



**Факультет нелинейных процессов
Кафедра нелинейной физики**

Е.Н. Бегинин, Б.С. Дмитриев

**Маятники. Динамика поступательного
и вращательного движения**

Учебно-методическое пособие и методические рекомендации для студентов



Введение

Учебно-методическое пособие содержит описание лабораторных работ для проведения экспериментальных исследований по физическим основам механики в учебно-методическом практикуме, созданном на кафедре нелинейной физики. В данном пособии содержится описание лабораторного комплекса ЛКМ-4 и методики измерений. Экспериментальные исследования, которые проводятся в лабораторном комплексе, направлены на изучение законов динамики поступательного и вращательного движения твердого тела (системы тел), а также колебаний механических систем, связанных с этим движением.

Кроме описанных в работе заданий студенту может быть предложено самостоятельно спланировать эксперимент, обосновать его методику проведения и объяснить полученные результаты в соответствии с основными законами механики.



Темы лабораторных работ

1. Динамика поступательного движения
Машина Атвуда. Равноускоренное движение. Методы повышения точности измерений. Силы трения. Ускорение свободного падения
2. Упругая деформация
Закон Гука. Коэффициент жесткости пружин и системы параллельно или последовательно соединенных пружин. Пружинный маятник. Измерение коэффициента жесткости динамическим и статическим методами. Ускорение свободного падения
3. Момент инерции. Твердого тела
Момент импульса. Тензор момента инерции. Уравнение движения. Вращательные колебания. Теорема Штейнера-Гюйгенса.
4. Динамика вращательного движения.
Уравнение вращательного движения. Моменты сил трения. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии.
5. Маятники
Физический и математический маятники. Приведенная длина. Гармонические колебания. Ангармонические колебания.

Измерительный комплекс

Лабораторный измерительный комплекс (ЛКМ-4) предназначен для проведения экспериментальных исследований законов механики. Разнообразный набор экспериментов комплекса позволяет на одной установке провести большую серию лабораторных опытов. Общий вид установки показан на рис. I, набор элементов для эксперимента на рис. II.

Установка состоит из основания (поз 1. на рис. I) на котором расположена стойка (2) и измерительная система (3). Стойка предназначена для подвеса гирь и пружин, приводящих в движение узлы установки, а также для размещения изучаемых объектов. Узлы стойки смонтированы на колонне с отверстиями для закрепления съемных элементов. Отверстия следуют с шагом 40 ± 0.2 мм. Верхний шкив имеет штырь для крепления маятников и прорезь, с помощью которой отсчитывается угловая координата шкива по шкале (4). Цена деления шкалы 5° , среднее (нулевое) деление расположено горизонтально.

На оси шкива закреплен диск с радиальной прорезью (5). При прохождении прорези через зазор фотодатчика срабатывает таймер измерительной системы, что позволяет измерять время поворота шкива на угол 360° или 720° (один или два оборота) или измерять период колебаний шкива. Диаметры канавок шкива 40 и 60 мм. Выступающий назад конец оси шкива обеспечивает стыковку с датчиком измерительной системы. На основании стойки имеются два штыря (6) с отверстием для закрепления пружин.

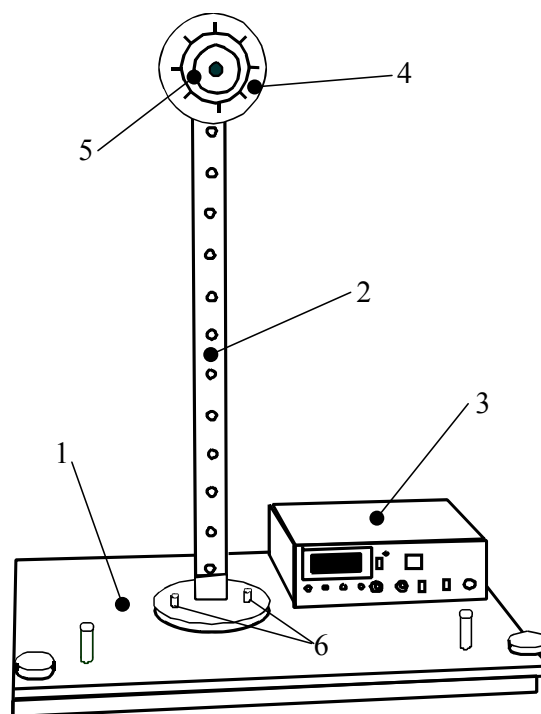


Рис. I

Набор объектов и приспособлений (рис. II) включает в себя:

два паруса (1), тяжелый диск на легкой планке (модель математического маятника) (2), легкий стержень с отверстиями (3), набор грузов с разновесами (4), набор соединительных нитей (5), диск (6), коромысла для соединения пружин (7), фиксатор для закрепления объектов на шкиве (8), набор пружин с соединительными нитями (9), два цилиндра (10).

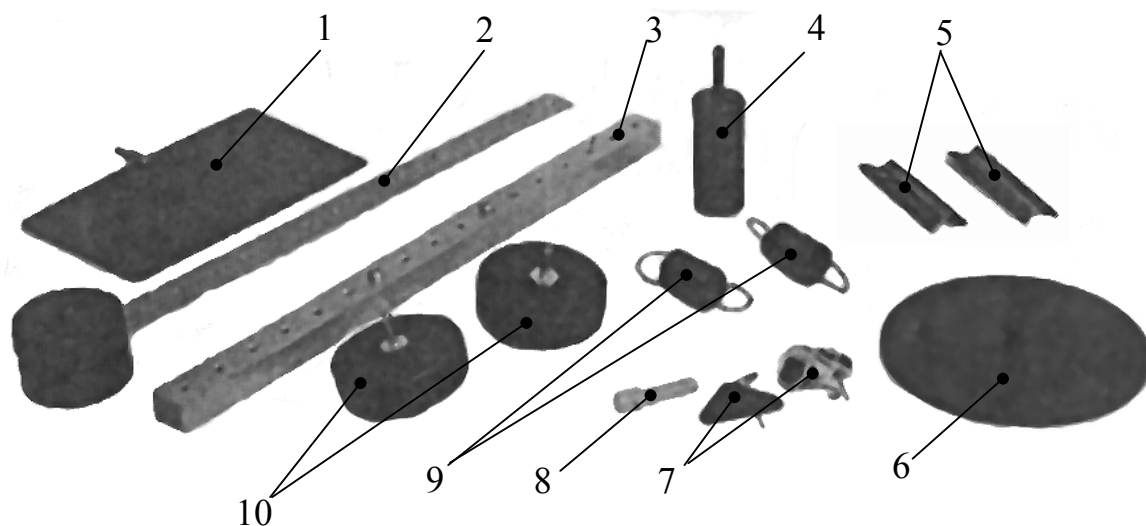


Рис. II

(4), набор соединительных нитей (5), диск (6), коромысла для соединения пружин (7), фиксатор для закрепления объектов на шкиве (8), набор пружин с соединительными нитями (9), два цилиндра (10).

Измерительная система (рис. III) обеспечивает измерение интервалов времени между заданными событиями, в том числе измерение периодов колебаний. Результаты измерений отображаются на цифровом индикаторе (1). Световые индикаторы (2) служат для отображения состояния фотодатчика. Диапазон отображаемых значений устанавливаются переключателем (3) и может быть равным 0.1 мс, 1 мс или 0.01 с. В первом и втором случаях индикатор показывает время в миллисекундах, в третьем – в секундах. Максимальный измеряемый интервал времени соответственно равен 1, 10 или 100 с. Каждое срабатывание таймера сопровождается звуковым сигналом динамика (4). Управление алгоритмом измерения осуществляется соответствующими переключателями:

"ЦИКЛ/ОДНОКР"- выбор числа измерений. В положении "ЦИКЛ" (режим циклических измерений)- система реагирует на *все* поступающие сигналы запуска и остановки электронного секундомера. В положении "ОДНОКР" (режим однократного измерения)- система производит однократное измерение и после вывода результата на индикатор перестает реагировать на поступающие сигналы.

