УДК 517.518+517.983

Приближение операторов дифференцирования в пространствах Лебега на оси и родственные задачи в преддуальных пространствах для пространств мультипликаторов[1]

В. В. Арестов (Екатеринбург, Россия)

vitalii.arestov@urfu.ru

Будут обсуждаться свойства преддуальных пространств для пространств мультипликаторов пары пространств Лебега на $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, и их применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении в пространствах Лебега на оси оператора дифференцирования порядка k на классе n раз $(0 \leq k < n)$ дифференцируемых функций. Будут приведены новые случаи решения задачи Стечкина и двусторонние конструктивные оценки значения задачи при конкретных значениях параметров.

Ключевые слова: Пространства мультипликаторов, преддуальное пространство, оператор дифференцирования, задача Стечкина, неравенство Колмогорова.

Approximation of differentiation operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in predual spaces of spaces of multiplier[1]

V. V. Arestov (Ekaterinburg, Russia)

vitalii.arestov@urfu.ru

We will discuss the properties of predual spaces of the spaces of multipliers for a pair of Lebesgue spaces in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, and their application to Stechkin's problem on the best approximation in Lebesgue spaces on the axis of the differentiation operator of order k on the class of n times $(0 \leq k < n)$ differentiable functions. New cases of solving Stechkin's problem and two-sided constructive estimates of the value of the problem for particular values of the parameters will be given.

Keywords: spaces of multipliers, predual space, differentiation operator, Stechkin problem, Kolmogorov inequality.

Преддуальное пространство для пространства (p, q)-мультипликаторов

Ниже используются стандартные обозначения классических функциональных комплексных пространств: $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq \gamma < \infty$ — пространство Лебега измеримых на $\mathbb{R}^m$ функций x, у которых $|x|^\gamma$ суммируем

[1]Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1]This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

© Арестов В. В., 2024

на $\mathbb{R}^m$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}^m)$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$, $C = C(\mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}^m$ и $C_0 = C_0(\mathbb{R}^m)$ — подпространство функций из C, имеющих нулевой предел на бесконечности.

Пусть $\mathcal{S}$ есть пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^m$, а $\mathcal{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций, см., например, [1]. Значение функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ на элементе $x \in \mathcal{S}$ будем обозначать через $\langle \theta, x\rangle$. Пространство $\mathcal{S}'$ содержит множество $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ функций x, измеримых, локально суммируемых на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющих условию $\int (1+|t|)^d |x(t)| dt < \infty$ с некоторым $d = d(x) \in \mathbb{R}$; здесь и ниже в интегралах по $\mathbb{R}^m$ множество интегрирования не указывается. Функции $x \in \mathcal{L}$ сопоставляется функционал $x \in \mathcal{S}'$ по формуле $\langle x, \phi\rangle = \int x(t)\phi(t)dt$, $\phi \in \mathcal{S}$.

Преобразование Фурье функций (по крайней мере, из пространства $L = L_1(\mathbb{R}^m)$) определим формулой $\widehat{x}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} x(\eta)\, d\eta$; обратное преобразование Фурье будем обозначать символом $\check{x}$. Преобразование Фурье $\widehat{\theta}$ функционала $\theta \in \mathcal{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathcal{S}'$, действующий по формуле $\langle \widehat{\theta}, x\rangle = \langle \theta, \widehat{x}\rangle$, $x \in \mathcal{S}$.

Для $1 \le p, q \le \infty$ обозначим через $\mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ множество линейных ограниченных операторов из $L_p = L_p(\mathbb{R}^m)$ в $L_q = L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно (любого) сдвига. Свойствам инвариантных ограниченных операторов посвящены обширные исследования (см. [1–3] и приведенную там библиографию). Так известно, что если $p > q$, то [2, теорема 1.1] при $p < \infty$ множество $\mathcal{T}_{p,q}$ состоит лишь из оператора $T \equiv 0$, а при $p = \infty$ сужение оператора $T \in \mathcal{T}_{\infty,q}$ на множество $(L_\infty)_0$ функций из L_∞, имеющих нулевой предел на бесконечности, есть нулевой оператор. В связи с этим ниже будет предполагаться, что $1 \le p \le q \le \infty$.

A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry (1967) в совместной работе [4] доказали, что при $1 \le p \le q < \infty$ пространство $\mathcal{T}_{p,q}(G)$ линейных ограниченных операторов из $L_p(G)$ в $L_q(G)$ на локально компактной абелевой группе G, инвариантных относительно сдвига (точнее, операции группы), является сопряженным пространством для конструктивно описанного ими функционального пространства $A_{p,q}(G)$. Двумя годами ранее (1965) A. Figà-Talamanca [5] получил подобный результат для случая $1 < q = p < \infty$. Относительно пары линейных нормированных пространств X, Y со свойством, что Y является сопряженным для X, т. е. $X^* = Y$, говорят также, что пространство X является преддуальным для Y. В этой терминологии пространство $A_{p,q}(G)$ является преддуальным для пространства $\mathcal{T}_{p,q}(G)$.

