УДК 517.55+517.96

Полиномиальные решения многомерных разностных уравнений[1]

А. А. Григорьев (Россия, г. Красноярск)
grigrow@yandex.ru
Е. К. Лейнартас (Россия, г. Красноярск)
lein@mail.ru
А. П. Ляпин (Россия, г. Красноярск)
aplyapin@sfu-kras.ru

В данной работе вводится понятие разностных операторов с суммирующим эффектом — операторов, позволяющих решать задачу суммирования. Для операторов, обладающих суммирующим эффектом, дается описание пространства полиномиальных решений.

Ключевые слова: числа Бернулли, многочлены Бернулли, задача суммирования, многомерные разностные уравнения, оператор Тодда..

Polynomial Solutions to a Multidimensional Difference Equation[1]

A. A. Grigoriev (Russia, Krasnoyarsk)
grigrow@yandex.ru
E. K. Leinartas (Russia, Krasnoyarsk)
lein@mail.ru
A. P. Lyapin (Russia, Krasnoyarsk)
aplyapin@sfu-kras.ru

We define a set of polynomial difference operators with a summing effect which allows us to solve the summation problem. The theorem describing the space of polynomial solutions for operators with the summing effect was proved.

Keywords: Bernoulli numbers, Bernoulli polynomials, summation problem, multidimensional difference equation, Todd operator..

Введение

На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \dots, x_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $\delta_j^{\alpha_j} = \underbrace{\delta_j \circ \dots \circ \delta_j}_{\alpha_j \text{ раз}}$, δ_j^0

— тождественный оператор. Обозначим $P(\delta) = \sum\limits_{0\leqslant\alpha\leqslant l} c_\alpha \delta^\alpha$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$, а неравенство $l \geqslant \alpha$ означает, что $l_j \geqslant \alpha_j, j = 1, \ldots, n$. Будем также использовать обозначение $l \ngeqslant \alpha$, если найдется хотя бы одно j_0, для которого $l_{j_0} < \alpha_{j_0}$.

Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta)f(x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{1}$$

Для заданной функции нескольких дискретных аргументов $\varphi(t) = \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ рассматривается задача отыскания суммы ее значений по всем целочисленным точкам n-мерного параллелепипеда с «переменной» вершиной $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$:

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n_{\geqslant} : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j, j = 1,\ \ldots, n\}.$$

Искомую сумму можно записать так:

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \cdots \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{t\in\Pi(x)} \varphi(t). \tag{2}$$

Решить задачу суммирования — значит найти формулу, выражающую сумму (2) через не зависящее от x (конечное) число слагаемых.

Разностные операторы с суммирующим эффектом

Определение 1. Полиномиальный разностный оператор $P(\delta)$ назовем *оператором, обладающим суммирующим эффектом,* если существует решение $f(x)$ уравнения (1), такое что сумма (2) выражается через значения $f(x)$ в конечном и не зависящем от $x = (x_1, \ldots, x_n)$ числе точек.

Пример 1. Найти сумму

$$S(x_1, x_2) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \sum_{t_2=0}^{x_2} \varphi(t_1, t_2)$$

для функции

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{1}{(t_1 + t_2 + 1)(t_1 + t_2 + 2)(t_1 + t_2 + 3)}.$$

Функция

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{t_1 + t_2 + 1}$$

является решением разностного уравнения

$$(\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1)f(t) = \varphi(t).$$

Имеем

$$P(\delta) = (\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1).$$

Искомая сумма равна

$$S(x) = f(x_1+1, x_2+1) - f(x_1+1, 0) - f(0, x_2+1) + f(0,0) = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x_1+x_2+3} - \frac{1}{x_1+2} - \frac{1}{x_2+2} + 1\Big).$$

В данном примере сумма $S(x)$ выражается через значения функции $f(x)$ в четырех точках, оператор $P(\delta) = (\delta_1 - 1)(\delta_2 - 1)$ обладает суммирующим эффектом.

Полиномиальные решения уравнения с полиномиальной правой частью

В данной работе нас интересует вопрос о полиномиальных решениях разностных уравнений (1) с полиномиальной правой частью. При этом, не теряя общности, можно рассматривать случай $\varphi(t) = t^\mu = t_1^{\mu_1} \cdots t_n^{\mu_n}$. Кроме того, нас интересуют полиномиальные разностные операторы $P(\delta)$ с суммирующим эффектом, которые можно записать (см. статью [1]) в виде

$$P(\delta) = R(\delta)\prod_{j=1}^{n}(\delta_j - 1)^{k_j}, \tag{3}$$

где $R(\delta)$ — некоторый полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами, $R(I) \neq 0$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$R(\delta)\prod_{j=1}^{n}(\delta_j - 1)^{k_j} f(t) = t^\mu, \quad t \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{4}$$

Будем искать его частные полиномиальные решения по аналогии с одномерным случаем, т. е. используем операторные равенства $\delta_j = e^{D_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Функция $Td(\xi) = \frac{1}{R(\xi)}\prod\limits_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^{k_j}}{(\xi_j - 1)^{k_j}}$ голоморфна в точке $\xi = 0$ и поэтому разлагается в некоторой окрестности нуля в степенной ряд

$$Td(\xi) = \sum_{m \geqslant 0}\frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!}\xi^m. \tag{5}$$

Подставляя в (5) вместо переменной ξ_j оператор дифференцирования D_j, определим *дифференциальный оператор бесконечного порядка*:

$$Td(D) = \sum_{m \geqslant 0} \frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!} D^m. \qquad (6)$$

При $k_1 = \ldots = k_n = 1$, $R(\delta) \equiv 1$ оператор, определенный формулой (6) называется *оператором Тодда* (См., например, [2], [3]). В общем случае его естественно называть *обобщенным оператором Тодда*, а числа $\tilde{b}_{k,m}$ — *обобщенными числами Бернулли. Многочленом Бернулли, ассоциированным с полиномиальным разностным оператором (3)*, назовем всякое полиномиальное решение уравнения (4).

Случай $R(\delta) \equiv 1$ рассматривался в работе [4].

Обозначим $\mu^{(m)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-(m-1))$.

Теорема 1. Пусть $P(\delta)$ — оператор с суммирующим эффектом вида (3). Тогда множество многочленов Бернулли, ассоциированных с этим оператором, описывается формулой

$$f(x) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant \mu} \frac{\tilde{b}_{k,m}}{m!} \frac{\mu^{(m)} x^{\mu+k-m}}{(\mu+k-m)^{(k)}} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{m_i=1}^{k_i} x_i^{k_i-m_i} q_{m_i}(x_1, \ldots [i] \ldots, x_n),$$

где q_{m_i} — произвольные полиномы $(n-1)$-й переменной $x_1, \ldots [i] \ldots, x_n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Andrey A. Grigoriev, Evgeniy K. Leinartas, Alexander P. Lyapin* Summation of functions and polynomial solutions to a multidimensional difference equation // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 16:2 (2023), 153–161

[2] *M. Brion* Lattice points in simple polytopes // Journal of the American Mathematical Society. 1997. V. 10. №2. P. 371–392.

[3] *A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii* The Riemann–Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials on virtual polytopes // Algebra i Analiz, 4:4 (1992), 188–216; St. Petersburg Math. J., 4:4 (1993), 789–812

[4] *Шишкина О. А.* Формула Эйлера–Маклорена для рационального параллелотопа // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия «Математика». Иркутск: 2015. Т. 13. С. 56-71.