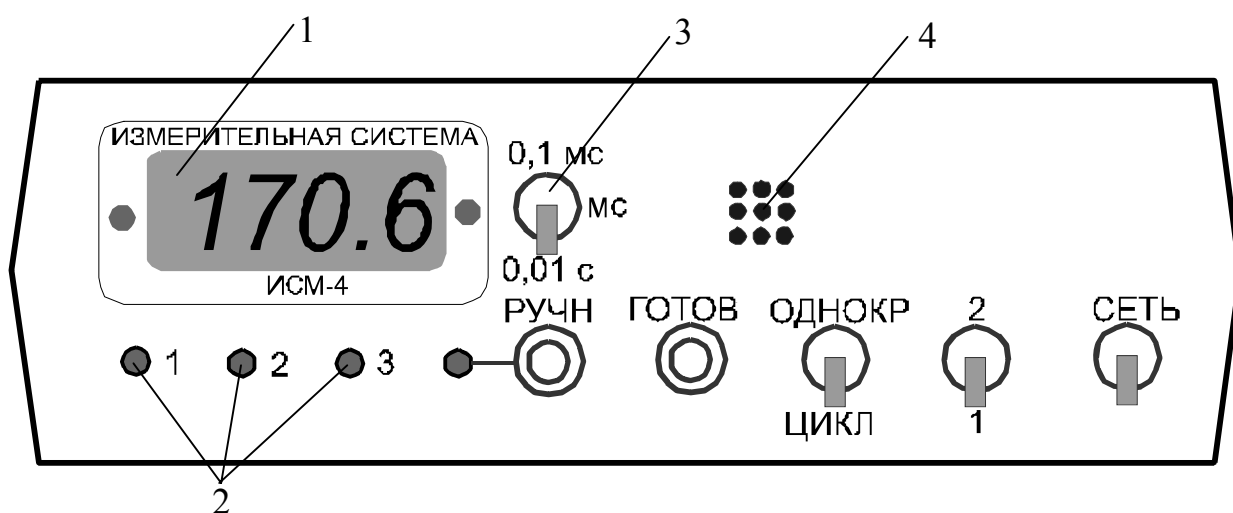


Рис. III



"1/2"- выбор парных измерений. В положении "1" –регистрируется значение каждого интервала времени (например, продолжительность каждого оборота шкива). В положении "2"- регистрируется суммарное значение двух последовательных интервалов времени (например, продолжительность двух оборотов шкива).

"ГОТОВ"- сброс показаний индикатора и перевод системы в состояние готовности к измерениям.

"РУЧН"- кнопка ручного запуска/остановки электронного секундомера.



1. Динамика поступательного движения

Краткая теория

Для изучения динамики поступательного движения используется машина Атвуда¹ (рис. 1.1). Через шкив радиуса R и моментом инерции I перекинута нить к концам которой подвешены грузы различной массы m_1 и m_2 . Если массы грузов не равны, то система приходит в движение. Изучение характера движения системы проведем при следующих условиях: а) масса нити равна

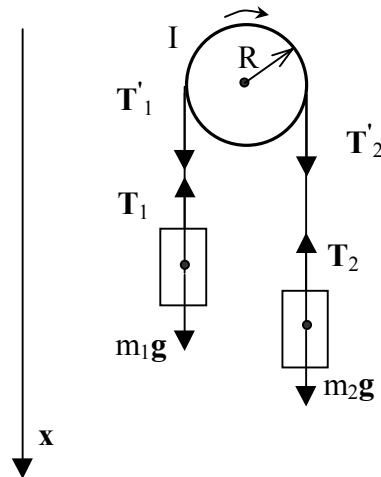


Рис. 1.1

нулю; б) нить нерастяжимая; в) в системе действуют силы трения не зависящие от скорости движения системы (так называемое сухое трение).

Для определенности положим, что выполняется соотношение $m_2 > m_1$, т.е. тело m_2 опускается. В системе действуют силы тяжести и силы натяжения нити, приложенные как показано на рис. 1.1. Движение такой системы описывается системой трех уравнений:

$$\begin{aligned} I\beta &= R(T_1' + T_2') + M_{\text{тр}}, \\ m_1 a &= m_1 g + T_1, \\ m_2 a &= m_2 g + T_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

¹ Атвуд Дж. (1746-1807) – изобрел прибор для проверки законов падения тел, который описал в трактате по механике (1784 г.).

где β - угловое ускорение шкива, $M_{тр}$ - момент сил трения действующих в системе. Переходя в (1.1) к проекциям на ось x и учитывая, что: момент сил трения является тормозящим, грузы движутся в противоположных направлениях, силы натяжения нити равны по величине $|T_1'| = |T_1|$ и $|T_2'| = |T_2|$, получаем:

$$\begin{aligned} I\beta &= R(T_2 - T_1) - M_{тр} \\ m_1 a &= -(m_1 g - T_1) \\ m_2 a &= m_2 g - T_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Исключая из (1.2) силы натяжения нити и учитывая связь углового и линейного ускорения $a = \beta R$, получаем выражение связывающее ускорение a грузов с ускорением свободного падения g :

$$a = g \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2} \right) - \frac{M_{тр}}{R(m_1 + m_2 + I/R^2)}. \quad (1.3)$$

Полученное выражение перепишем в следующем виде:

$$a = K \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g - B \right), \quad (1.4)$$

где

$$K = \frac{1}{\left(1 + I / \left[R^2 (m_1 + m_2) \right] \right)}, \quad (1.5)$$

$$B = \frac{M_{тр}}{R(m_1 + m_2)}. \quad (1.6)$$

Из анализа выражения (1.4) следует, что:

а) система приходит в движение только при выполнении условия

$$m_2 - m_1 > M_{тр} / Rg \quad (1.7)$$

б) движение системы является *равноускоренным* ($a = \text{const}$).

Выясним, когда в рассматриваемой системе можно не учитывать силы трения и момент инерции шкива. Если выполняется условие

$$m_2 - m_1 \gg M_{тр}/Rg, \quad (1.8)$$

то в (1.4) можно положить $V=0$ и силами трения в системе можно пренебречь.

При выполнении условия

$$I \ll R^2(m_1 + m_2) \quad (1.9)$$

момент инерции шкива можно не учитывать и положить величину $K=1$. Кроме того, в этом случае силы натяжения нитей будут равны по величине: $|T_1| = |T_2| = T$.

Таким образом, пренебрегая силами трения и моментом инерции шкива, из (1.4) следует, что ускорения a и g связаны простым соотношением:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \quad (1.10)$$

Целью работы является:

- ◆ экспериментальная проверка полученных соотношений (1.4), (1.10)
- ◆ определение характера движения грузов
- ◆ изучение зависимости ускорения системы грузов от их масс
- ◆ определение величины ускорения свободного падения g .

Непосредственно измеряемой величиной в работе является время τ поворота шкива на определенный угол φ . В случае равноускоренного движения, угловое ускорение шкива находится по формуле

$$\beta = 2\varphi/\tau^2.$$

Ускорение грузов a определяется из выражения

$$a = \beta R = 2\varphi R/\tau^2. \quad (1.11)$$

Повышение точности измерений

При измерении времени τ важно, чтобы начало движения системы совпадало с началом отсчета времени. На практике это не так: тело невозможно установить

строго в точке срабатывания датчика, и прежде, чем сработает фотодатчик, тело успевает пройти некоторое расстояние, которое трудно сделать менее 0.3 мм. Хотя это расстояние и составляет величину порядка 10^{-3} высоты падения, оно существенно влияет на результат измерения ускорения. Покажем это на следующем примере.

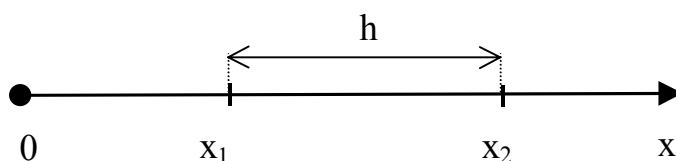


Рис. 1.2

Пусть 0 - точка начала движения,
 x_1 - точка первого срабатывания датчика,
 x_2 - точка второго срабатывания датчика.

При этом $x_2 = x_1 + h$, где h – известный пройденный путь (рис. 1.2).