Результаты A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry справедливы, в частности, для пространств $\mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ линейных ограниченных операторов из пространства $L_p(\mathbb{R}^m)$ в пространство $L_q(\mathbb{R}^m)$, инвариантных относительно группы сдвигов.

Известно (см. [2, теорема 1.2] или [1, гл. I, теорема 3.16]), что если $q \geq p$, то на $\mathcal{S}$ оператор $T \in \mathcal{T}_{p,q} = \mathcal{T}_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид свертки $Tx = \theta * x$, $x \in \mathcal{S}$, с элементом $\theta = \theta_T \in \mathcal{S}'$. Множество $M_{p,q} = \{\theta_T \colon T \in \mathcal{T}_{p,q}\} \subset \mathcal{S}'$ является банаховым пространством относительно нормы $\|\theta_T\|_{M_{p,q}} = \|T\|_{L_p \to L_q}$. Элементы $\theta \in M_{p,q}$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, называют (p,q)-мультипликаторами.

Конструктивное описание мультипликаторов известно лишь в отдельных случаях. Известна структура пространств $M(2,2)$ и $M(p,\infty) = M(1,p')$ (см., например, [2, § 1.2], [1, гл. 1, § 3]); а именно, справедливы равенства (вместе с равенством норм элементов)

$$M_{2,2} = \widehat{L}_\infty = \{\widehat{\theta} \colon \theta \in L_\infty\},$$

$$M_{p,\infty} = M_{1,p'} = L_{p'} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$M_{\infty,\infty} = M_{1,1} = V;$$

здесь $V = V(\mathbb{R}^m)$ есть пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $\mathbb{R}^m$.

При $1 \leq p \leq q \leq \infty$ определим на множестве $\mathcal{S}$ функционал

$$\|\phi\|_{p,q} = \sup\{|\langle \theta, \phi \rangle| \colon \theta \in M_{p,q},\ \|\theta\|_{M_{p,q}} \leq 1\}, \quad \phi \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

При всех $1 \leq p \leq q \leq \infty$ функционал (1) на множестве $\mathcal{S}$ конечен и является нормой.

При $1 \leq p \leq q \leq \infty$ обозначим через $F_{p,q} = F_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ пополнение пространства $\mathcal{S}$ относительно нормы (1). Пространство $F_{p,q}$ описано в других терминах в сравнении с пространством $A_{p,q} = A_{p,q}(\mathbb{R}^m)$ A. Figà-Talamanca и G. I. Gaudry [4], однако пространство $F_{p,q}$ также является преддуальным для пространства мультипликаторов $M_{p,q}$, т. е. для любых $1 \leq p \leq q \leq \infty$ имеет место равенство

$$F^*_{p,q} = M_{p,q}. \tag{2}$$

Конструкция пространства $F_p = F_{p,p}$ и доказательство свойства (2) были даны в работах автора [6] и [7] соответственно при $q = p$ и в общем случае $p \leq q$.

Приведем несколько свойств пространств $F_{p,q}$ для конкретных значений параметров.

Теорема 1. *Пространство $F_{p,q}$ обладает следующими свойствами.*

1. *При* $q = \infty$ $(p = 1)$

$$F(p,\infty) = F(1,p') = L_p, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$F(\infty,\infty) = F(1,1) = C_0.$$

2. *При* $q = p = 2$

$$F_{2,2} = \check{L} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L\}, \quad \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2,2}.$$

3. *Пусть* $q = p$ *и* $\overline{p} = \max\{p, p'\}$. *Пространство* $F_{p,p}$ *по* $\overline{p}$ *не убывает, а точнее, если* $2 \le \overline{p}_1 \le \overline{p}_2 \le \infty$, *то*

$$F_{p_1,p_1} \subset F_{p_2,p_2} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p_2,p_2}} \le \|f\|_{F_{p_1,p_1}}, \quad f \in F_{p_1,p_1},$$

в частности, при всех значениях p, $1 \le p \le \infty$,

$$F_{p,p} \subset C_0 \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \ge \|f\|_{C_0}, \quad f \in F_{p.p},$$
$$F_{2,2} \subset F_{p,p} \quad \text{и} \quad \|f\|_{F_{p,p}} \le \|f\|_{F_{2,2}} = \|\widehat{f}\,\|_L, \quad f \in F_{2.2}.$$

Пространства $F_{p,q}$ появились в исследованиях автора задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными линейными операторами в пространствах Лебега на оси (см. историю в [7]).

