

Фракталы

1. С помощью компьютера постройте на основе принципа рекурсии набор изображений таких самоподобных фракталов, как канторово множество, кривая Коха, дерево Пифагора, кривая Гильберта (заполняющая плоскость), «дракон Хартера» и др. Подсчитайте аналитически их фрактальную размерность.

2. Создайте программу для расчета фрактальной размерности (емкости) произвольного геометрического объекта на плоскости. Используйте простейший способ, разбивая плоскость квадратной сеткой, подсчитывая количество ячеек, покрывающих объект и далее оценивая угол наклона графика $\ln N(\ln \varepsilon)$. Протестируйте Вашу программу на гладкой кривой и на каком-нибудь простейшем фрактале.

3. Запрограммируйте расчет последовательных элементов дерева Фаря по принципу «правила двоечника». Задайте возможность нахождения последовательностей аппроксимантов иррациональных чисел при периодическом выборе ветвей дерева.

4. Сгенерируйте с помощью компьютера звуковой сигнал, состоящий из достаточно большого) числа компонент с удваивающимися частотами. Диапазон задействованных частот должен покрывать и значительно превосходить по ширине диапазон частот 20 Гц-20 кГц, воспринимаемых слухом человека. Воспроизведите сгенерированный сигнал с удвоенной скоростью и сравните на слух с исходным. Слышите ли Вы отличия? Попробуйте плавно увеличивать скорость проигрывания исходного сигнала и прослушайте "вечно восходящие тоны" Шепарда.

5. Исследуйте динамику системы линейных итерированных функций:

$$f_1(z) = z/2,$$

$$f_2(z) = z/2 + 1/2,$$

$$f_3(z) = z/2 + 1/4 + i\sqrt{3}/4,$$

где z — комплексная переменная, действительная и мнимая части которой x и y соответствуют абсциссе и ординате изображающей точки на плоскости. Задайте некоторое начальное значение переменной z , например $z_0=0$, и произведите итерации этой точки посредством трех отображений, определяемых функциями f_1, f_2 и f_3 . Таким образом, после первой итерации, на плоскости (x,y) возникнет три точки. На второй итерации возникнет по три образа для каждой из этих трех, то есть 9 изображающих точек и т.д. Накапливая значения, получаемые при итерациях, получите изображение «салфетки» Серпинского.

6. Смоделируйте с помощью компьютера игру «Хаос». Для этого выберите начальную точку внутри равностороннего треугольника и задайте динамику игры таким образом, что каждая последующая точка будет

располагаться на середине отрезка, соединяющего предыдущую точку со случайно выбранной вершиной треугольника. Пронаблюдайте аттрактор этой системы в виде «салфетки» Серпинского.

7. Постройте фрактал «лист папоротника» с помощью последовательности аффинных преобразований плоскости:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= ax_n + by_n + e, \\y_{n+1} &= cx_n + dy_n + f.\end{aligned}$$

На каждом шаге итерирования, коэффициенты должны принимать приведенные в таблице численные значения случайным образом с вероятностью p , указанной в последнем столбце. Попробуйте поварьировать значения этих величин.

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

8. Запрограммируйте построение кривой Коха с помощью «черепашьего» алгоритма. Для этого строка, на начальном этапе состоящая из единственного символа « F », подвергается многократному рекурсивному преобразованию, на каждом шаге которого в строке производится замена

$$F \rightarrow F + F - -F + F .$$

Визуализация фрактала осуществляется при чтении полученной строки, в которой « F » означает прочерчивание «черепашей» отрезка вперед, «+» — поворот на угол 60° влево, «-» — поворот на угол 60° вправо.

9. Постройте фракталы с помощью еще одной L -системы (системы Линденмайера). Для этого начальную строку (аксиому) « F » подвергните многократным преобразованиям, при каждом из которых производятся замена символов в строке согласно одному из трех правил:

$$\begin{aligned}F &\rightarrow F[+FF]F[-F]F, \\F &\rightarrow F[+F]F, \\F &\rightarrow F[-F]F.\end{aligned}$$

Выбор правила на каждом шаге рекурсии случайный, равновероятный. Полученную строку используйте для визуализации согласно следующей расшифровке алфавита: « F » — черепаха прочерчивает отрезок вперед; «+» — поворачивает на угол 45° влево; «-» — поворачивает на угол 45° вправо; «[» — сохранение в памяти положения черепахи; «]» — черепаха возвращается в сохраненное положение.