При равноускоренном движении тело пройдет расстояние h за время

$$t = \sqrt{2x_2/a} - \sqrt{2x_1/a} = \sqrt{2/a} (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}),$$

которое и будет экспериментально измерено. Отсюда ускорение

$$a = 2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 / t^2 = 2(\sqrt{x_1 + h} - \sqrt{x_1})^2 / t^2.$$

Полагая $x_1 \ll h$, приходим к выражению

$$a = (2h/t^2)(1 + 2x_1/h - 2\sqrt{x_1/h}) \quad (1.12)$$

Допустим что, время t и пройденное расстояние h измеряются точно, а расстояние x_1 измеряется с погрешностью Δx_1 . Найдем предельную абсолютную погрешность измерения величины ускорения a . Из (1.12) следует, что ускорение a является функцией расстояния x_1 - $a(x_1) = f(x_1)$. Тогда предельная абсолютная погрешность Δa может быть найдена по формуле

$$\Delta a \approx |f'(x_1)| \Delta x_1. \quad (1.13)$$

Используя (1.13), из (1.12) находим предельную абсолютную погрешность Δa

$$\Delta a \approx 2h/t^2 \left(2\Delta x_1/h + \Delta x_1/\sqrt{hx_1} \right) \quad (1.14)$$

Оценим предельные абсолютные погрешности Δa при измерениях проводимыми двумя методами.

Метод 1. Пусть при проведении измерений точка первого срабатывания датчика устанавливается как можно ближе к точке начала движения $x_1 \approx 0$. Тогда в (1.14) величину x_1 нужно рассматривать как погрешность установки Δx_1 и предельная абсолютная погрешность в этом случае будет равна

$$\Delta a \approx 2h/t^2 \left(2\Delta x_1/h + \sqrt{\Delta x_1/h} \right) \quad (1.15)$$

Метод 2. Если устанавливается заранее измеренное значение $x_1 \neq 0$, то при выполнении условия $x_1 \gg \Delta x_1$, вторым слагаемым в скобках (1.14) можно пренебречь и предельная абсолютная погрешность будет минимальной:

$$\Delta a \approx 2h/t^2 (2\Delta x_1/h). \quad (1.16)$$

Следовательно, второй метод измерения дает более высокую точность измерения величины ускорения a .

Порядок выполнения работы

Упражнение 1.1

Проверка равноускоренного движения грузов

На перекинутую через большой шкив ($R=30$ мм) нить подвешивают два наборных груза разных масс m_1 и m_2 . Легкий груз опускают и удерживают прижатым к основанию установки. Поворачивая шкив, устанавливают щель шкива в зазоре фотодатчика. При этом на панели измерителя гаснет индикатор. Отпускают груз и фиксируют первое после начала движения показание таймера. Измеряют время τ_1 одного оборота шкива на угол $\varphi=2\pi$ (тумблер "1/2" в положении "1"). Проводят измерения времени τ_2 двух полных оборотов шкива



$\varphi=4\pi$ (тумблер "1/2" в положении "2"). Фиксирование времени проводят в режиме однократных измерений. Для выбранных пар наборных грузов, измерения τ_1 и τ_2 проводят не менее 5 раз и находят средние значения $\langle\tau_1\rangle$ и $\langle\tau_2\rangle$. Далее находится величина $D=(\langle\tau_2\rangle/\langle\tau_1\rangle)^2$, служащая критерием равноускоренного движения грузов. В случае равноускоренного (равнозамедленного) движения $D=2$. Аналогичные измерения проводятся для другой пары наборных грузов с разными массами и результаты заносятся в таблицу 1.1

Таблица 1.1

$m_1, \text{Г}$	$m_2, \text{Г}$	$\tau_1, \text{с}$	$\tau_2, \text{с}$	$\langle\tau_1\rangle, \text{с}$	$\langle\tau_2\rangle, \text{с}$	D

Упражнение 1.2

Оценка величины момента силы трения

Соотношение (1.7) позволяет экспериментально оценить величину момента сил трения $M_{\text{тр}}$ действующих в системе. Для этого разность масс $m_2 - m_1$ наборных грузов подвешенных на нити подбирают так, что бы система оставалась в покое после того как легкий груз отпускают. Результаты оценки заносятся в таблицу 1.2

Таблица 1.2

$m_1 + m_2, \text{Г}$	$m_2 - m_1, \text{Г}$	$M_{\text{тр}}, \text{Н} \cdot \text{м}$



Упражнение 1.3

Ускорение свободного падения

Формула (1.4) может быть использована для нахождения ускорения свободного падения g по известной величине линейного ускорения a грузов. Без учета сил трения они будут связаны соотношением

$$g = \frac{1}{K} \frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} a. \quad (1.17)$$

Ускорение a рассчитывается по (1.11) исходя из экспериментально измеренного времени τ одного оборота шкива на угол $\varphi=2\pi$. Измерения τ проводятся как в упражнении 1.1 в режиме однократных измерений и в следующей последовательности:

- ◆ выбираются массы наборных грузов m_1, m_2 исходя из условия (1.8)
- ◆ проводятся измерения времени τ двумя методами. При втором методе измерения начальное положение шкива устанавливается на угол $\varphi_1 \approx \pi/2$ относительно угла, при котором срабатывает датчик
- ◆ рассчитывается величина K
- ◆ по формуле (1.10) находится ускорение g'
- ◆ по формуле (1.17) находится ускорение g с учетом момента инерции шкива

Результаты оформляются в виде таблицы 1.3.

Таблица 1.3.

Метод измерения	$m_1, \text{г}$	$m_2, \text{г}$	$\langle \tau \rangle, \text{с}$	$a, \text{м/с}$	$1/K$	$g', \text{м/с}$	$g, \text{м/с}$
1							
2							

Примечание. Момент инерции шкива I , необходимый для вычисления K , можно представить в виде суммы моментов инерции двух цилиндров имеющих общую ось вращения. Массы цилиндров определяются по их геометрическим размерам и плотности материала из которого они изготовлены ($\rho=2.7 \text{ г/см}^3$)



Упражнение 1.4

Ускорение свободного падения с учетом сил трения

Если пренебречь моментом инерции шкива (выполнено условие (1.9)) то, исходя из (1.4), ускорения a и g связаны уравнением

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g - B. \quad (1.18)$$

Введем новую переменную $q = (m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$ и будем рассматривать ускорение a как функцию переменной q . Тогда из (1.18) получаем, что ускорение a и переменная q связаны линейной зависимостью

$$a(q) = gq - B. \quad (1.19)$$

Измерения в упражнении проводятся в следующей последовательности:

- ◆ выбираются массы наборных грузов m_1 и m_2 исходя из условия (1.9) и вычисляется величина q
- ◆ проводятся измерения времени τ одного оборота на угол $\varphi=2\pi$ первым методом и находится ускорение a
- ◆ разновес перевешивается с одного груза на другой и последовательность измерений повторяется.

Указание. Измерения необходимо провести не менее чем для пяти различных значений q , особое внимание уделяя малым величинам $m_2 - m_1$, при которых силы трения оказывают заметное влияние на характер движения системы.

Результаты заносятся в таблицу 1.4

Таблица 1.4

$m_1 + m_2, \text{ г}$	q	$\tau, \text{ с}$	$a, \text{ м/с}^2$



По данным таблицы 1.4 строится график зависимости ускорения a от величины q . Убедившись в том, что эта зависимость линейная, ускорение силы тяжести g находится как угловой коэффициент графика, а величина B - как экстраполированное значение произведения gq , при котором $a=0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Получить уравнение движение грузов в машине Атвуда
2. Получить расчетные формулы для ускорения свободного падения тел.
3. Объяснить качественно, к чему приведёт учет сил трения в системе.
4. Объяснить, почему график зависимости $a(q)$ не проходит через точку с координатой $(0,0)$.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. т.1, Наука, 1974, §§3, 11, 17, 37
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, Наука, 1982, §§9, 15, 38
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности, 1986, Высш. школа, §§18,19



4. 2. Упругие деформации

Краткая теория

Реальные тела под действием приложенных к ним сил деформируются и в них возникают силы упругости. В случае малых деформаций возникающие силы упругости подчиняются закону Гука: силы упругости пропорциональны деформации тела.