Применение в задаче Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования

Пусть p, q, r, s — параметры, удовлетворяющие ограничениям $1 \le p, q, r, s \le \infty$. Для целого $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,p}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. В пространстве $W^n_{r,p}$ выделим класс $Q^n_{r,p} = \{f \in W^n_{r,p} \colon \|f^{(n)}\|_{L_p} \le 1\}$. Обозначим через $\mathcal{B}(L_r, L_s)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_s, а через $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$ при $N > 0$ — множество операторов $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_s} \le N$. Пусть $0 \le k < n$ — целые, причем $k > 0$, если $r = s$. Для оператора $T \in \mathcal{B}(L_r, L_s)$ положим

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\}.$$

При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{B}(N; L_r, L_s)\} \qquad (3)$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k порядка k на классе $Q^n_{r,p}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{B}(N; L_r, L_s)$. Задача Стечкина состоит в вычислении величины (3) и экстремального оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань; см. [8] и обзор исследований в [9] и [10].

Наиболее полно исследована задача Стечкина (3) в трехпараметрическом варианте, т. е. при $s = q$. В этом случае используется оценка снизу Стечкина величины наилучшего приближения (3) через наилучшую константу в неравенстве Колмогорова между нормами Лебега функции и ее производных [9]. В четырехпараметрическом случае, для s и q, не связанных между собой, в исследовании задачи Стечкина важное значение имеет свойство инвариантности задачи (3) относительно сдвига. Именно это свойство приводит к теореме 2, см. библиографию в [10].

Пусть $K = K_{n,k}(r, s; p, q)$ есть наилучшая константа в неравенстве

$$\|x^{(k)}\|_C \le K\|x\|^{\alpha}_{r,s}\|x^{(n)}\|^{1-\alpha}_{p,q}, \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{n - k + 1/q - 1/p}{n + 1/q - 1/p + 1/r - 1/s}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Теорема 2. *Если $s \ge r \ge 1$, $q \ge p > 1$, причем $s > r$ при $k = 0$, то для любого значения $N > 0$ имеет место равенство*

$$E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}K^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta},$$

где K — наименьшая константа в (4).

Теорема 2 позволила автору получить точное или близкое к точному решение задачи Стечкина в ряде новых случаев, см. [10] и приведенную там библиографию. Так имеет место такое утверждение.

Для параметров $1 \le r, p \le \infty$ положим $\overline{r} = \max\{r, r'\}$, $\overline{p} = \max\{p, p'\}$. В утверждениях теоремы 3 будет присутствовать условие

$$\overline{r}_1 \le \overline{r}_2, \quad \overline{p}_1 \le \overline{p}_2, \tag{5}$$

на две пары параметров r_1, r_2 и p_1, p_2.

Теорема 3. *При $1 \le r \le \infty$, $1 < p \le \infty$, $0 < k < n$ для величины $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$ справедливы следующие два утверждения.*

1. *При любом $N > 0$ значение $E_{n,k}(N; r, r; p, p)$ задачи Стечкина не убывает по параметрам $\overline{r}, \overline{p}$, а точнее, если две пары параметров r_1, r_2 и p_1, p_2 удовлетворяют условиям* (5), *то имеет место неравенство*

$$E_{n,k}(r_1, r_1; p_1, p_1) \le E_{n,k}(r_2, r_2; p_2, p_2).$$

2. *При любом* $N > 0$ *для значений задачи Стечкина справедливы двусторонние оценки*

$$\beta\alpha^{\alpha/\beta}N^{-\alpha/\beta} \le E_{n,k}(N; r, r; p, p) \le \beta\alpha^{\alpha/\beta}\,(\pi/2)^{1/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

где $\alpha = (n-k)/n,\ \beta = k/n.$

Данное сообщение продолжает тематику сообщения автора на предыдущей, 21-й международной Саратовской зимней школе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 333 с.

[2] *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М. : Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.

[3] *Larsen R.* An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc. : Springer, 1971. 282 p.

[4] *Figà-Talamanca A., Gaudry G. I.* Density and representation theorems for multipliers of type (p, q) // J. Australian Math. Soc. 1967. Vol. 7, № 1. P. 1–6.

[5] *Figà-Talamanca A.* Translation invariant operators in L^p // Duke. Math. J. 1965. Vol. 32. P. 495–502.

[6] *Арестов В. В.* О сопряженности пространства мультипликаторов // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 3–15.

[7] *Arestov V. V.* Predual spaces for the space of (p, q)-multipliers and their application in Stechkin's problem on approximation of differentiation operators // Anal. Math. 2023. Vol. 49, № 1. P. 43–65.

[8] *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 137–148.

[9] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.

[10] *Arestov V. V.* Approximation of differentiation operators by bounded linear operators in Lebesgue spaces on the axis and related problems in the spaces of (p, q)-multipliers and their predual // Ural Math. J. 2023. Vol. 9, № 2. P. 4–27.

[11] *Арестов В. В.* Преддуальные пространства для пространства (p, q)-мультипликаторов и их применение в задаче Стечкина о приближении операторов дифференцирования // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов : Саратовский университет, 2022. С. 33–39.