УДК 517.518

Приближение линейными средними рядов Фурье по мультипликативным системам в пространствах $S_p(\chi)$[1]

С. С. Волосивец, А. Н. Мингачев (Саратов, Россия)
VolosivetsSS@mail.ru

Даны оценки приближения средними Зигмунда-Рисса, Эйлера и Абеля-Пуассона в пространствах $S_p(\chi)$ функций f с конечной нормой, равной l^p-норме последовательности коэффициентов Фурье ($1 \le p < \infty$) по мультипликативной системе через подходящий K-функционал. Для этого K-функционала получаем прямые и обратные теоремы приближения. Также характеризуются классы Липшица, связанные с пространствами $S_p(\chi)$ и стандартным модулем непрерывности, в терминах приближения указанными выше средними.

Ключевые слова: обобщенная абсолютная сходимость, мультипликативная система, наилучшее приближение, K-функционал, прямые и обратные теоремы приближения.

Approximation by linear means of Fourier series with respect to multiplicative systems in spaces $S_p(\chi)$[1]

S. S. Volosivets, A.N.Mingachev (Saratov, Russia)
VolosivetsSS@mail.ru

We give estimates of approximation by Riesz-Zygmund, Euler and Abel-Poisson means in $S_p(\chi)$ spaces of functions f with finite norm equal to the l^p-norm of the sequence of Fourier coefficients ($1 \le p < \infty$) with respect to multiplicative system in terms of appropriate K-functional. For this K-functional instead of modulus of continuity we obtain direct and converse approximation theorems. Also we characterize Lipschitz classes connected with $S_p(\chi)$ spaces and standard modulus of continuity in terms of approximation by cited above means.

Keywords: generalized absolute convergence, multiplicative systems, best approximation, K-functional, direct and converse theorems of approximation.

Введение

Пусть $\mathbf{P}=\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Определим последовательность $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1$, $m_n = m_{n-1}p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда любое число $x \in [0, 1)$ представимо в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \ x_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1}$$

а каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \ k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Разложение (1) также однозначно, если при $x = s/m_n$, $0 < s < m_n$, $s \in \mathbb{Z}$, брать конечное число ненулевых x_j.

Для чисел $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ с разложениями (1), (2) положим по определению $\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\right)\right)$. Система функций $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликативной системой. Известно, что она ортонормирована и полна в $L^1[0,1)$ (см. [1, гл. 1,§ 1.5]). Легко видеть, что при $0 \le n < m_k$ функция $\chi_n(x)$ постоянна на $I_j^k = [(j-1)/m_k, j/m_k)$, $1 \le j \le m_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для $f \in L^1[0,1)$ коэффициенты Фурье и частичная сумма Фурье по системе $\{\chi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ задаются формулами

$$\widehat{f}(j) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_j(t)}\,dt, \ j \in \mathbb{Z}_+, \quad S_n(f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{f}(j)\chi_j(x), \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда средние Зигмунда-Рисса, Абеля-Пуассона и Эйлера ряда Фурье по мультипликативной системе вводятся следующим образом

$$\sigma_n^{(r)}(f) = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(1 - k^r/n^r)\widehat{f}(k)\chi_k, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$A_r(f)(x) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} r^k \widehat{f}(k)\chi_k(x), \quad 0 < r < 1,$$

$$e_n^{(q)}(f) = (1+q)^{-n} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k} S_{k+1}(f), \quad q > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть $\mathcal{P}_n = \{f \in L^1[0,1) : \widehat{f}(i) = 0, i \ge n\}$. Будем писать $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, если $\|f\|_{\mathcal{S}_p} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\widehat{f}(j)|^p\right)^{1/p} < \infty$. Легко видеть, что $\mathcal{S}_p(\chi)$ содержит $\mathcal{P} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$ и что $\mathcal{P}$ плотно во всех $\mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$. Следующее свойство является очевидным, но очень важным. Для $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, или для $f \in L^1[0,1)$ имеем $\|S_n(f)\|_{\mathcal{S}_p} \le \|f\|_{\mathcal{S}_p}$, $n \in \mathbb{N}$.

Также легко видеть, что $\mathcal{S}_2(\chi) = L^2[0,1)$ и известно, что $L^p[0,1) \subset \mathcal{S}_q(\chi)$ для $1 < p < 2$ и $1/p + 1/q = 1$ (см. теорему Рисса в [2, гл. II, § 4]). Другие достаточные условия для $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$ можно найти в [3, гл. 4, § 2].