10. С помощью Интернета составьте обзор простейших самоподобных фракталов, а также фракталов, являющихся продуктами систем итерируемых линейных функций и L -систем. Оформите обзор в виде Интернет–странички или электронной презентации.

11. Исследуйте процесс броуновского случайного блуждания (одномерный случай). Численная модель состоит в задании случайных смещений броуновской частицы по прямой на каждом шаге дискретного времени. При этом величина смещения пусть представляет собой распределенную по гауссову закону случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией. (Для задания гауссовой случайной величины удобно воспользоваться уже существующими в ряде прикладных пакетов программирования процедурами. Можно также задать ее самостоятельно как определенным образом отнормированную сумму конечного количества равномерно распределенных случайных величин). Проинтерпретируйте понятие «самоподобия» применительно к случайным последовательностям. Для этого постройте реализацию координаты броуновской частицы, отмечая при этом лишь точки через некоторый макроскопический интервал времени 1) t и 2) n^2t (более грубый масштаб). Также постройте зависимость смещения частицы от дискретного времени, суммируя смещения соответственно за интервалы времени t и n^2t . Сопоставьте полученные рисунки. Что можно сказать о дисперсии представленных на этих рисунках случайных величин? Объясните, почему при пересчете пространственных масштабов в n раз и одновременном пересчете временных масштабов в n^2 раз броуновские диаграммы выглядят одинаково.

12. Проведите компьютерное моделирование ограниченной диффузией агрегации (ОДА). Для этого задайте двумерную квадратную решетку и поместите на нее точечный (в центре) или линейный (на границе) затравочный элемент агрегата. Запуская с границы решетки случайно блуждающие по ней частицы, прилипающие с определенной вероятностью к агрегату, наблюдайте рост фрактального кластера. Попробуйте рассчитать напряженность диффузионного поля вдоль границы кластера путем запуска пробных частиц. Разметьте ее в тонкой области, окружающей кластер, различными градациями какого-нибудь цвета. Исходите из принципа, что величине напряженности диффузионного поля соответствует вероятность прилипания пробной частицы.

13. Рассчитайте фрактальную размерность кластера ОДА из предыдущей задачи. Постройте кластер ОДА еще раз и рассчитайте его размерность. Два кластера, очевидно, будут отличаться в деталях, а что можно сказать о величинах размерности?

14. Рассчитайте для кластера ОДА с точечной затравкой массовую размерность, которая определяется как показатель степенного закона $N \sim (R/R_0)^D$, где N — число элементов покрытия радиуса R_0 фрагмента кластера внутри круга радиуса R . Размерность D для фиксированного R можно

найти как угол наклона графика зависимости $\ln N$ от $\ln R$. Постройте зависимость размерности D от радиуса R . Является ли кластер ОДА мультифракталом?

15. Попробуйте «придумать» последовательность $+1$ и -1 , отвечающую белому шуму. Запишите ее и найдите для нее корреляцию. Удалось ли Вам выполнить задание? Если нет, то какой шум получился? Персцентентный или антиперсцентентный?

16. Сгенерируйте случайные последовательности численно:

а) белый шум;

б) броуновский шум – координата броуновской частицы на прямой;

в) фликкер шум, заданный как сумма нескольких релаксационных процессов типа $x_{n+1} = \rho x_n + \sqrt{1 - \rho^2} r_n$ с временами релаксации, образующими прогрессию $\tau = 1, 10, 100, \dots$. Здесь $\rho = \exp[-1/\tau]$ — коэффициент корреляции, r_n — равномерно распределенный белый шум.

Получите численно автокорреляционную функцию и спектр Фурье для сгенерированных последовательностей. Какие степенные закономерности характерны для последних?

17. Для случайных последовательностей из предыдущей задачи рассчитайте показатель Херста.

18. Сгенерируйте обобщенный цветной шум с помощью дробного интегродифференцирования (наиболее удобно использовать Фурье-представление) белого шума.