Рассмотрим невесомую пружину находящуюся в поле тяжести Земли. Введем систему координат с началом совпадающим с положением незакрепленного конца пружины и направлением вдоль силы тяжести. Подвесим к пружине груз массой m . Под действием силы тяжести mg пружина растянется и положение конца пружины с грузом будет иметь координату x (рис. 2.1). В результате деформации пружины на величину x возникнет сила упругости

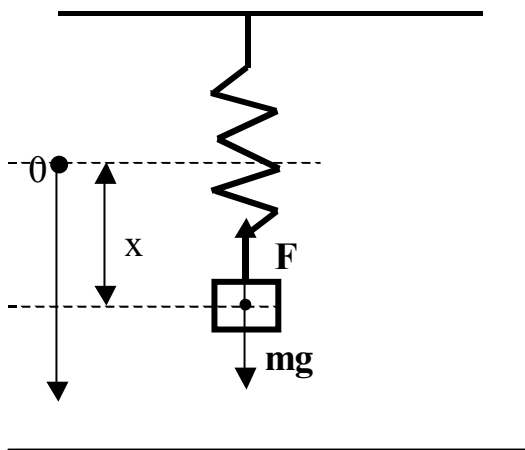


Рис. 2.1

пропорциональная деформации $F=-kx$. Коэффициент пропорциональности (коэффициент жесткости пружины) k зависит только свойств пружины (геометрических размеров, материала пружины и т.д.) и не зависит от приложенных сил. Знак минус указывает на то, что сила упругости всегда направлена против деформирующей силы.

Если рассматриваемая система находится в состоянии равновесия, то сила упругости по величине будет равна силе тяжести

$$kx = mg. \quad (2.1)$$

Следовательно, измеряя массу подвешенного груза и величину деформации, из соотношения (2.1) можно определить коэффициент жесткости пружины *статическим* методом:

$$k=mg/x. \quad (2.2)$$

Рассмотрим движение груза на пружине после вывода системы из положения равновесия. Движение будет происходить под действием двух сил: силы тяжести и силы упругости пружины. Уравнение движения запишется в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + mg. \quad (2.3)$$

Проводя в (2.3) замену переменных $z = x - mg/k$, получаем

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0, \quad (2.4)$$

где z -отклонение груза от положения статического равновесия в момент времени t , $\omega = \sqrt{k/m}$ - круговая частота. Решением дифференциального уравнения (2.4) является гармоническая функция

$$z(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где A - наибольшее отклонение от положения равновесия (амплитуда), φ - начальная фаза колебаний, определяющая положение груза в начальный момент времени $t=0$ относительно положения статического равновесия.

Таким образом, груз будет совершать гармонические колебания вокруг положения равновесия с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.5)$$



Период колебаний T зависит от коэффициента жесткости и от массы груза, что позволяет найти коэффициент жесткости пружины *динамическим* методом по результатам измерения периода колебаний груза из соотношения

$$k = m \frac{4\pi^2}{T^2}. \quad (2.6)$$

Порядок выполнения работы

Упражнение 2.1.

Измерение коэффициента жесткости пружины статическим методом

Пружина цепляется за штырь в основании стойки. Ко второму концу пружины цепляется нить. Нить перекидывается через верхний шкив стойки и к ее второму концу подвешивается наборный груз небольшой начальной массы m_0 . С помощью линейки определяется расстояние x_0 от плиты основания установки до нижнего торца груза. На груз навешивается разновес массой m и измеряется расстояние x' от основания установки до торца груза. Величина деформации пружины определяется как $x = x_0 - x'$, а коэффициент жесткости k находится из (2.2). Измерения проводят для пяти различных величин m . Указанную последовательность измерений проводят для каждой пружины из комплекта установки и результаты заносятся в таблицу 2.1

Таблица 2.1

№ пружины	m , г	x , см	k , Н/м	$\langle k \rangle$, Н/м

Упражнение 2.2

Измерение коэффициента жесткости системы пружин статическим методом

Из комплекта пружин выбираются любые две пружины с измеренными коэффициентами жесткости k_1 и k_2 . По методике упражнения 2.1, проводятся



измерения коэффициентов жесткости $k_{\text{пос}}$ и $k_{\text{пар}}$ двух пружин соединенных последовательно и параллельно. Результаты измерений заносятся в таблицу 2.2. В эту же таблицу заносятся результаты теоретического расчета коэффициентов жесткости последовательно $k_{\text{пос.т}} = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ и параллельно $k_{\text{пар.т}} = k_1 + k_2$ соединенных пружин.

Таблица 2.2

	m, г	x, см	$k_{\text{пос}}$, Н/м	$k_{\text{пар}}$, Н/м	$\langle k_{\text{пос}} \rangle$, Н/м	$\langle k_{\text{пар}} \rangle$, Н/м	$k_{\text{пос.т}}$, Н/м	$k_{\text{пар.т}}$, Н/м
Последовательное соединение (k_1, k_2)								
Параллельное соединение (k_1, k_2)								

Упражнение 2.3

Измерение коэффициента жесткости пружины динамическим методом

Пружина цепляется за штырь в основании стойки. Ко второму концу пружины цепляется нить. Нить оборачивается вокруг верхнего шкива стойки и к ее второму концу подвешивается наборный груз. Придерживая нить, поворачивают шкив так, чтобы в равновесном положении риска указателя находилась напротив нулевого деления шкалы. Тумблер "1/2" устанавливается в положении "2", тумблер "ЦИКЛ/ОДНОКР" в положении "ЦИКЛ", если требуется последовательное измерение серии периодов, и в положении "ОДНОКР", если период требуется измерить один раз после нажатия кнопки "ГОТОВ". При колебаниях шкива, таймер высвечивает значение периода T в миллисекундах. Величина коэффициента жесткости пружины рассчитывается по измеренному периоду колебаний и известной массе груза по формуле (2.6). Для каждой



пружины комплекта измерение периода колебаний проводится для пяти различных масс груза и результаты заносятся в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

№ пружины	m, г	T, с	k, Н/м	<k>, Н/м

Упражнение 2.4

Измерение коэффициента жесткости системы пружи динамическим методом

По методике упражнения 2.3 проводятся измерения для системы последовательно и параллельно соединенных пружин с известными коэффициентами k_1 и k_2 . Результаты заносятся в таблицу 2.4.

Таблица 2.4

	m, г	x, см	$k_{\text{пос}}$, Н/м	$k_{\text{пар}}$, Н/м	< $k_{\text{пос}}$ >, Н/м	< $k_{\text{пар}}$ >, Н/м	$k_{\text{пос.т}}$, Н/м	$k_{\text{ппр.т}}$, Н/м
Последовательное соединение (k_1, k_2)								
Параллельное соединение (k_1, k_2)								

Результаты измерения коэффициента жесткости пружин статическим и динамическим методом заносятся в сводную таблицу 2.5

Таблица 2.5

№ пружины	k, Н/м статический метод	k, Н/м динамический метод



Упражнение 2.5

Измерение ускорения свободного падения по колебаниям пружинного маятника

Ускорение свободного падения можно определить исходя из соотношения:

$$g = 4\pi^2(x_1 - x_2)/(T_1^2 - T_2^2) \quad (2.7)$$

где x_1 и x_2 координаты висящих на пружине грузов разных масс соответствующие положениям равновесия системы, T_1 и T_2 – периоды колебаний грузов на пружине. Измерения величин x_1 и x_2 проводятся с помощью линейки, а измерения периодов T_1 и T_2 проводятся по показаниям таймера.

Из комплекта пружин выбираются любые две пружины. Измерения ускорения свободного падения g проводятся для каждой пружины в отдельности и для систем последовательно и параллельно соединенных пружин. Результаты заносятся в таблицу 2.6

Таблица 2.6

	Пружина №1		Пружина №2		Параллельное соединение		Последовательное соединение	
Масса груза, г								
Координаты груза, мм								
Период колебаний, мс								
g , м/с ²								

Контрольные вопросы и задания

1. Закон Гука и области его применения.