Для $x, y \in [0,1)$, записанных в виде (1), будем писать $x \oplus y = z$, если $z = \sum_{i=1}^{\infty} z_i/m_i$, $z_i = x_i + y_i \pmod{p_i}$, и неверно, что z_i равны $p_i - 1$ при всех $i \ge i_0$. Тогда при фиксированном x число $x \oplus y$ определено для всех $y \in [0,1)$, кроме счетного числа (см. [1, § 1.5]).

Аналогичное $\mathcal{S}_p(\chi)$ пространство было определено для произвольной ортонормированной системы А.И.Степанцом (см. [4, гл. 11]). Определим наилучшее приближение и модуль непрерывности в пространстве $\mathcal{S}_p(\chi)$ формулами $E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \inf\{\|f - t_n\|_{\mathcal{S}_p} : t_n \in \mathcal{P}_n\}$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \sup\{\|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_{\mathcal{S}_p} : 0 \le h < 1/m_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Ясно, что $E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = \|f - S_n(f)\|_{\mathcal{S}_p}$. Отметим, что $x \oplus h$ не определено для всех пар $(x, h) \in [0,1)^2$, но для $\tau_h f(x) = f(x \oplus h)$ все коэффициенты ts $\widehat{\tau_h f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, корректно определены. Будем говорить, что $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $1 \le p < \infty$, имеет **P**-производную порядка $r > 0$ в $\mathcal{S}_p(\chi)$, если ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^r \widehat{f}(j)\chi_j$ является рядом Фурье $g \in \mathcal{S}_p(\chi)$. В этом случае пишем $g = f^{[r]}$ и $f \in W^r\mathcal{S}_p(\chi)$. Для $r > 0$ и $1 \le p < \infty$ определим K-функционал

$$K_r(f,t)_{\mathcal{S}_p} = \inf\{\|f - g\|_{\mathcal{S}_p} + t\|g^{[r]}\|_{\mathcal{S}_p} : g \in W^r\mathcal{S}_p(\chi)\}.$$

Известно, что $\chi_n(x \oplus y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, для п.в. $y \in [0,1)$, если $x \in [0,1)$ фиксировано (см. [1, § 1.5]).

Возрастающая и непрерывная на $[0,1]$ функция $\omega(t)$ принадлежит классу Φ, если $\omega(0) = 0$. Функция $\omega \in \Phi$ принадлежит классу Бари B, если $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\omega(k^{-1}) = O(\omega(n^{-1})$, $n \in \mathbb{N}$, и классу Бари-Стечкина B_α, $\alpha > 0$, если $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\omega(1/k) = O(n^\alpha \omega(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$. Эти определения и их эквивалентные формы см. в [5, леммы 2 и 3].

Основные результаты

Теорема 1 является неполным аналогом неравенства А.В.Ефимова [1, § 10.5].

Теорема 1. *Пусть $1 \le p < \infty$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$2^{-1}\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} \le E_{m_n}(f)_{\mathcal{S}_p} = \|f - S_{m_n}(f)\|_{\mathcal{S}_p} \le C\left(\sum_{k=n}^{\infty} \omega_k^p(f)_{\mathcal{S}_p}\right)^{1/p}.$$

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < \infty$, $f \in L^1[0,1)$, $r > 0$, $\omega \in B$. Тогда условия*

$$\|S_n^{[r]}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(n^r \omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и

$$\|f - \sigma_n^{(r)}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

равносильны. Если имеет место (3) или (4), то справедливо соотношение

$$\omega_n(f)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Если же $\omega \in B \cap B_r$, то условия (3), (4) т (5) равносильны.

Следствие 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$, $\omega \in B \cap B_r$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3) *и*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1})), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

равносильны.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in B \cap B_r$ *для некоторого* $r > 0$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3), (5) *и* $\|f - e_{n-1}^{(q)}(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, *равносильны.*

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\omega \in B \cap B_1$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда условия* (3), (5) *при* $r = 1$ *и* $\|f - A_r(f)\|_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(1-r))$, $r_0 < r < 1$, *являются равносильными.*

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$ *и* $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$. *Тогда*

$$E_n(f)_{\mathcal{S}_p} \le 2K_r(f, n^{-r})_{\mathcal{S}_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$K_r(f, n^{-r})_{\mathcal{S}_p} \le C n^{-r} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} E_k(f)_{\mathcal{S}_p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следствие 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $r > 0$, $f \in \mathcal{S}_p(\chi)$, $\omega \in B_r \cap B$. *Тогда условия* (3), (5), (6) *и* $K_r(f, t^r)_{\mathcal{S}_p} = O(\omega(t))$, $0 < t < 1$, *равносильны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.

[2] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[3] *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.

[4] *Stepanets A. I.* Methods of approximation theory. Leiden : VSP, 2005. 940 p.

[5] *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Труды Москов. матем. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.