УДК 517.5

Односторонние неравенства дискретизации и восстановление по выборке[1]

И. В. Лимонова, Ю. В. Малыхин, В. Н. Темляков
(Москва, Россия)
limonova_irina@rambler.ru, malykhin@mi-ras.ru, temlyak@math.sc.edu

В последнее время в ряде работ результаты о дискретизации по значениям в точках успешно применялись в задачах восстановления по выборке. Более того, оказалось, что для некоторых из этих приложений достаточно иметь одностороннее неравенство дискретизации. Это обстоятельство побудило нас к изучению односторонних неравенств дискретизации и их приложений к задачам восстановления по выборке.

Ключевые слова: дискретизация по значениям в точках, неравенство Никольского, восстановление.

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-71-30001) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

One-sided discretization inequalities and sampling recovery[1]

I. V. Limonova, Yu. V. Malykhin, V. N. Temlyakov
(Moscow, Russia)
limonova_irina@rambler.ru, malykhin@mi-ras.ru, temlyak@math.sc.edu

Recently, in a number of papers it was understood that results on sampling discretization can be successfully used in the problem of sampling recovery. Moreover, it turns out that it is sufficient to only have a one-sided discretization inequality for some of those applications. This motivated us to research one-sided discretization inequalities and their applications to sampling recovery.

Keywords: sampling discretization, Nikol'skii inequality, recovery.

Acknowledgements: This research was supported by the Russian Science Foundation Grant No. 23-71-30001 and performed at Lomonosov Moscow State University.

Введение

Систематическое изучение дискретизации по значениям в точках L_p-норм функций из заданного конечномерного подпространства было начато В. Н. Темляковым в 2017 г. Первые результаты в этом направлении были получены в 1930-е годы С. Н. Бернштейном, Й. Марцинкевичем и А. Зигмундом для одномерных тригонометрических полиномов. В настоящее время это обширная и активно развивающаяся область исследований, имеющая глубокие связи с другими важными направлениями (см. [1], [2]), в частности, с восстановлением функций по выборке (то есть по значениям в точках).

Пусть (Ω, μ) — вероятностное пространство. Мы рассматриваем измеримые функции на Ω, определенные в каждой точке, L_p-норма функций при $1 \le p < \infty$ определяется стандартным образом:

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\Omega,\mu)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Под $L_\infty(\Omega)$-нормой мы понимаем равномерную норму ограниченных функций

$$\|f\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|.$$

Мы также рассматриваем дискретное пространство L_p^m векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_p := \begin{cases} \left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1\le j\le m} |x_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Функции f, определенной на Ω, и набору точек $\xi^1, \dots, \xi^m \in \Omega$ мы ставим в соответствие вектор–выборку (sampling vector)

$$S(f, \xi) := (f(\xi^1), \dots, f(\xi^m)).$$

До сих пор в работах, посвященных дискретизации по значениям в точках L_p-норм функций из N-мерного подпространства X_N, основное внимание уделялось двусторонним неравенствам, которые показывают, что дискретная норма вектора–выборки ограничена снизу и сверху интегральной L_p-нормой функции (умноженной на некоторые константы):

$$C_1\|f\|_p^p \le \|S(f,\xi)\|_p^p \le C_2\|f\|_p^p, \quad \forall f \in X_N.$$

Подобные результаты также известны в литературе как неравенства Марцинкевича–Зигмунда. Было обнаружено, что для некоторых приложений к задачам о восстановлении функции по выборке достаточно иметь одностороннюю оценку.

Мы рассматриваем следующие более общие постановки, в которых параметры дискретной нормы вектора–выборки и интегральной нормы функции могут отличаться. Это обусловлено тем, что в приложениях можно требовать более слабые условия (см., например, теорему 1 ниже).

