УДК 517.518.82

Примеры экспоненциальной сходимости полиномов Бернштейна к своей порождающей функции[1]

И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков (Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Обсуждается вопрос о скорости сходимости полиномов Бернштейна при специальных ограничениях на порождающую функцию. Показано, что, если порождающая функция имеет в своем составе линейную часть, то скорость сходимости на таком линейном участке будет экспоненциальной. Полученный результат дополняет известную теорему Вороновской. Он полезен при описании сходимости полиномов Бернштейна от кусочно линейных порождающих функций.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, теорема Вороновской, экспоненциальная скорость сходимости, кусочно линейные функции.

Examples of exponential convergence of Bernstein polynomials to its generating function[1]

I. V. Tikhonov, V. B. Sherstyukov (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com

Under some special restrictions, the question of the rate of convergence of Bernstein polynomials is discussed. It is shown that if the generating function has a linear part, then the rate of convergence on such interval will be exponential. The obtained result complements the well-known Voronovskaya theorem. It is useful in describing the convergence of Bernstein polynomials of piecewise linear generating functions.

Keywords: Bernstein polynomials, Voronovskaya theorem, exponential rate of convergence, piecewise linear functions.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0,1]$ вводят формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты. Основные сведения о полиномах Бернштейна представлены в [1]–[3]. Теорема Вороновской (один из главных результатов теории) утверждает, что в каждой точке $x_0 \in (0,1)$, где имеется вторая производная $f''(x_0)$, справедливо представление

$$B_n(f,x_0) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)\, x_0(1-x_0)}{2n} + \frac{\alpha_n(x_0)}{n} \tag{2}$$

с величиной $\alpha_n(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$ (см. [1, с. 22]).

Как показывает формула (2), если $f''(x_0) \neq 0$, то в точке $x_0 \in (0,1)$ скорость приближения порождающей функции $f(x)$ полиномами Бернштейна имеет порядок $1/n$, независимо от наличия у функции любых последующих производных. Если же $f''(x_0) = 0$, то

$$B_n(f, x_0) - f(x_0) = o(1/n), \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

и здесь возможны варианты.

Так, для бесконечно дифференцируемой функции $f(x) = (x - x_0)^3$ с фиксированным значением $x_0 \in (0,1)$ выполнено условие $f''(x_0) = 0$. Полиномы Бернштейна в данном примере допускают представление

$$B_n(f, x) = (x - x_0)^3 + \frac{3x(1-x)(x-x_0)}{n} + \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$B_n(f, x_0) - f(x_0) = B_n(f, x_0) - 0 = \frac{x_0(1-x_0)(1-2x_0)}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если $x_0 \neq 1/2$, то в точке $x = x_0$ имеем приближение порядка $1/n^2$. Если же $x_0 = 1/2$, то приближение становится «идеальным» благодаря совпадениям $B_n(f, 1/2) - f(1/2) = 0$, верным при всех $n \in \mathbb{N}$. Последний эффект также связан с «нечетностью» функции $f(x) = (x - 1/2)^3$ относительно середины отрезка $[0,1]$.

Естественно закрыть вопрос и уточнить формулу (3) для любого полинома $f(x) = (x - x_0)^p$ с натуральным показателем $p \geqslant 3$. Такую задачу можно решить, используя формулы Бернштейна [4] и Теляковского [5] при некоторых специальных к ним дополнениях.

Сосредоточимся на другой ситуации. Оказывается, при выполнении условия $f''(x) = 0$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ остаток в формуле (3) для всякой точки $x_0 \in (\alpha, \beta)$ будет иметь не степенной, а экспоненциальный характер. Это принципиальное обстоятельство было обнаружено сначала на примере симметричного модуля $f(x) = |2x - 1|$ (см. [6, с. 32–35]), а затем — для произвольной непрерывной функции, имеющей в составе «линейную часть» (см. [7, с. 161–164]).

Общий результат из [7] состоит в следующем.