19. Изучите модель перколяции. Варьируя основной параметр модели — вероятность протекания узлов (концентрацию протекающих узлов) квадратной двумерной решетки — продемонстрируйте с помощью компьютера возникновение перколяционных кластеров. Попробуйте оценить (путем подбора или придумав более точный численный алгоритм) критическое значение вероятности, соответствующее протеканию всей решетки и возникновению кластеров «бесконечного» характерного размера. Сделайте аналитическую оценку критической концентрации протекающих узлов. Для этого надо найти приближенное соотношение между вероятностью существования кластера с характерным линейным размером 2^{n+1} узлов и вероятностью протекания кластера вдвое меньшего размера, то есть $p_{n+1} = f(p_n)$. Рассматривая полученное соотношение при $n \rightarrow \infty$ как отображение с начальным значением переменной, равным вероятности протекания одного узла p , найдите его притягивающие неподвижные точки (очевидно, что это будут единица и нуль, соответствующие протеканию бесконечной решетки и существованию лишь кластеров ограниченного размера) и границу между областями притяжения этих аттракторов, которая является неустойчивой неподвижной точкой. Сравните численную и аналитическую оценки критической концентрации.

20. Сделайте анимационную программу, демонстрирующую распространение лесных пожаров с помощью модели перколяции. В узлах квадратной решетки с некоторой вероятностью p_1 распределены деревья. С вероятностью p_2 запускаются точечные источники огня на решетке (молнии), причем если молния попала в дерево, то оно сгорает, если же молния попала в пустую клетку, то ничего не происходит. На каждом интервале дискретного времени огонь распространяется на ближайшие соседние деревья-узлы, которые сгорают за один последующий интервал дискретного времени и вырастают заново через один (или несколько) интервалов времени с вероятностью p_1 . Раскрашивая узлы в различные цвета в зависимости от их состояния (дерево, огонь, пустой узел), пронаблюдайте динамику развития кластеров. Меняя параметры системы, такие как вероятность роста деревьев и вероятность возгорания, оцените критические значения этих величин, соответствующие распространению пожара на весь лес. Нанесите эти значения на плоскость (p_1, p_2) . Что из себя представляет критическая линия $p_2(p_1)$? Предположите, что будет происходить, если уменьшить скорость роста деревьев.

21. Задайте с помощью компьютера классическую игру «Жизнь» со следующим правилом. На квадратной решетке распределено некоторое количество «живых клеток». В каждый момент дискретного времени в каждом узле решетки рождается (или выживает) клетка, если среди ее ближайших по решетке соседей есть две или три живые клетки. Подберите несколько видов начальных распределений живых клеток таких, чтобы их динамика приводила к: 1) гибели всей популяции; 2) распространению жизни и образованию фрактальных структур; 3) стабильному существованию нескольких клеток; 4) периодической динамике.

22. Сделайте Интернет-обзор по теме «Клеточные автоматы и игра «Жизнь». Найдите информацию по различным «правилам игры» и описываемым ими моделям (например, образование городов, распространение слухов и паник, образование лавин и пр.).

Комплексная аналитическая динамика

23. Для отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ (z — комплексная переменная) постройте на плоскости комплексного параметра λ области с ограниченной в фазовом пространстве динамикой и области с различными временами убегания на бесконечность, отмечая их различными цветами. Пронаблюдайте множество Мандельброта и несамоподобную фрактальную структуру его границы. Попробуйте пронаблюдать фрактальную структуру множества Мандельброта для других отображений:

- кубического отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^3$;
- отображения четвертой степени $z_{n+1} = \lambda - z_n^4$;
- рационального отображения $z_{n+1} = \lambda z_n^2 (z_n - a) / (1 - a z_n)$;

- экспоненциального отображения $z_{n+1} = \lambda \exp(z_n)$;
- отображения Эно $z_{n+1} = \lambda - z_n^2 + aw_n$, $w_{n+1} = z_n$.

24. Постройте карту динамических режимов и бассейны притяжения на фазовых плоскостях для отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$. Пронаблюдайте «кактус» Мандельброта и множества Жюлиа (связное наполненное множество, пыль Фату, дендрит) при различных характерных значениях комплексного параметра λ : внутри и снаружи «кактуса» Мандельброта, в точках Мизюровича (для чего необходимо предусмотреть возможность оперативного изменения управляющего параметра посредством задания его с клавиатуры и с помощью мыши).

25. Постройте бассейны притяжения отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ при значениях параметра λ принадлежащих границе «кактуса» Мандельброта (границе областей периодической динамики). Рассмотрите, например, границу области периода 1. Найдите аналитически границу этой области (решив систему уравнений, определяющих неподвижную точку и равенство единице модуля комплексного мультипликатора этой неподвижной точки) и покажите, что это кардиоида. Определите несколько значений параметра, соответствующих рациональной фазе мультипликатора, а также иррациональной фазе, равной «золотому среднему» $(\sqrt{5} - 1)/2$. Укажите на соответствующих им бассейнах притяжения несколько траекторий вблизи нейтральной неподвижной точки. Пронаблюдайте структуру «цветка» Ло–Фату и диска Зигеля. Обобщите Вашу программу на произвольно выбранные значения параметров и включите возможность просматривать видоизменения бассейнов притяжений и многообразий с изменением управляющего параметра в анимационном режиме.

