

# Задания компьютерного практикума по курсу «Современные проблемы нелинейной динамики»

## 1. Теория катастроф

- Постройте систему нормалей к квадратичной параболе. Убедитесь, что в определенной области нормали пересекаются. Как выглядит граница этой области?
- Постройте картину отраженных от вогнутой цилиндрической поверхности параллельных лучей света. Пронаблюдайте каустику.
- Пронаблюдайте в численном эксперименте схлопывание волнового фронта, испускаемого вогнутой поверхностью с параболическим профилем. Считайте, что распространение фронта подчиняется принципу Гюйгенса.

## 2. Бифуркационное дерево

Постройте диаграмму зависимости от управляющего параметра  $\lambda$  значений динамической переменной  $x$  логистического отображения  $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$ , которые она принимает в установившемся режиме. Для этого для каждого конкретного значения параметра необходимо просчитать временную реализацию  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{N+M}$ . На диаграмме следует отражать лишь значения  $x_N, x_{N+1}, \dots, x_M$ . Начальное условие  $x_0 = 0$ . Количество предварительных итераций должно быть достаточно большим для учета переходного процесса, например,  $N = 100$ . Изображаемый фрагмент траектории — установившаяся орбита — также должен быть достаточно длинным, например,  $M = 100$ .

## 3. Карта динамических режимов

Проанализируйте динамику отображения окружности

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Delta + k \sin \theta_n \pmod{2\pi}$$

в установившемся режиме. На плоскость управляющих параметров наносите точки разных цветов в зависимости от периода реализующегося цикла. Если цикл определить не удастся, оставляйте точку неокрашенной. Пронаблюдайте языки Арнольда.

## 4. Гиперболический хаотический генератор С.П. Кузнецова

Для системы двух связанных осцилляторов Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (A \cos(\omega t / N) - x^2) \dot{x} + \omega^2 x = \varepsilon y \cos(\omega t),$$

$$\ddot{y} - (-A \cos(\omega t / N) - y^2) \dot{y} + (2\omega)^2 y = \varepsilon x^2$$

с поочередной накачкой и эстафетной передачей фазы при значениях параметров  $A = 3.5$ ,  $\omega = 2\pi$ ,  $N = 10$ ,  $\varepsilon = 0.5$  постройте фазовый портрет в проекции на плоскость  $(x, \dot{x})$  в стробоскопическом сечении через период  $N$ . Убедитесь, что он топологически эквивалентен соленоиду Смейла–Вильямса. Постройте итерационную диаграмму для динамики угловой переменной, определяемой как  $\arctg(\dot{x}/x)$ . Убедитесь, что она эквивалентна диаграмме отображения Бернулли. Рассчитайте спектр мощности для сигнала в стробоскопическом сечении. Убедитесь, что он однороден. Рассчитайте статистическое распределение по величине локального старшего ляпуновского показателя. Убедитесь, что оно имеет близкую к гауссовой структуру с обособленным при  $\ln 2$  максимумом и сосредотачивается в положительной области уже при небольших периодах усреднения локального показателя. Варьируя какой-либо из параметров, наблюдайте разрушение соленоида Смейла–Вильямса.

## 5. Синхронизация автоколебательной системы внешним периодическим воздействием

Для осциллятора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t$$

постройте карты динамических режимов на плоскости параметров амплитуда – частота внешнего воздействия для нескольких значений параметра  $\lambda$ . Как зависит картина синхронизации от величины параметра  $\lambda$ ? Как она соотносится с результатами, представленными в лекциях?

## 6. Взаимная синхронизация двух автоколебательных систем

Для двух связанных осцилляторов Ван дер Поля с диссипативной

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \mu\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda - y^2)\frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \mu\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

или инерционной связью

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\lambda - x^2)\frac{dx}{dt} + \left(1 - \frac{\Delta}{2}\right)x + \varepsilon(x - y) = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - (\lambda - y^2)\frac{dy}{dt} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)y + \varepsilon(y - x) = 0$$

постройте карты динамических режимов на плоскости частотная расстройка – параметр связи для нескольких значений параметра  $\lambda$ . Как изменяется картина синхронизации при увеличении  $\lambda$ ?