Односторонняя дискретизация. Пусть заданы вероятностное пространство (Ω, μ), N-мерное подпространство X_N функций на Ω и параметры $1 \le p, q \le \infty$, $D > 0$. Нас интересует выполнение следующих свойств при как можно меньших $m \in \mathbb{N}$.

ЛНД. Будем говорить, что X_N допускает Левое Неравенство Дискретизации, если

$$\|f\|_p \leq D\|S(f,\xi)\|_q, \quad \forall f \in X_N$$

для некоторых точек $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$. Обозначим это свойство как $X_N \in \mathcal{LD}(m,p,q,D)$.

ПНД. Будем говорить, что X_N допускает Правое Неравенство Дискретизации, если

$$\|S(f,\xi)\|_q \leq D\|f\|_p, \quad \forall f \in X_N$$

для некоторых точек $\xi^1, \ldots, \xi^m \in \Omega$. Обозначение: $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$.

Сформулируем несколько полученных результатов, непосредственно о ЛНД и ПНД.

Предложение 1. Пусть $2 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ и подпространство X_N удовлетворяет неравенству Никольского с параметрами 2 и p, то есть для некоторого $M > 0$

$$\|f\|_p \leq M\|f\|_2, \quad \forall f \in X_N.$$

Пусть X_N имеет ортонормированный базис $\{u_i\}_{i=1}^N$ со следующим свойством: $\sum_{i=1}^N |u_i(\omega)|^2 \geq cN$, $c > 0$, для любого $\omega \in \Omega$. Пусть $X_N \in \mathcal{RD}(m,p,q,D)$. Тогда

$$(cN)^{q/2} \leq m(DM)^q.$$

В качестве следствия получается нижняя оценка на число точек для выполнения ПНД для лакунарных тригонометрических систем.

Также доказаны положительные результаты о дискретизации для разных значений p. Здесь мы формулируем их для случая $p = 2$.

Предложение 2. *Существуют две абсолютные положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для любого N-мерного подпространства $X_N \subset L_2(\Omega,\mu)$ выполнено $X_N \in \mathcal{LD}(m,2,C_2)$ с $m \leq C_1 N$, то есть существует набор точек $\{\xi^j\}_{j=1}^m$ такой, что*

$$\|f\|_2 \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{m} |f(\xi^j)|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall f \in X_N.$$

Предложение 3. *Пусть X_N — N–мерное подпространство $L_2(\Omega,\mu)$, тогда $X_N \in \mathcal{RD}(N,2,C)$ для некоторой абсолютной постоянной $C > 0$.*

Приложения к задачам восстановления

Рассмотрим следующий оператор (алгоритм) восстановления:

$$\ell\infty(\xi)(f) := \ell\infty(\xi, X_N)(f) := \arg\min_{u \in X_N} \|S(f-u,\xi)\|_\infty.$$

Напомним, что наилучшее приближение $f \in L_p(\Omega, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, элементами X_N определяется следующим образом:

$$d(f, X_N)_p := \inf_{u \in X_N} \|f-u\|_p.$$

Приведем в качестве примера следствия ЛНД результат о восстановлении функции по выборке.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1,\infty)$ и набор $\xi = \{\xi^j\}_{j=1}^m$ обеспечивает свойство $X_N \in \mathcal{LD}(m,p,\infty,D)$ для подпространства $X_N \subset \mathcal{C}(\Omega)$, то есть для любого $u \in X_N$*

$$\|u\|_p \le D \max_{1\le j\le m} |u(\xi^j)|.$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\|f - \ell\infty(\xi)(f)\|_p \le (2D+1)d(f,X_N)_\infty.$$

В докладе будут рассмотрены и другие алгоритмы восстановления и приведены соответствующие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Дай Ф., Примак А., Темляков В. Н., Тихонов С. Ю.* Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи // УМН. 2019. Т. 74, № 4(448). С. 3—58.

[2] *Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V.* Sampling discretization and related problems // J. Complexity. 2022. Vol. 71, Paper No. 101653.