрирования и суммирования функциональных рядов приводит в случае тригонометрического ряда Фурье к методу суммирования, схожего с методом Фейера. В случае обобщенной смешанной задачи для волнового уравнения эта аксиома с привлечением приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов приводит к представлению решения смешанной задачи в виде явного ряда, сходящегося с экспоненциальной скоростью. В случае классического решения данный результат является аналогом регулярности метода суммирования ряда формального решения смешанной задачи по методу Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, вып. 4. С 215–238. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238, EDN: YJLRTL

[2] *Хромов А. П.* О почленном интегрировании тригонометрического ряда Фурье и теореме Фейера–Лебега // Тр. Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. Казань: КФУ, 2023. С 261–262.

[3] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, вып. 3. С. 322–331. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331, EDN: PTNPTE

[4] *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 5. С. 717–731. https://doi.org/10.1134/S0374064119050121, EDN: ZFWIBF