УДК 517.518

# Приближение полиномами Хаара и Уолша в весовых обобщенных гранд пространствах Лебега[1]

**Б. И. Голубов (Долгопрудный, Россия), С.С. Волосивец (Саратов, Россия)**

golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

В настоящей статье мы приводим прямые теоремы приближения полиномами Хаара и Уолша в весовом гранд пространстве Лебега. Также изучается порядок приближения средними Бореля, Эйлера, Зигмунда-Рисса и Нерлунда рядов Фурье-Уолша-Пэли в упомянутом выше пространстве.

*Ключевые слова:* Система Хаара, весовое гранд пространство Лебега, прямая теорема приближения; линейные средние ряда Фурье-Уолша.

# Approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue spaces[1]

**B. I. Golubov (Dolgoprudnyi, Russia), S. S. Volosivets (Saratov, Russia)**

golubovboris1939@gmail.com, volosivetsss@mail.ru

In the paper we give direct theorems on approximation by Haar and Walsh polynomials in weighted generalized grand Lebesgue space. Also the degree of approximation by Borel, Euler, Riesz-Zygmund and Nörlund linear means of Walsh-Paley-Fourier series are treated in the above cited space.

*Keywords:* Haar system, weighted grand Lebesgue space, direct approximation theorem, linear means of Walsh-Fourier series.

## Введение

Пусть $v : [0,1] \to \mathbb{R}_+ = [0. + \infty)$ является весовой функцией, т.е. интегрируема по Лебегу и п.в. положительна на $[0,1]$. Обычное весовое пространство Лебега $L^p_v[0,1]$, $1 \le p < \infty$, состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций $f$, таких что $\|f\|^p_{p,v} = \int_0^1 |f(x)|^p v(x)\,dx < \infty$. Для $v \equiv 1$ мы будем писать $\|f\|_p$ вместо $\|f\|_{p,v}$.

Для $1 < p < \infty$ и $\theta > 0$ обозначим через $L^{p),\theta}_v[0,1]$ весовое обобщенное гранд пространство Лебега, состоящее из всех действительнозначных измеримых на $[0,1]$ функций $f$, таких что $\|f\|_{p),\theta,v} = \sup\limits_{0<\varepsilon<p-1} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)}\|f\|_{p-\varepsilon,v} < \infty$.

Эти пространства введены для $\theta = 1$ и $v(x) \equiv 1$ Т.Иванцом и К.Сбордоне [1] и позже для $\theta > 1$ и $v(x) \equiv 1$ Л.Греко, Т.Иванцом и К.Сбордоне в [2]. Легко видеть, что $L^p[0,1] \subset L^{p)}[0,1] \subset L^{p-\varepsilon}[0,1]$ при $p > 1$ и $0 < \varepsilon < p-1$. Поскольку $L^p[0,1]$ не является плотным в $L^{p)}[0,1]$ (см., например, [3]), мы будем рассматривать подпространство $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$, которое является замыканием $L_v^p[0,1]$ в $L_v^{p),\theta}[0,1]$ и снабжено нормой $\|\cdot\|_{p),\theta,v}$. К.Сбордоне [4] установил, что $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\lim_{\varepsilon\to 0+0} \varepsilon^{\theta/(p-\varepsilon)}\|f\|_{p-\varepsilon,v} = 0$.

Будем говорить, что весовая функция $v$ принадлежит классу Б.Макенхаупта $A_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, если

$$\sup_I |I|^{-1}\int_I v(x)\,dx \left(|I|^{-1}\int_I (v(x))^{-1/(p-1)}\,dx\right)^{p-1} = [v]_{A_p[0,1]} < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем интервалам $I$ из отрезка $[0,1]$ и $|I|$ означает меру Лебега $I$ (см. [5]).

Для $k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,\dots\}$ положим $I_j^k = [(j-1)/2^k, j/2^k)$, $j \in [1,2^k]\cap\mathbb{Z}$. Напомним, что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ задается следующим образом: $\chi_1(x) \equiv 1$ и, для $n = 2^k + j$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z}\cap[1,2^k]$,

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, x \in I_{2j-1}^{k+1}; \\ -2^{k/2}, x \in I_{2j}^{k+1}; \\ 0, x \notin I_j^k. \end{cases}$$

Система $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^n$ ортогональна на $[0,1)$ и полна в $L^1[0,1)$ (см. [6, гл. 3, раздел 1]). Для $f \in L^1[0,1]$ и $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ определим коэффициенты Фурье-Хаара и частные суммы Фурье-Хаара $a_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt$, $Q_n(f)(x) = \sum_{k=1}^n a_k(f)\chi_k(x)$.