2. Получить расчетную формулу (2.7) для вычисления ускорения свободного падения тел.
3. Получить выражения для коэффициентов жесткости параллельно и последовательно соединенных пружин.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. т.1, Наука, 1974, §§73,74
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, Наука, 1982, §14
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности, 1986 Высш. школа, §50



3. Момент инерции твердого тела

Краткая теория

При изучении поступательного и вращательного движения твердых тел широко используется модель *абсолютно* твердого тела. Согласно этой модели, абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек (частиц) m_i с неизменными расстояниями между ними. Для любой такой системы справедливо уравнение

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{L} – момент импульса системы материальных точек относительно некоторой неподвижной точки, \mathbf{M} – суммарный момент внешних сил действующих на систему относительно этой же точки.

Пусть система вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси проходящей через её центр масс. За неподвижную точку возьмем точку O совпадающую с положением центра масс системы. Тогда, положения материальных точек m_i относительно точки O будут задаваться радиус-векторами \mathbf{r}_i . Согласно определению, момент импульса системы относительно точки O будет равен

$$\mathbf{L} = \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i], \quad (3.2)$$

где суммирование проводится по всей совокупности материальных точек m_i , \mathbf{v}_i – линейная скорость точки m_i . В свою очередь, скорость \mathbf{v}_i связана с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ соотношением

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i]. \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) и используя формулу разложения двойного векторного произведения $[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]] = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) - \mathbf{C}(\mathbf{AB})$, получаем, что суммарный момент импульса всей системы относительно точки O равен

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \sum m_i r_i^2 - \sum m_i \mathbf{r}_i (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i). \quad (3.4)$$

Введем декартовую систему координат $\{xyz\}$ с началом совпадающим с точкой O и жестко связанную с телом, т.е. вращающуюся вместе с ним (рис.3.1). Тогда

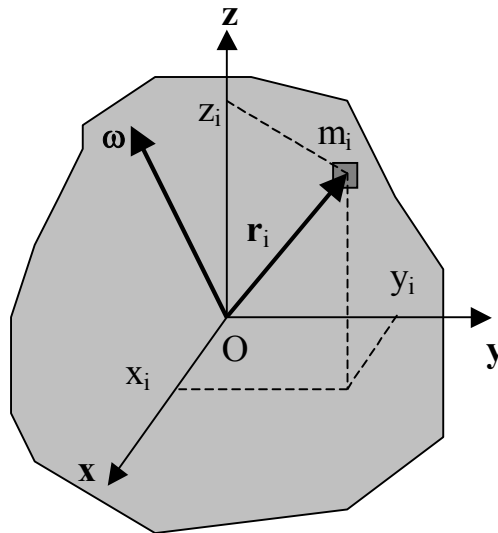


Рис. 3.1

момент импульса (3.4) системы можно записать в виде проекций на соответствующие оси

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum m_i r_i^2 - \sum m_i x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \\ L_y &= \omega_y \sum m_i r_i^2 - \sum m_i y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \\ L_z &= \omega_z \sum m_i r_i^2 - \sum m_i z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Проведя в (3.5) перегруппировку слагаемых, окончательно получаем

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $I_{xx} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2)$, $I_{xy} = I_{yx} = -\sum m_i x_i y_i$, $I_{xz} = I_{zx} = -\sum m_i x_i z_i$. Остальные величины I_{yy} , I_{zz} , I_{yz} и т.д., выражаются аналогичным образом.

Из (3.6) следует, что каждая компонента вектора \mathbf{L} линейно зависит от компонент вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, а величины I_{xx} , I_{xy} и т.д. суть



коэффициенты пропорциональности. Девять коэффициентов пропорциональности I_{xx}, I_{xy}, \dots являются компонентами тензора \vec{I} второго ранга. Применительно к рассматриваемой задаче, \vec{I} также называют *тензором инерции* тела и он характеризует инертные свойства тела при вращении. Диагональные компоненты тензора, т.е. I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} , называются *осевыми моментами инерции*, а остальные (недиагональные) – *центробежными моментами инерции*.

Систему (3.6) математически можно трактовать следующим образом: вектор угловой скорости ω умножается на тензор инерции \vec{I} и в результате получается вектор момента импульса L . Символически данная операция записывается в виде

$$L = \vec{I}\omega.$$

Остановимся подробнее на некоторых следствиях из полученных соотношений.

Следствие 1. Модуль вектора момента импульса пропорционален модулю вектора угловой скорости. Действительно, при увеличении модуля вектора угловой скорости в k - раз, в это же число раз увеличивается каждая из компонент $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и соответственно каждая компонента L_x, L_y, L_z . Следовательно и модуль вектора L увеличится в k - раз.

Следствие 2. Компоненты векторов L, ω и тензора инерции \vec{I} зависят от ориентации осей декартовой системы координат $\{xyz\}$ относительно рассматриваемого твердого тела. Следует подчеркнуть, что сами векторы L, ω не зависят от ориентации осей системы координат.

Следствие 3. Взаимная ориентация векторов L и ω определяется значениями компонент тензора момента инерции и в общем случае между ними существует отличный от нуля угол.

При выводе полученных соотношений мы не накладывали никаких условий на ориентацию осей декартовой системы координат. Закономерен



вопрос: существуют ли, особые (выделенные) ориентации осей? Математически доказано, что у твердого тела любой формы и произвольным распределением массы существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела оси, называемые *центральными главными осями инерции*. Если выбрать ориентацию осей декартовой системы координат $\{xyz\}$ вдоль центральных главных осей инерции то, центробежные моменты инерции будут равны нулю и тензор момента инерции $\tilde{\mathbf{I}}$ станет диагональным:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

В этом случае система (3.6) значительно упрощается и каждая компонента вектора \mathbf{L} будет пропорциональна соответствующей компоненте вектора угловой скорости.

Пусть твердое тело вращается с мгновенной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг неподвижной оси совпадающей с одной из центральных главных осей инерции тела. Направим вдоль этой оси ось z декартовой системы координат, тогда векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\omega}$ связаны простым соотношением

$$\mathbf{L} = I_{zz} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.7)$$

Подставив (3.7) в (3.1), получаем уравнение вращательного движения твердого тела в виде

$$I_{zz} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}. \quad (3.8)$$

Уравнение вращательного движения (3.8) можно сопоставить с уравнением поступательного движения материальной точки или твердого тела. Из этого сопоставления легко сделать вывод, что при вращательном движении момент инерции играет роль массы, момент силы – роль силы, угловая скорость – роль поступательной скорости и т.д. На основе сопоставления,

например, легко сделать вывод, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия вращающегося тела $E_{\text{кв}}$ будет определяться формулой:

$$E_{\text{кв}} = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2. \quad (3.9)$$

Итак, в динамике вращательного движения твердого тела с особую роль играют центральные главные оси инерции тела и осевые моменты инерции. Как их найти? Направления центральных главных осей инерции тела напрямую связаны со свойствами симметрии твердого тела. У тела обладающего осевой симметрией (например, у однородного цилиндра), одной из главных осей инерции является ось симметрии, в качестве двух других осей могут служить две любые взаимно перпендикулярные оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси симметрии и проходящие центр масс тела. У тела с центральной симметрией (шара), плотность которого зависит только от расстояния до центра, центральными главными осями инерции являются три любые взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс. Если тело симметрией не обладает, то центральные главные оси инерции могут быть найдены путем математических расчетов, либо экспериментальных измерений.

Для определения осевых моментов инерции удобно перейти от дискретного к непрерывному распределению массы тела. Например, для вращающегося твердого тела, движение которого описывается уравнением (3.8), момент инерции I_{zz} равен

$$I_{zz} = \int_{m_0} (r^2 - z^2) dm = \int_{m_0} R^2 dm \quad (3.9)$$

где R - расстояние от элементарной массы dm до оси вращения, r - расстояние от массы dm до центра масс, а интегрирование проводится по всей массе

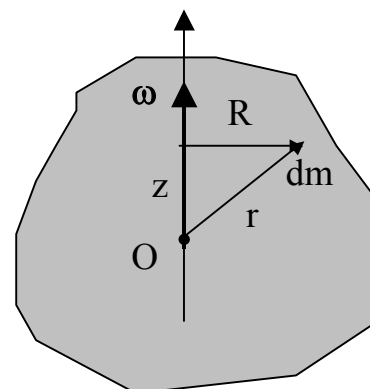


Рис. 3.2



тела m_0 (рис.3.2). Если ввести плотность тела $\rho = dm/dv$, где dv -физически бесконечно малый объем тела в котором плотность можно считать постоянной, то $dm = \rho dv$ и (3.9) можно записать в виде

$$I_{zz} = \int_V \rho R^2 dv \quad (3.10)$$

и интегрирование проводится по всему объему тела V .

