УДК 517.9

Представляющие системы из воспроизводящих ядер в пространствах аналитических функций [1]

Т. Г. Батенёв (Санкт-Петербург, Россия)

tbatenev@mail.ru

В работе элементарными методами построены представляющие системы из воспроизводящих ядер в пространстве H^p, $1 \le p < \infty$, в шаре, полидиске и полуплоскости.

Ключевые слова: пространство Харди, весовое пространство Харди, воспроизводящее ядро, представляющая система.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-30002-П).

Representing systems of reproducing kernels in spaces of analytic functions [1]

T. G. Batenev (Saint Petersburg, Russia)

tbatenev@mail.ru

We give an elementary construction of representing systems of the Cauchy kernels in the Hardy spaces H^p, $1 \le p < \infty$, the ball, polydisc and half-plane.

Keywords: Hardy space, weighted Hardy space, reproducing kernel, representing system.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-71-30002-П).

Введение

Последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечномерного топологического векторного пространства X над $\mathbb{C}$ называется представляющей для X, если для любого элемента $x \in X$ существует такая последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,$$

где ряд сходится в топологии пространства X. Представляющая система в локально-выпуклом пространстве X называется абсолютно представляющей, если любой элемент $x \in X$ допускает такое представление и ряд сходится абсолютно. В отличие от хорошо известного понятия базиса Шаудера, в случае представляющих систем не требуется, чтобы коэффиценты в разложении определялись единственным образом.

Систематически представляющие системы впервые изучались в работах А.Ф. Леонтьева, подытоженных монографией [1]. При этом наиболее глубокие результаты были получены для локально-выпуклых пространств или для некоторых специальных семейств функций (например, представляющие системы из экспонент в различных пространствах Фреше аналитических функций, см. [2, 3]). Однако, оказалось, что представляющие системы из воспроизводящих ядер в классических пространствах аналитических функций не изучались до недавнего времени.

Функциональное гильбертово пространство $\mathcal{H}$ на множестве X называется пространством с воспроизводящим ядром, если для любого $y \in X$ функционал вычисления значения функции в точке $G_y f = f(y)$ непрерывен. Тогда по теореме Рисса $f(y) = (f, k_y)$ для некоторого элемента $k_y \in \mathcal{H}$. Функция $k(x, y) = k_y(x)$ называется воспроизводящим ядром пространства $\mathcal{H}$. Воспроизводящие ядра часто оказываются собственными функциями различных операторов, например, дифференциальных или операторов Тёплица.

В работе [4] Э. Фрикена, Л. Х. Кхоя и П. Лефевра задали следующий вопрос. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство с воспроизводящим ядром на множестве X и $k_x^{\mathcal{H}}$ его воспроизводящее ядро в точке $x \in X$. Как охарактеризовать последовательность $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ такую, что $\{k_{x_n}\}_{n\geq 1}$ есть представляющая система (абсолютно представляющая система) для замыкания своей линейной оболочки?

В той же работе [4] Э. Фрикен, Л. Х. Кхой и П. Лефевр показали, что во многих классических пространствах аналитических функций в круге, таких как пространства Харди, Дирихле, Бергмана, некоторые пространства де Бранжа-Ровняка, не существует абсолютно представляющих систем из воспроизводящих ядер. Вопрос же о существовании представляющих систем для $H^2(\mathbb{D})$ оставался открытым.

Положительный ответ на этот вопрос был дан К.С. Сперанским и П.А. Терёхиным в работах [5, 6]. Их метод основан на обобщённом понятии фрейма в банаховом пространстве (см. [7]).

В работе А.Д. Баранова и Т.Г. Батенёва [8] была описана элементарная конструкция представляющих систем из ядер Коши для пространств $H^p(\mathbb{D})$ при $p \in [1, \infty)$, а также представляющих систем из воспроизводящих ядер в весовых пространствах Харди.

В данной работе аналогичные реузльтаты получены для пространства Харди в полуплоскости, а также для пространств в полидиске и многомерном шаре.

Теорема 1. *Пусть $K_\lambda(z)$ – воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости, $h_k > 0, h_k \to 0, R_k \to \infty, d_k \in \mathbb{N}, d_k h_k \geq 2MR_k, M > (1+\sqrt{5})/2$,*

$$E_{k,j} = \left[-R_k + j\frac{2R_k}{d_k}, -R_k + (j+1)\frac{2R_k}{d_k} \right], \qquad j = 0, ..., d_k - 1,$$

$t_{k,j} \in E_{k,j}, \lambda_{k,j} = t_{k,j} + ih_k$. Тогда система $\{K_{\lambda_{k,j}}(z)\}_{k,j}$ является представляющей для $H^p(\mathbb{C}_+)$ при любом $p \in (1, \infty)$.

Теорема 2. *Пусть $K_\lambda(z)$ – воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{B}^N)$ в единичном шаре, $r_k \to 1, E_{k,j}$ – дизъюнктные (по j) измеримые подмножества единичной сферы $\mathbb{S}^N$ в $\mathbb{C}^N$, $j = 1, ..., n_k$, $diam\ E_{k,j} \leq d_k$, $(1-r_k)^N d_k^{-1} \geq M$, $M > N/2$, $\bigcup_{j=1}^{n_k} E_{k,j} = \mathbb{S}^N$ для любого k, и пусть $\Lambda = \{\lambda_{k,j} = r_k\zeta_{k,j} : \zeta_{k,j} \in E_{k,j}\}$. Тогда $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является представляющей системой для $H^p(\mathbb{B}^N)$ при любом $p \in (1, \infty)$.*

Теорема 3. *Пусть $K_\lambda(z)$ – воспроизводящее ядро пространства Харди $H^2(\mathbb{D}^N)$ в полидиске, $r_k \to 1, E_{k,j}$ – дизъюнктные (по j) измеримые подмножества $\mathbb{T}^N$, $j = 1, ..., n_k$, $diam\ E_{k,j} \leq d_k$, $(1-r_k)^N d_k^{-1} \geq M$, $M > N/2^N$, $\bigcup_{j=1}^{n_k} E_{k,j} = \mathbb{T}^N$ для любого k, и пусть $\Lambda = \{\lambda_{k,j} = r_k\zeta^{k,j} : \zeta^{k,j} \in E_{k,j}\}$. Тогда $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ является представляющей системой для $H^p(\mathbb{T}^N)$ при любом $p \in (1, \infty)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. Москва : Мир, 1976. 536 с.

[2] *Исаев К. П.* Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций. // Итоги науки и техники. Серия “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. 2019. Т. 161, Целые функции и их приложения. С. 3–64.

[3] *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, № 1. С. 73–126.

[4] *Fricain E., Khoi L. H., Lefévre P.* Representing systems generated by reproducing kernels // Indagationes Mathematicae. 2018. V. 29, № 3. P. 860–872.

[5] *Speransky K. S., Terekhin P. A.* A representing system generated by the Szegö kernel for the Hardy space // Indagationes Mathematicae. 2018. V. 29, № 5. P. 1318–1325.

[6] *Сперанский К. С., Терёхин П. А.* О существовании фреймов в пространстве Харди, построенных на основе ядра Сеге // Известия высших учебных заведений. Математика. 2019. Т. 2. С. 57–68.

[7] *Терёхин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 3. С. 50–62.

[8] *Baranov A., Batenev T.* Representing Systems of Reproducing Kernels in Spaces of Analytic Functions // Results in Mathematics. 2023. V. 78, № 4, article 143.