26. Постройте диски Зигеля для других, отличных от «золотого сечения», иррациональных значений числа вращения. Для задания иррациональных чисел попробуйте воспользоваться программой для построения дерева Фарей с периодическими и случайным обходом ветвей. Попробуйте изобразить диск Зигеля для почти недифантова иррационального числа вращения (так называемый «монстр Лиувилля»), например, $1/(3+1/(10+1/(200000)+1/...))$.

27. Постройте кольцо Арнольда–Эрмана для рационального отображения из задачи 23 при $a = 4$, параметр λ подберите так, чтобы число вращения равнялось «золотому среднему». Найдите неподвижные точки этого отображения и исследуйте их на устойчивость. Определите все три экстремума отображения и покажите, что один из них соответствует сверхпритягивающей неподвижной точке, а два других определяют фрактальные границы кольца.

28. Исследуйте возможности реализации режима перемежаемости вблизи точек множества Мандельброта с мультипликатором $+1$. Заметьте, что

в отличие от действительного логистического отображения, кроме критического значения параметра, соответствующего равенству $+1$ мультипликатора неподвижной точки (в качестве характерной длительности ламинарной фазы будем использовать время убегания на бесконечность) в комплексной плоскости возможно аналогичное поведение вблизи точки рождения «лепестка» периода 2 (мультипликатор цикла 2 в этой точке также равен $+1$, и возможно наблюдение «коридора» убегания на бесконечность при выходе параметра в комплексную область). Воспроизведите задачу Болла, состоящую в расчете глубины впадины большой кардиоиды периода 1 и толщины перешейка между кардиоидой и областью периода 2 множества Мандельброта в зависимости от точности построения, то есть от количества итераций. Получите универсальные зависимости длительности ламинарной фазы (времени убегания на бесконечность N) от расстояния до границы области периодического поведения ε :

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon} = \pi$ в точке $\lambda = 0.25 + \varepsilon$,
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon)\varepsilon = \pi$ в точке $\lambda = -0.75 + i\varepsilon$.

Довольно наглядно это можно сделать, если выводить на экран значения времени убегания на бесконечность в рассматриваемых точках с каждый раз уменьшающимся в 10 раз расстоянием до критической точки ε . Пронаблюдайте удивившее Болла возникновение числа π и возможность получения этого числа с большой точностью. Получите эти зависимости аналитически, решая дифференциальное уравнение, дискретным аналогом которого является квадратичное комплексное отображение (или дважды проитерированное отображение во втором случае).

29. Используя известные критические индексы (см. таблицу) для сценариев перехода к хаосу через последовательности увеличения периода в N раз, характерных для комплексных аналитических отображений, продемонстрируйте скейлинговые свойства множества Мандельброта на плоскости параметра комплексного отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$, а также скейлинг множества Жюлиа на фазовой плоскости. Обратите внимание, что скейлинговые константы являются комплексными величинами (кроме случая критической точки Фейгенбаума).

N	λ_c	α	δ
2	1.40115	-2.50291	4.66920
3	0.02364+0.78366 i	-2.09692+2.35828 i	4.60022-8.98122 i
4	-0.30981+0.49473 i	-1.131476+3.26001 i	-0.85266-18.10972 i
5	-0.37703+0.31173 i	-0.37996+3.55391 i	-9.51971-26.37146 i

30. Постройте непосредственно множество Жюлиа комплексного квадратичного отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ как границу бассейна притяжения с

помощью итерирования в обратном времени $z_{n1,2} = \pm\sqrt{\lambda - z_{n+1}}$. Воспользуйтесь одной из следующих методик.

1) Производите обратные итерации и накапливайте значения переменной (их количество будет возрастать в геометрической прогрессии как 2^n и потребует создания большого массива данных) отмечая их на фазовой плоскости.