Приведем результаты расчета осевых моментов инерции I_0 для простых тел вращения радиуса R_0 и массой m относительно осей вращения проходящих через центр масс тел:

Тело вращения	Момент инерции I_0	Ось вращения
Кольцо и полый цилиндр	mR_0^2	ось вращения совпадает с осью симметрии тела
Диск и сплошной цилиндр	$\frac{1}{2}mR_0^2$	ось вращения совпадает с осью симметрии тела
Шар	$\frac{2}{5}mR_0^2$	ось вращения проходит через центр масс тела
Тонкий стержень длиной L	$\frac{1}{12}mL^2$	ось вращения проходит перпендикулярно стержню

Рассмотрим ситуацию, когда тело вращается вокруг оси *не проходящей* через его центр масс. Вычисление момента инерции тела относительно этой оси значительно упрощается, если воспользоваться теоремой Штейнера-Гюйгенса.

Теорема Штейнера-Гюйгенса.

Рассмотрим вращение тела массой m относительно оси OO' (рис.3.3). Центр масс тела при вращении движется по окружности радиуса a . Тогда, согласно

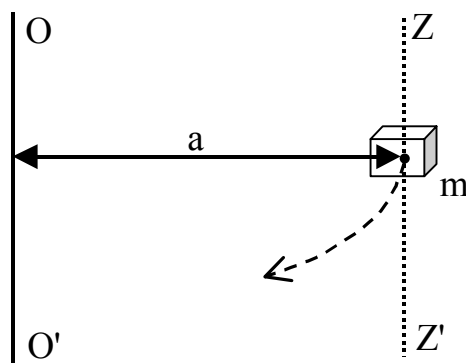


Рис. 3.3

теореме Штейнера – Гюйгенса, момент инерции тела I относительно оси OO' определяется выражением

$$I = I_0 + ma^2 \quad (3.11)$$

где I_0 - момент инерции тела относительно оси ZZ' , проходящей через центр масс тела и параллельной оси OO' ; a - расстояние между осями OO' и ZZ' .

Действительно, представим движение тела вокруг оси OO' как суперпозицию двух движений: поступательного движения центра масс тела с линейной скоростью $v = \omega a$ и вращательного движения тела с угловой скоростью ω относительно оси ZZ' . Тогда полная кинетическая энергия движения тела E_k будет представлять собой сумму двух энергий: кинетической энергии поступательного и вращательного движения

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2(ma^2 + I_0). \quad (3.12)$$

С другой стороны, кинетическая энергия вращательного движения тела E_k относительно оси OO' определяется выражением (3.9) в котором под I_{zz} следует понимать момент инерции тела I относительно оси OO' . Сравнивая (3.9) и (3.12), получаем соотношение (3.11), которое и является математическим

выражением теоремы Штейнера-Гюйгенса. Таким образом, использование теоремы значительно упрощает расчет моментов инерции тел относительно

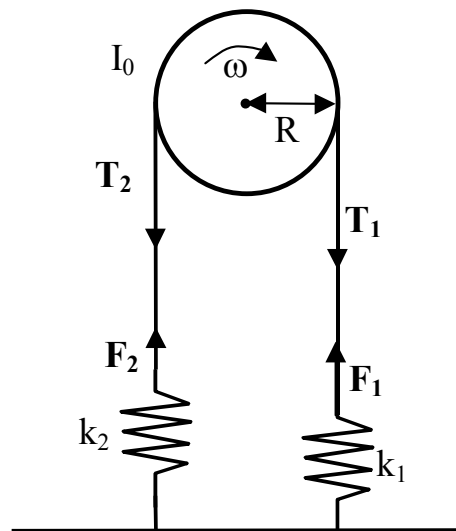


Рис. 3.4

произвольных осей вращения. Для этого достаточно вычислить момент инерции тела I_0 относительно оси проходящей через его центр масс и параллельной оси вращения.

Момент инерции тела можно измерить экспериментально, например, по периоду вращательных колебаний. Для получения колебательной системы через шкив стойки перекидывается нить, концы которой посредством двух пружин прикрепляется к штырям в основании стойки. Полученная система и действующие в ней силы показаны на рис. 3.4.

Движение рассматриваемой системы описывается уравнением:

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = R(T_1 - T_2) \quad (3.12)$$

где I_0 - момент инерции шкива радиуса R относительно оси вращения.

Силы натяжения нити T_1 и T_2 связаны с силами упругости

$$T_1 = -k_1 x, \quad T_2 = k_2 x \quad (3.13)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты жесткости пружин, x - деформация пружин. В свою очередь, деформация пружин x связана с углом поворота шкива φ соотношением

$$x = R\varphi. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), получаем уравнение колебательного движения системы в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k_{\text{пар}}R^2}{I_0}\varphi = 0 \quad (3.15)$$

где $k_{\text{пар}}=k_1+k_2$ - коэффициент жесткости параллельно соединенных пружин.

Из уравнения (3.15) следует, что система будет совершать колебательные движения около положения равновесия с частотой

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k_{\text{пар}}R^2}{I_0}} \quad (3.16)$$

где T_0 - период колебаний системы.

Таким образом, выражение (3.16) позволяет определить момент инерции тела по экспериментально измеренному периоду колебаний системы

$$I_0 = \frac{k_{\text{пар}}R^2T_0^2}{4\pi^2} \quad (3.17)$$

Порядок выполнения работы

Упражнение 3.1

Момент инерции ненагруженного шкива.

Соберите экспериментальную установку согласно рис.3.4. Поворотом шкива риску указателя установите напротив нулевого деления шкалы. Измерения периода колебаний системы проводятся в режиме циклических измерений (тумблер "ЦИКЛ/ОДНОКР" в положение "ЦИКЛ"), тумблер "1/2" в положении "2". В этом режиме будет проводиться последовательное измерение серии

периодов колебаний. Проведите измерения периода колебаний T_0 ненагруженного шкива не менее 5 раз и вычислите момент инерции шкива I_0 по формуле (3.17). При расчете используйте значение коэффициента жесткости параллельно соединенных пружин полученное из упражнений по теме 2. Результаты измерений занесите в таблицу 3.1.

Таблица 3.1

T_0 , сек	$k_{\text{пар}}$, Н/м	I_0 , кг·м ²	$\langle I_0 \rangle$, кг·м ²

Упражнение 3.2

Момент инерции диска

На шкив установите диск из набора прилагаемого к установке и зафиксируйте его на оси шкива пластмассовой втулкой. Проведите измерения периода колебаний T полученного составного тела (шкив плюс диск). Найдите момент инерции I шкива с диском. Момент инерции диска I_D находится по результатам измерений по формуле $I_D = I - I_0$, где I_0 - момент инерции ненагруженного шкива.

Результаты измерений занесите в таблицу 3.2 и сравните полученное экспериментальное значение I_D с расчетным моментом $I_{\text{др}}$.

Таблица 3.2

Масса диска m , г	T , сек	I , кг·м ²	I_D , кг·м ²	$I_{\text{др}}$, кг·м ²

Упражнение 3.3

Момент инерции легкого стержня.

Установите на шкив легкий стержень длиной L , так чтобы ось вращения шкива проходила через середину стержня и зафиксируйте его на оси шкива



пластмассовой втулкой. Проведите измерения периода колебаний системы T , найдите момент инерции стержня $I_C = I - I_0$ и занесите результаты в таблицу 3.3. Сравните полученное значение с расчетным моментом инерции I_{CP} .