Теорема. *Пусть* $B_n(f, x)$ *— полиномы Бернштейна* (1) *для порождающей функции* $f \in C[0,1]$, *такой, что*

$$f(x) = cx + d \quad \text{при} \quad x \in [\alpha, \beta]$$

с фиксированными значениями $c, d \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \alpha < \beta < 1$. *Тогда для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in (\alpha, \beta)$ *справедлива оценка*

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \left(C_\alpha \, \frac{(\Delta_\alpha(x))^n}{x - \alpha} \; + \; D_\beta \, \frac{(\Delta_\beta(x))^n}{\beta - x} \right) \|f\|, \tag{4}$$

где

$$\Delta_\lambda(x) \equiv \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\lambda \left(\frac{1-x}{1-\lambda}\right)^{1-\lambda} \tag{5}$$

при $\lambda = \alpha$ *и* $\lambda = \beta$, *коэффициент* $C_\alpha > 0$ *зависит лишь от* α, *коэффициент* $D_\beta > 0$ *зависит лишь от* β, *а* $\|f\| \equiv \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

Теорема сохраняет свою силу при $\alpha = 0$ или $\beta = 1$, если условиться, что $C_0 = D_1 = 0$. Соответствующее слагаемое в формуле (4) пропадает. Точнее, для функции $f \in C[0,1]$, линейной на отрезке $[0, \beta] \subset [0, 1)$, при всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$|B_n(f,x) - f(x)| \;\leqslant\; \frac{D_\beta}{\sqrt{n}} \, \frac{(\Delta_\beta(x))^n}{\beta - x} \, \|f\|, \qquad x \in (0, \beta). \tag{6}$$

Аналогично для функции $f \in C[0,1]$, линейной на отрезке $[\alpha, 1] \subset (0, 1]$, при всех $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$|B_n(f,x) - f(x)| \;\leqslant\; \frac{C_\alpha}{\sqrt{n}} \, \frac{(\Delta_\alpha(x))^n}{x - \alpha} \, \|f\|, \qquad x \in (\alpha, 1). \tag{7}$$

Выражение $\Delta_\lambda(x)$ из формулы (5) при любом $\lambda \in (0,1)$ можно называть *регулятором Канторовича* — роль подобных конструкций впервые отмечена в работе [8].

Нетрудно проверить, что $0 < \Delta_\lambda(x) < 1$ при $x \in (0, \lambda) \cup (\lambda, 1)$. Отсюда следует экспоненциальный характер сходимости полиномов Бернштейна, указанный в формулах (4), (6), (7).

Полученные оценки применимы, например, при выборе кусочно линейной порождающей функции $f \in C[0,1]$. В таком случае скорость сходимости полиномов Бернштейна будет экспоненциальной на участках линейности функции $f(x)$. При приближении x к точке излома функции $f(x)$ эта экспоненциальная скорость будет снижаться, а в самой точке излома сходимость будет медленной, степенной, порядка $1/\sqrt{n}$.

Весьма вероятно, что в подобных примерах оценки скорости сходимости полиномов Бернштейна удастся распространить в комплексные зоны, примыкающие к отрезку $[0,1]$ и ограниченные соответствующими *лемнискатами Канторовича* из [8] (по аналогии с результатами [9] для рационального модуля $f(x) = |qx - p|$).

Отметим также, что менее точная версия приведенной теоремы доказана вероятностными методами в недавней работе [10]. Подобный результат потребовался при полиномиальной аппроксимации локально постоянных функций на системе непересекающихся отрезков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. N. Y. : Chelsea Publ. Co., 1986. x+134 p.

[2] *Bustamante J.* Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017. xii+420 p.

[3] *Виденский В. С.* Линейные положительные операторы конечного ранга. Многочлены Бернштейна : учебное пособие для вузов. СПб. : Лань, 2023. 144 с.

[4] *Bernstein S.* Complément à l'article de E. Voronovskaya «Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein» // Доклады Академии Наук СССР, A. 1932. № 4. C. 86–92. [См. также *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Том II. Конструктивная теория функций [1931-1953]. Изд-во АН СССР, 1954. С. 155–160.]

[5] *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций могочленами Бернштейна и многочленами Канторовича // Труды МИАН. 2008. Т. 260. С. 289–296.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник Челябинского гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 15, № 26. С. 6–40.

[7] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А.* Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по матем. анализу. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.

[8] *Канторович Л. В.* О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. VII сер. Отд-ние мат. и естеств. наук. 1931. № 8. С. 1103–1115.

[9] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.* Обобщенные разложения Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Тематич. обзоры. 2019. Т. 170. С. 71–117.

[10] *Malykhin Yu., Ryutin K.* Polynomial approximation on disjoint segments and amplification of approximation // arXiv preprint arXiv: 2306.11613, 2023.