2) Аппроксимируйте множество Жюли совокупностью неустойчивых циклов всевозможных периодов, которые, как известно, всюду плотно распределены на множестве Жюлиа. Для поиска неустойчивого цикла периода N достаточно при обратных итерациях на каждом шаге выбирать одно решение z_{n1} или z_{n2} , но так, чтобы последовательность этих выборов была циклической с периодом равным N (например при использовании последовательности '112112...' или '121121...' обратная орбита сойдется к циклу 3). Продумайте методику автоматического перебора всех возможных последовательностей с фиксированным периодом.

3) Производите выбор решения на каждом шаге дискретного времени случайным образом. Это будет соответствовать неустойчивому циклу бесконечно большого периода.

31. Используя программу (задача 2) для расчета емкости фрактальных объектов на плоскости, рассчитайте размерность множеств Жюлиа отображения $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ для нескольких характерных значений параметра, таких, чтобы множество Жюлиа представляло собой: 1) связанное множество (значения параметра внутри «кактуса» Мандельброта); 2) пыль Фату (параметр вне множества Мандельброта); 3) дендрит (в точках Мизюревича, например $\lambda = i$). Множество Жюлиа получите с помощью обратного итерирования (предыдущая задача). Для малых по модулю значений параметра проведите сравнение полученных результатов с аналитической оценкой Хаусдорфовой размерности $D_H = 1 + |\lambda|^2 / (4 \ln 2)$.

32. Рассчитайте так называемую скорость убегания для множеств Жюлиа. Она характеризует не только геометрические фрактальные свойства множества Жюлиа, но и отражает его динамические характеристики, к тому же очень проста для численного моделирования. Методика расчета состоит в следующем. На фазовую плоскость налагается облако начальных точек, полностью покрывающее множество Жюлиа и ограниченную им область притяжения (например, можно взять облако квадратной или круглой формы с центром в нуле и диаметром 4). Далее точки этого облака итерируются в прямом времени, при этом часть из них будет постепенно убегать на бесконечность. Количество точек, не покинувших область Γ , отвечающую исходному облаку, будет уменьшаться по степенному закону $N_n \sim q^{-n}$, где величина q и есть скорость убегания. Рассчитайте ее для различных типов множеств Жюлиа.

33. Постройте карту старшего ляпуновского показателя для комплексного квадратичного отображения со слабой неаналитической добавкой $z_{n+1} = \lambda - z_n^2 + \varepsilon z_n^*$, ($\varepsilon \ll 1$) и сравните ее с картой ляпуновского показателя для аналитического отображения при $\varepsilon = 0$. Постройте ряд увеличенных фрагментов вблизи различных бифуркационных точек и наблюдайте появление областей квазипериодичности, разрушение «лепестков» множества Мандельброта и преобразование их в языки Арнольда при введении неаналитичности (то есть при переходе к двумерным отображениям общего вида). Опишите бифуркационную структуру этих языков.

34. Сделайте Интернет–обзор по истории открытия и приложениям в различных областях науки обобщенных комплексных чисел (двух- и многокомпонентных).

35. Попробуйте изобразить двумерные сечения множества Мандельброта для квадратичного отображения, переменная и параметр которого являются кватернионами (четырёхкомпонентными числами) и октавами (восьмикомпонентными числами). Продумайте возможность использования трехмерной графики или анимации для лучшей визуализации структуры обобщенного таким образом на многомерный случай множества Мандельброта.

36. На картах динамических режимов получите изображения обобщенных множеств Мандельброта для квадратичного отображения, переменная и параметр которого являются двухкомпонентными числами, определяющимися как $z = x + iy$, где $i^2 = a + ib$. Рассмотрите три класса чисел:

- гиперболические ($a + b^2/4 > 0$);
- параболические ($a + b^2/4 = 0$);
- эллиптические ($a + b^2/4 < 0$).

Объясните смысл величины $\Delta = a + b^2/4$ с точки зрения существования делителей нуля в рассматриваемых обобщенных системах двухкомпонентных чисел. Убедитесь, что характерная структура множества Мандельброта реализуется лишь для случая эллиптических чисел.

37. Используя замену переменных $x = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, $y = \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z$ сведите комплексное квадратичное отображение $z_{n+1} = \lambda - z_n^2$ к связанным логистическим отображениям

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda_1 - x_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n)^2, \\y_{n+1} &= \lambda_2 - y_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n)^2,\end{aligned}$$

где $\varepsilon = 0.5$. Покажите, что другие значения параметра связи соответствуют исходному квадратичному отображению, переменная и параметр которого являются двухкомпонентными числами. Постройте карты динамических режимов на плоскости (λ_1, λ_2) при различных значениях ε . Аналогичным

образом получите связанные отображения Эно, связанные кубические отображения (функция связи, очевидно, в этом случае будет отличаться).

