УДК 517.5

Радиус Бора и оператор свёртки Адамара[1]

Р. Ш. Хасянов (Санкт-Петербург, Россия)

st070255@student.spbu.ru

Вводится понятие радиуса Бора пары операторов. В терминах свёрточной функции получена общая формула вычисления радиуса Бора r оператора свёртки Адамара с фиксированным коэффициетом a и ограничением на величину r/a. При существенно меньших ограничениях на r/a получена общая формула для оценок радиуса оператора свёртки Адамара с фиксированным коэффициентом. Этот результат применён к вопросу о неравенстве Бора для оператора дифференцирования: показано, что новый метод получения нижней оценки в этой задаче в ряде случаев эффективнее известного метода.

Ключевые слова: Радиус Бора, оператор свёртки Адамара, подчинённые функции, оценки коэффициентов аналитических функций.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-30002-П).

The Bohr radius and the Hadamard convolution operator[1]

R. Sh. Khasyanov (Saint Petersburg, Russia)

st070255@student.spbu.ru

The concept of the Bohr radius of a pair of operators is introduced. In terms of the convolution function, a general formula for calculating the Bohr radius r of the Hadamard convolution type operator with a fixed initial coefficient a and restrictions on the value r/a is obtained. With much weaker restrictions on r/a, a general formula for estimating of the Bohr radius of the convolution Hadamard operator with initial coefficient is obtained. This result is applied to the question of Bohr's inequality for the differentiation operator: it is shown that the new method for obtaining a lower bound in this problem is in a number of cases more effective than the known method.

Keywords: The Bohr radius, Hadamard convolution operator, subordinate functions, coefficient estimates of analytic functions..

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30002) https://rscf.ru/project/23-71-33001/.

В 1914 году Х. Бор, занимаясь рядами Дирихле, заметил [1] следующий интересный факт, который сейчас называется явлением Бора:

Теорема A. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *и* $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$ *в круге* $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$. *Тогда*

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n \leq 1, \quad 0 \leq r \leq 1/3.$$

Число $1/3$ *неулучшаемое.* Сам Х. Бор доказал эту теорему только для $r \le 1/6$, а константа $1/3$ была получена в том же году независимо М. Рисом, И. Шуром и Ф. Винером (разные доказательства собраны в аппендиксе работы [2]).

Теорема Бора эквивалентна следующему неравенству:

$$\sum_{n\ge 0} |a_n| r^n \le \|f\|_\infty, \quad 0 \le r \le 1/3.$$

Активное изучение различных обобщений и модификаций неравенства Бора началось в середине 1990-х годов, когда П. Диксон, используя неравенство Бора, решил давнюю проблему о характеризации банаховых алгебр [2].

В работе [3] было введено определение радиуса Бора пары операторов и связанные с ним понятия. Напомним сначала определение мажорантного ряда:

Определение *Пусть* $f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n,\ z \in \mathbb{D}$. *Функционал*

$$M_r f := \sum_{n\ge 0} |a_n| r^n$$

называется мажорантным рядом или суммой Бора функции f.

Пусть D — открытый круг с центром в нуле или интервал с центром в нуле. Обозначим через $\mathcal{H}(D)$ множество всех функций вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge 0} a_n z^n$, которые сходятся в D. Пусть

$$\mathcal{H}_m(D) := \{f \in \mathcal{H}(D) :\ f(0) = f'(0) = ... = f^{(m-1)}(0) = 0\}.$$

Определение. *Пусть* $m, t, s_1, s_2 \ge 0$ *и*

$$T_1 : \mathcal{H}_m(t\mathbb{D}) \to \mathcal{H}(\mathbb{D}), \quad T_2 : \mathcal{H}_m(-s_1, s_1) \to \mathcal{H}(-s_2, s_2)$$

– линейные операторы. Максимальный $R \in [0, \infty)$, *для которого*

$$\|T_1 f\|_\infty \le 1 \Longrightarrow |T_2 M_r f| \le 1, \quad 0 \le r \le R, \tag{1}$$

будем называть радиусом Бора пары T_1 *и* T_2 *и обозначать* $R_{T_1\to T_2}$. *Если* $T_1 = T_2$, *просто пишем* R_{T_1}.

Как и в случае с классическим неравенством Бора условие (1) эквивалентно неравенству

$$|T_2 M_r f| \le \|T_1 f\|_\infty.$$

Обозначим через id_m тождественный оператор, заданный на пространстве $\mathcal{H}_m(\mathbb{D})$. Записи $R_{id\to T}$ и $R_{T\to id}$ означают, что id — тождественный оператор того же пространства, на котором определён оператор T.

