

Приближение суммами сдвигов одной функции на компактной абелевой группе¹

Н. А. Дюжина (Москва, Россия)

natasha17954@yandex.ru

Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Получен следующий результат: действительная функция на G , суммы сдвигов которой плотны по норме L_2 в соответствующем действительном пространстве функций с нулевым средним, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.

Ключевые слова: плотность, суммы сдвигов, компактные группы, пространство L_2 .

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис».

Approximation by sums of shifts of a single function on a compact abelian group¹

N. A. Dyuzhina (Moscow, Russia)

natasha17954@yandex.ru

Let G be a nontrivial compact abelian group. We obtained that there exists a real function on G whose sums of shifts are dense with respect to L_2 norm in the corresponding real space of functions with zero mean if and only if G is connected and has a countable dual group.

Keywords: density, sums of shifts, compact groups, L_2 space.

Acknowledgements: This work was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation "BASIS".

Существует функция, определенная на окружности \mathbb{T} , суммы сдвигов которой плотны в действительном пространстве $L_p^0(\mathbb{T})$ функций из $L_p(\mathbb{T})$ с нулевым средним ($1 \leq p < \infty$) [1]. В действительном пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ двусторонних последовательностей существует вектор, суммы сдвигов которого плотны во всех пространствах $l_p(\mathbb{Z})$, $2 \leq p < \infty$ [2]. Существует функция, определенная на действительной оси \mathbb{R} , суммы сдвигов которой плотны во всех действительных пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $2 \leq p < \infty$ [3]. В работе [4] эти результаты перенесены соответственно на случай тора \mathbb{T}^d , решетки \mathbb{Z}^d и пространства \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$. Естественным образом возникает задача, ранее сформулированная в [5].

¹Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

¹This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Пусть G — локально компактная абелева группа с мерой Хаара m . Существует ли функция f , определенная на этой группе, для которой суммы

$$\sum_{k=1}^n f(g + g_k), \quad g_k \in G, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

ее сдвигов: а) плотны в действительном пространстве $L_2(G)$ (в случае некомпактной группы G); б) плотны в действительном пространстве

$$L_2^0(G) = \left\{ h \in L_2(G) : \int_G h(g) dm(g) = 0 \right\}$$

(в случае компактной группы G)?

Следующий результат дает исчерпывающий ответ на вопрос б) задачи.

Теорема. Пусть G — нетривиальная компактная абелева группа. Функция $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, для которой суммы (1) сдвигов плотны в действительном пространстве $L_2^0(G)$, существует тогда и только тогда, когда G связная и имеет счетную группу характеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бородин П. А. Приближение суммами сдвигов одной функции на окружности // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81, № 6. С. 23–37.
- [2] Бородин П. А. Плотность сумм сдвигов одного вектора в пространствах последовательностей // Труды МИАН. 2018. Т. 303, № 6. С. 39–44.
- [3] Borodin P. A., Konyagin S. V. Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a single function on the line // Anal. Math., 2018. Vol. 44, № 2. P. 163–183.
- [4] Дюжина Н. А. Многомерные аналоги теорем о плотности сумм сдвигов одной функции // Матем. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 775–779.
- [5] Бородин П. А., Шкляев К. С. Плотность квантованных приближений // УМН. 2023. Т. 78, № 5(473). С. 3–64.