38. Постройте множество Мандельброта и множества Жюлиа для связанных квадратичных осцилляторов

$$\ddot{x}_{1,2} + 0.2\dot{x}_{1,2} + \lambda_{1,2} - x_{1,2}^2 + 0.5(x_{2,1} - x_{1,2})^2 = 0.23 \cos t.$$

39. Для множеств Жюлиа отображения $z_{n+1} = f(z_n) = \lambda - z_n^2$ в соответствии с аналитической формулой

$$U(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \ln |f^n(z)|$$

рассчитайте потенциал U в окружающей фрактальное множество области. Проиллюстрируйте результаты путем градиентной раскраски в зависимости от абсолютной величины потенциала. Рассмотрите несколько примеров множеств Жюлиа для различных значений параметра (односвязные наполненные множества, дендриты). Объясните, каким образом можно применить данную модель для описания некоторых физических процессов (электростатический потенциал заряженного проводника с фрактальной поверхностью, диффузионное поле фрактального кластера, образованного ограниченной диффузией агрегации)?

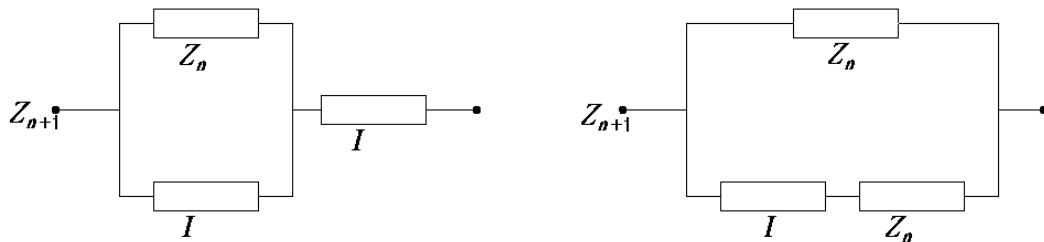
40. Исследуйте фазовое пространство для отображения

$$z' = R(z) = \left(\frac{z^2 + q - 1}{2z + q - 2} \right)^2,$$

являющегося, как известно из теории фазовых переходов, преобразованием перенормировки переменной температуры для иерархической решетки “diamond-like lattice”. В соответствии с теорией Янга–Ли обобщите это преобразование на случай комплексной переменной z (комплексной температуры). Для различных значений действительного параметра q постройте множества Жюлиа на фазовой плоскости, одновременно размечая различными цветами бассейны притяжения различных аттракторов (их может быть несколько, и их количество может меняться). Пронаблюдайте фрактальные фазовые границы. Укажите точки реальных фазовых переходов. Определите момент появления нового фазового состояния с ростом параметра. Постройте множество Мандельброта на плоскости уже комплексного параметра исследуемого отображения. Проинтерпретируйте его с точки зрения фазовых переходов.

41. Для двух бесконечных иерархических цепочек импедансов, изображенных на приведенном ниже рисунке, получите дискретные отображения, выражающие комплексное сопротивление фрагмента $(n+1)$ -го уровня от сопротивления фрагмента n -го уровня построения. Цепочка содержит следующие элементы. Элемент электрической схемы, обозначенный как I , является емкостью, с импедансом $I=i/\omega C$ на частоте ω . Начальный элемент иерархической структуры состоит из индуктивности L и активного

сопротивления R и имеет импеданс $Z_0 = -i\omega L + R$. При получении отображения для удобства перейдите к безразмерным переменным $z_n = \omega CZ_n$, $z_0 = -iLC\omega^2 + RC\omega$. Постройте численно бассейны притяжения на фазовой плоскости начальных импедансов z_0 для полученных отображений. Исследуйте ее путем поиска аттракторов и разметки динамического расстояния (времени схождения) точек бассейнов притяжения до этих аттракторов. Что интересного можно узнать о свойствах изучаемых электрических цепочек?



42. Запрограммируйте рекурсивную процедуру метода Ньютона (метода касательных) для поиска корней комплексного уравнения $z^3 - 1 = 0$. Постройте бассейны притяжения аттракторов отображения (то есть корней исходного уравнения), соответствующего этой рекурсивной процедуре. Убедитесь, что граница между областями начальных приближений, сходящихся по методу Ньютона к искомым корням, является фрактальной.