Таблица 3.3

Масса стержня m , длина L	T , сек	I , кг·м ²	I_C , кг·м ²	I_{CP} , кг·м ²

Упражнение 3.4

Экспериментальная проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса

На шкиве размещается легкий стержень с отверстиями как в упражнении 3.3, а на нем – два груза массами m_1 и m_2 с штырями симметрично на расстоянии a от оси вращения шкива. Согласно теореме Штейнера-Гюйгенса момент инерции I сложного тела определяется выражением

$$I = I_0 + I_C + I_{10} + I_{20} + (m_1 + m_2)a^2 \quad (3.18)$$

где I_0 - момент инерции шкива, I_C - момент инерции легкого стержня без грузов, I_{10}, I_{20} - моменты инерции грузов массами m_1 и m_2 относительно осей проходящих через их центры масс и параллельных оси вращения шкива.

В упражнении исследуется зависимость момента инерции I сложного тела от расстояния a грузов от оси вращения. При нулевом расстоянии грузы закрепляются один на другом.

Согласно (3.18) моменты инерции сложного тела при двух расстояниях грузов от оси вращения a_1 и a_2 будут соответственно равны

$$I_1 = I_0 + I_C + I_{10} + I_{20} + (m_1 + m_2)a_1^2, \quad I_2 = I_0 + I_C + I_{10} + I_{20} + (m_1 + m_2)a_2^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем следующее соотношение

$$I_2 - I_1 = (m_1 + m_2)(a_2^2 - a_1^2). \quad (3.19)$$



Из которого следует, что отношение приращения момента инерции $\Delta I = I_2 - I_1$ к приращению квадрата расстояния $\Delta a^2 = a_2^2 - a_1^2$ грузов от оси вращения должно равняться сумме масс грузов. Это следствие проверяется экспериментально и результаты измерений заносятся в таблицу 3.4.

Таблица 3.4

	Расстояние грузов от оси a , см			
Суммарная масса груза $m_1 + m_2$, г				
Момент инерции I , кг·м ²				
$\Delta I / \Delta a^2$				

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется моментом инерции тела?
2. Провести расчет моментов инерции простых тел (диска, стержня, цилиндра).

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. т.1, Наука, 1974, §§33-36
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, Наука, 1982, §39-41
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности, 1986, Высш. школа, §31-33



4. Динамика вращательного движения Краткая теория

Вращательное движение механической системы будем изучать на следующем примере. На шкив вращающийся вокруг горизонтальной оси OZ намотана нить. К концу нити подвешен груз массой m . Вся система находится в поле тяжести Земли (рис.4.1). Если груз отпустить, то система придет в движение

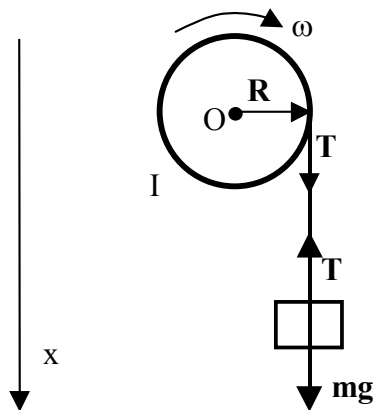


Рис. 4.1

описываемое системой уравнений

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \quad (4.1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

где I - момент инерции шкива относительно оси вращения, ω - угловая скорость шкива, M - суммарный момент сил действующих на шкив, v - линейная скорость груза, F - суммарная сила действующая на груз. Исследование характера движения системы будем проводить при упрощающих условиях:

- нить невесома и нерастяжима
- движение груза массой m происходит под действием только двух сил: силы натяжения нити T и силы тяжести mg
- в системе присутствуют силы трения, действие которых будем учитывать через суммарный момент сил трения $M_{тр}$.



Перейдем от векторной записи уравнений движения системы (4.1) к проекциям на соответствующие оси (ось вращения OZ и ось x). Тогда с учетом того, что $M=[RT]+M_{тр}$ и момент сил трения является тормозящим, получаем

$$I \frac{d\omega}{dt} = RT - M_{тр} \quad (4.2)$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T$$

где R- радиус шкива. Для полного описания движения системы уравнения (4.2) необходимо решать совместно. Сведём систему уравнений (4.2) к одному дифференциальному уравнению.

В силу нерастяжимости нити подвеса, линейная скорость v движения груза связана с угловой скоростью вращения ω шкива соотношением

$$v = \omega R. \quad (4.3)$$

Умножим второе уравнение в (4.2) на R и сложим с первым. Учитывая (4.3), получаем уравнение движения системы

$$(I + mR^2) \frac{d\omega}{dt} = mgR - M_{тр}. \quad (4.4)$$

Для полного описания движения рассматриваемой системы необходимо дополнить (4.4) начальными условиями для угла поворота и угловой скорости шкива и указать явный вид момента силы трения. Рассмотрим движения системы в конкретных случаях.

Равноускоренное движение

Пусть суммарный момент сил трения в системе равен нулю, т.е. $M_{тр}=0$, в начальный момент времени $t_0=0$ система покоилась и положение шкива относительно заданного направления определялось углом $\varphi=0$. Тогда из (4.4) следует, что движение системы будет происходить с постоянным угловым ускорением



$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgR}{I + mR^2} = \text{const.} \quad (4.5)$$

Угловая скорость вращения в этом случае зависит от времени по линейному закону $\omega(t) = \beta t$, а угол поворота шкива φ по квадратичному закону

$$\varphi(t) = \beta t^2 / 2. \quad (4.6)$$

Следовательно, экспериментально измеряя время t_1 одного поворота шкива на угол 2π или время t_2 двух оборотов на угол 4π , из (4.6) можно найти угловое ускорение β шкива. По найденному угловому ускорению, известному радиусу шкива R и массе тела m , из (4.5) можно найти момент инерции шкива I .

Закон сохранения энергии при поступательном и вращательном движении

Пусть в рассматриваемой системе момент сил трения равен нулю. Умножим второе уравнение в (4.2) на R и выразим величину RT :

$$RT = mgR - mR \frac{dv}{dt} \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в первое уравнение (4.2), получаем

$$I \frac{d\omega}{dt} = mgR - mR \frac{dv}{dt} \quad (4.8)$$

Умножим левую и правую части (4.8) на ω и учтем в правой части, что $\omega = v/R$, тогда

$$I \frac{d\omega}{dt} \omega = mgv - m \frac{dv}{dt} v.$$

Перенесем производную от линейной скорости в левую часть и учтем, что

$$\frac{d\omega}{dt} \omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right), \quad \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right).$$

Тогда получаем следующее уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) = mgv. \quad (4.9)$$

Видно, что в левой части (4.9) стоит производная по времени от полной кинетической энергии системы E_k , которая в свою очередь является суммой кинетических энергий вращательного движения шкива $E_{кв} = \frac{1}{2}I\omega^2$ и

поступательного движения груза $E_{кп} = \frac{1}{2}mv^2$. В правой части (4.9) сделаем

замену $v = \frac{dx}{dt}$ и умножим левую и правую части на dt , тогда

$$dE_k = mgdx. \quad (4.10)$$

Проинтегрировав левые и правые части (4.10) окончательно получаем, что

$$\Delta E_k = mgx,$$

т.е. изменение полной кинетической энергии рассматриваемой системы равно работе сил тяжести по перемещению груза массой m на расстояние x . Последнее полученное соотношение можно проверить экспериментально. Для этого рассмотрим начальное и конечное состояния системы.

В начальном состоянии шкив и подвешенный на нити груз находятся в состоянии покоя, т.е. начальная кинетическая энергия $E_{к1}$ системы равна нулю, а расстояние от основания установки до нижнего торца груза равно x .

В конечном состоянии, после опускания груза m на основание и его остановки, полная кинетическая энергия $E_{к2}$ системы будет равна кинетической энергии вращающегося шкива. Тогда изменение полной кинетической энергии равно $\Delta E_k = E_{к2}$ и, следовательно

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = mgx \quad (4.11),$$

где ω - угловая скорость шкива **непосредственно после** остановки груза m . Все входящие в (4.11) величины (I , ω , x) могут быть измерены независимо и равенство (4.11) может быть проверено экспериментально.



Динамика вращательного движения с учетом сил трения.