Наилучшее приближение полиномами по системе Хаара для $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$ определяется равенством $E_n(f)_{p),\theta,v} = \inf\left\{\|f - \sum_{k=1}^n a_k\chi_k\|_{p),\theta,v} : a_k \in \mathbb{R}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определим теперь систему Уолша-Пэли. Пусть $r_0(x) = 1$ для $x \in [0,1/2)$, $r_0(x) = -1$ для $x \in [1/2,1)$ и $r_0(x)$ продолжается на $\mathbb{R}_+$ 1-периодически. Тогда $r_n(x) = r_0(2^n x)$, $n \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$. Для $n \in \mathbb{Z}_+$ с двоичным разложением $n = \sum_{i=0}^{k(n)} \varepsilon_i 2^i$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$, мы полагаем $w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$. Система Уолша-Пэли $\{w_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является ортонормированной и полной в $L^1[0,1]$ (см. [7, гл. 1,2]). Для $f \in L^1[0,1]$ зададим коэффициенты Фурье-Уолша-Пэли и частичные суммы Фурье-Уолша-Пэли следующим образом: $\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(t)w_k(t)\,dt$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)w_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим наилучшее приближение полиномами Уолша-Пэли $E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} = \inf\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_k\right\|_{p),\theta,v} : a_k \in \mathbb{R}\right\}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$.

Для $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$, продолженной на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ 1-периодически, определим рассмотрим средние Стеклова $s_h(f)(x) = h^{-1}\int_0^h f(x+t)\,dt$, $h > 0$, и модуль непрерывности $\Omega(f,\delta)_{p),\theta,v} = \sup\{\|f - s_h(f)\|_{p),\theta,v} : 0 \le h \le \delta\}$, $\quad \delta \in [0,1]$.

Будем писать $f \in W^1 L_v^{p),\theta}[0,1]$, если $f$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, 1-периодична и $f' \in L_v^{p),\theta}[0,1]$.

Теперь определим некоторые линейные средние рядов Фурье-Уолша-Пэли, такие, как средние Бореля $B_r(f)(x) = e^{-r}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!} S_{k+1}(f)(x)$, $r \ge 1$, средние Эйлера $e_n^q(f)(x) = (1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$, средние Зигмунда-Рисса $\sigma_n^{(r)}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)\widehat{f}(k)w_k(x)$, $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем считать, что неубывающая и непрерывная на $[0,1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу $\Phi$, если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари-Стечкина $BS_\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\omega(1/k) = O(n^\alpha \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Это определение и его эквивалентные формы см. в [8, лемма 3].

Целью работы является получение прямых теорем приближения полиномами по системам Хаара и Уолша и оценок сверху приближений средними Бореля, Эйлера и Зигмунда-Рисса рядов Фурье-Уолша-Пэли для функций из $\mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$. Отметим, что приближения тригонометрическими полиномами в подобных пространствах изучались Д.М.Исрафиловым и А.Тестичи в [9], а также В.М.Кокилашвили и А.Н.Месхи в [10].

## Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in W^1 L_v^{p),\theta}[0,1]$. *Тогда*

$$E_n(f)_{p),\theta,v} \le \|f - Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \le Cn^{-1}\|f'\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le \|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \le Cn^{-1}\|f'\|_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$.

*Тогда*

$$E_n(f)_{p),\theta,v} \le \|f - Q_n(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$E_n^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le \|f - S_n(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$. *Тогда*

$$\|f - B_r(f)\|_{p),\theta,v} \le C_1 e^{-r} \sum_{k=0}^{[r]} \frac{r^k}{k!} E_{k+1}^{wp}(f)_{p),\theta,v} \le C_2\Omega(f, 1/r)_{p),\theta,v}, \quad r \ge 1,$$

*где* $[r]$ *— целая часть* $r$ *и* $C_1$, $C_2$ *— некоторые постоянные.*

**Теорема 4.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1)$, $t > 0$. *Тогда*

$$\|f - e_n^t(f)\|_{p),\theta,v} \le C\Omega(f, 1/n)_{p),\theta,v}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Теорема 5.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $v \in A_p[0,1]$, $f \in \mathcal{L}_v^{p),\theta}[0,1]$, $\omega \in B_1$, $r \ge 1$ *и* $\Omega(f,t)_{p),\theta,v} = O(\omega(t))$, $t \in [0,1]$. *Тогда*

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{p),\theta,v} \le C\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Константы в этих теоремах не зависят от номера $n$ и функции $f$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Iwaniec T., Sbordone C.* On integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Ration. Mech. Anal. 1992. V. 119, № 2. P. 129–143.

[2] *Greco L.,Iwaniec T., Sbordone C.* Inverting the $p$-harmonic operator // Manuscr. Math. 1997. V. 92, № 2. P. 249–258.

[3] *D'Onofrio L., Sbordone C., Schiattarella R.* Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs // J. Fixed Point Theory Appl. 2013. V. 13, № 2. P. 309–340.

[4] *Sbordone C.* New estimates for div-curl products and very weak solutions of PDEs // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1997. V. 25, № 3-4. P. 739–756.

[5] *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 165. P. 207–226.

[6] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : Изд-во АФЦ, 1999. 560 с.

[7] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[8] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.

[9] *Israfilov D. M., Testici A.* Approximation in weighted generalized grand Lebesgue spaces // Colloq. Math. 2016. V. 143, № 1. P. 113–126.

[10] *Кокилашвили В. М., Месхи А. Н.* Весовая экстраполяция в пространствах Иванеца-Сбордоне. Приложения к интегральным операторам и теории приближений // Труды МИРАН. 2016. Т. 293. С. 167–192.