Из теоремы Бора следует, что $R_{id_0} = 1/3$. В 1962 году Э. Бомбиери доказал [4], что $R_{id_1} = 1/\sqrt{2}$. Задача о вычислении R_{id_m} остаётся открытой. Она обсуждалась в [5].

Определение. *Функцию*

$$m_{T_1 \to T_2}(r) := \sup_{f:\|T_1 f\|_\infty \le 1} \frac{|T_2 M_r f|}{\|T_1 f\|_\infty}$$

будем называть функцией Бора-Бомбиери операторов T_1 и T_2. Если операторы T_1 и T_2 совпадают, пишем $m_{T_1}(r)$.

Из теоремы Бора следует, что $m_{id_0}(r) = 1, 0 \le r \le 1/3$. В [4] доказано, что для $r \in [1/3, 1/\sqrt{2}]$,

$$m_{id_0}(r) = \frac{3 - \sqrt{8(1-r^2)}}{r}.$$

Для $r \in [1/\sqrt{2}, 1)$ задача о вычислении функции Бора-Бомбиери для id_0 остаётся открытой и связана напрямую с вычислением R_{id_m}, $m \ge 2$. Глубокие результаты связанные с этой проблемой, были получены Э. Бомбиери и Ж. Бургейном в 2004 году (см. [5]).

Определение. *Рассмотрим функции вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge m} a_n z^n$. Зафиксируем модуль начального коэффициента $a := |a_m|$. Максимальное число $r = |z|$, такое что для всех функций вида $f(z) = \sum\limits_{n\ge m} a_n z^n$, $|c_m| = a$, выполняется условие (1), будем называть радиусом Бора пары операторов T_1 и T_2 с начальным коэффициентом a. Аналогично определелим функцию Бора-Бомбиери пары операторов с начальным коэффициентом. Обозначаем, соответственно,*

$$R_{T_1 \to T_2}(a), \quad m_{T_1 \to T_2}(r, a).$$

Например (см. ([4]),

$$R_{id_0}(a) = \frac{1}{1+2a}, \quad 1/2 < a \le 1.$$

Больше примеров вычисленных ранее радиусов Бора и функций Бора-Бомбиери см. в [3].

Пусть $m \ge 0$ и $h(z) = \sum\limits_{n\ge m} c_n z^n$. Пусть $S_{m,l}$ — оператор сдвига, заданный в пространстве $\mathcal{H}_m(D)$, а именно $S_{m,l} f(z) := z^l f(z)$, $f \in \mathcal{H}_m(D)$. Будем рассматривать операторы вида

$$A_h^{m,l} f := S_{m,l}(h * f), \quad A_h^m := A_h^{m,0}, \quad A_h := A_h^0. \tag{2}$$

Сформулируем основной результат работы [3] (точнее, его частный случай):

Теорема 1. *Пусть* $h(z) = \sum\limits_{n\geq m} c_n z^n$, $c_n > 0$. *Если* $\dfrac{r}{a} < \inf\limits_{n\geq m+1} \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ *тогда*

$$m_{id\to A_h^{m,l}}(r,a) = r^{m+l}c_m a + (1/a - a)a^{-m}r^l(h(ar) - c_m(ar)^m).$$

Рассмотрим задачу об оценке мажорантного ряда функции через его производную. Далее $W(x)$ – функция Ламберта, то есть обратная функция к $g(w) = we^w$.

Теорема 2. *Пусть* $a \in (0.892643..., 1]$. *Тогда*

$$R_{\partial\to id_1}(a) = \frac{1}{a}\Big(1 + \frac{a^2-1}{2a^2-1}W\Big(\frac{1-2a^2}{a^2-1}e^{-1}\Big)\Big).$$

Доказательство. Заметим, что $R_{\partial\to id_0} = R_{id_0\to\int}$, где $\int$ – оператор, определённый равенством

$$\int_0^z f(z)dz = S_{0,1}(h*f)(z), \quad h(z) = -\frac{\log(1-z)}{z}.$$

Следовательно, по теореме 1, для $r < 1$ и $a > r$,

$$m_{id_0\to\int}(r,a) = ar + (1/a - a)r\Big(\frac{-\log(1-ar)}{ar} - 1\Big).$$

Приравнивая последнее выражение к единице, получаем утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. Lond. Math. Soc., 1914. Vol. 13, P. 1–5.

[2] *Dixon P.* Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality. // Bull. Lond. Math. Soc., 2005. № 27.

[3] *Khasyanov R.* The Bohr radius and the Hadamard convolution operator // J. Math. Anal. Appl., 2024. V. 351, № 1.

[4] *Bombieri E.* Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze // Boll. Un. Mat. Ital., 1962. P. 276–282.

[5] *Bombieri E., Bourgain J.* A remark on Bohr's inequality // Int. Math. Res. Not., 2004. Vol. 80, P. 4307–4330.