Пусть в рассматриваемой механической системе масса груза m равна нулю, а момент сил трения отличен нуля. Тогда из (4.4), движение системы будет определяться уравнением

$$I \frac{d\omega}{dt} = -M_{\text{тр}}. \quad (4.12)$$

Дополним его начальными условиями: в начальный момент времени $t_0=0$ угол поворота шкива $\varphi=0$, угловая скорость $\omega=\omega_0$.

Найдем связь между изменением кинетической энергии при вращательном движении и углом поворота $d\varphi$. Искомая связь может быть найдена по выше изложенной процедуре, либо найдена исходя из аналогий между вращательным и поступательным движением (тема 3) и записана в виде

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = -M_{\text{тр}} d\varphi. \quad (4.13)$$

Для решения уравнений (4.12), (4.13) необходимо задать конкретный вид для моментов сил трения действующих в системе.

Сухое трение. В случае сухого трения момент сил трения является величиной постоянной

$$M_{\text{тр}} = M_0 = \text{const}. \quad (4.14)$$

Интегрируя выражения (4.12), (4.13) с учетом (4.14) и начальных условий, получаем следующие зависимости угловой скорости ω от времени t и квадрата угловой скорости от угла поворота φ

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M_0}{I} t, \quad (4.15)$$

$$\omega^2(\varphi) = \omega_0^2 - \left(\frac{2M_0}{I}\right)\varphi. \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) видно, что эти зависимости линейны.

Вязкое трение. В случае вязкого трения момент сил трения пропорционален угловой скорости

$$M_{\text{тр}} = k\omega. \quad (4.17)$$

С учетом этой зависимости, интегрируя (4.12) и (4.13) получаем:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\gamma t} \quad (4.18)$$

$$\omega(\varphi) = \omega_0 - \gamma\varphi \quad (4.19)$$

где $\gamma=k/I$. При этом линейны зависимости скорости ω от угла поворота φ и логарифма скорости от времени t .

Аэродинамическое трение. В этом случае между моментом сил трения и угловой скоростью существует связь вида

$$M_{\text{тр}} = q\omega^2 \quad (4.20)$$

Интегрируя (4.12), (4.13) с учетом (4.20), получаем следующие зависимости

$$\frac{1}{\omega(t)} = \lambda t - \frac{1}{\omega_0} \quad (4.21)$$

$$\omega(\varphi) = \omega_0 e^{-\lambda\varphi} \quad (4.22)$$

где $\lambda=q/I$. При этом линейны зависимости логарифма скорости от угла поворота и величины, обратной скорости, от времени.

Как правило, в реальных механических системах момент сил трения более сложным образом зависит от скорости её движения. Однако, можно создать такие условия, когда в системе будут преобладать силы трения одного из рассмотренного вида.

Порядок выполнения работы

Упражнение 4.1

Проверка равнопеременного движения

На шкив наматывается нить (конец нити с узлом заземляется в прорези шкива) и подвешивается на ней груз массой m . На шкив устанавливается тяжелый стержень без грузов. Стержень удерживается в начальном положении рукой или специальным штырем, вставленным в отверстие колонны стойки. Поворотом шкива риска указателя устанавливается напротив нулевого деления шкалы. Отпустив шкив (убрав резко руку или выдернув штырь), измеряется время t_1 поворота шкива на угол 2π , затем время t_2 поворота шкива на угол 4π . Измерения времен проводится не менее 3 раз для груза массы m и находится величина $D=(\langle\tau_2\rangle/\langle\tau_1\rangle)^2$, служащая критерием равнопеременного движения (см. упражнение 1.1.). Далее измерения повторяются для грузов с другими массами. Результаты измерений записываются в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

$m, \text{ г}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$\langle t_1 \rangle, \text{ с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{ с}$	D

Упражнение 4.2

Зависимость углового ускорения сложного тела от момента сил и момента инерции системы

На шкиве размещается легкий стержень с отверстиями, а на нем – два груза массами m_1 и m_2 со штырями симметрично относительно оси вращения шкива на расстоянии a . На шкив наматывается нить (конец нити с узлом заземляется в прорези шкива) и подвешивается на ней груз массой m . По методике упражнения 4.1 проводятся измерения времени t_1 поворота шкива на угол 2π . В силу равноускоренного движения системы, на основании (4.5) и (4.6), момент инерции шкива с установленным стержнем I находится из формулы

$$I = mgRt_1^2 / 4\pi. \quad (4.23)$$



В упражнении исследуются зависимости углового ускорения β и момента инерции сложного тела в зависимости от расстояния a грузов от оси вращения. При нулевом расстоянии грузы закрепляются один на другом. Контроль правильности измерений моментов инерции проводится как в упражнении (4.4): отношение приращения момента инерции ΔI к приращению квадрата расстояния Δa^2 грузов от оси должно равняться сумме масс грузов. Результаты измерений оформляются в таблице 4.2.

Таблица 4.2

	Расстояние грузов от оси a , см			
Суммарная масса груза, m_1+m_2 , г				
Масса наборного груза m , г				
Время первого оборота t_1 , с				
Угловое ускорение $\beta=4\pi/t_1^2$, c^{-2}				
Момент инерции I , $кг \cdot м^2$				
$\Delta I/\Delta a^2$, кг				

Примечание. Сравнить результаты измерений моментов инерции полученных данным методом с результатами полученными методом вращательных колебаний (упражнение 3.4).

Упражнение 4.3

Проверка закона сохранения энергии

Экспериментальная установка собирается как в упражнении 4.1. На свободный (ненагруженный) шкив наматывается нить с подвешенным грузом массой m . Линейкой измеряется расстояние x от нижнего края груза до основания стойки. Шкив отпускается и измеряется время t_1 одного оборота шкива сразу **после** того, как груз опустится на основание. Находится угловая скорость шкива $\omega = 2\pi/t_1$, кинетическая энергия вращательного движения $E_{\text{кв}} = I\omega^2/2$ и работа

сил тяжести $A=mgx$. Измерения проводятся для трех различных расстояниях x и результаты заносятся в таблицу 4.3.

Таблица 4.3

Масса груза m , г	Расстояние x , см		
t_1 , см			
Угловая скорость ω , c^{-1}			
Момент инерции I , $кг \cdot м^2$			
Кинетическая энергия $E_{кв}$, Дж			
Работа силы тяжести A , Дж			

Примечание. Момент инерции I шкива должен быть получен независимо, т.е. либо расчетным путем, либо из результатов измерений момента инерции шкива методом вращательных колебаний (упражнение 3.1).

Упражнение 4.4

Аэродинамическое трение

Целью упражнения является определение характера сил трения, действующих в механической системе, по экспериментально измеренным зависимостям угловой скорости от угла поворота. Для нахождения зависимости угловой скорости от угла поворота необходимо разделить угол $\Delta\varphi=2\pi$ поворота на один оборот на время t_N оборота с номером N и найти угловую скорость ω_N для угла поворота φ_N , соответствующего примерно середине данного оборота

$$\omega_N = \frac{2\pi}{t_N} \text{ для } \varphi_N = \pi(2N - 1).$$

При быстром вращении, чтобы успевать регистрировать отсчеты, установите режим парных измерений и регистрируйте пары оборотов

$$\omega_N = \frac{4\pi}{t_N} \text{ для } \varphi_N = 2\pi(2N - 1).$$

Стержень с отверстиями установите на шкиве стойки так, чтобы центр стержня оказался на оси шкива. Симметрично относительно оси вращения стержня установите два паруса поперек набегающему потоку воздуха.



$E_{квN}, Дж$							
$M_{тр}, Н·м$							

Примечание. Необходимые для расчета кинетической энергии вращательного движения моменты инерции могут быть получены из результатов выполнения упражнений 3.1, 3.2.

Контрольные вопросы и задания

1. Получите зависимости угловой скорости от угла поворота для сухого, вязкого и аэродинамического трения.
2. Получите выражения для коэффициентов γ и λ .

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. т.1, Наука, 1974, §§17,25,44
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т.1, Наука, 1982, §§15, 19-21, 41, 43
3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности, 1986 Высш. школа, §§25,31, 36