УДК 517.54

Однолистность и неподвижные точки[1]

О. С. Кудрявцева (ВолгГТУ, Волгоград, Россия),
А. П. Солодов (МГУ, Москва, Россия)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

Найдены точные области однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя с отталкивающей граничной неподвижной точкой в зависимости от расположения притягивающей неподвижной точки и значения угловой производной в отталкивающей неподвижной точке.

Ключевые слова: голоморфное отображение, неподвижные точки, угловая производная, область однолистности.

Благодарности: Работа Солодова А.П. выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Univalence and fixed points[1]

O. S. Kudryavtseva (VSTU, Volgograd, Russia),
A. P. Solodov (MSU, Moscow, Russia)
kudryavceva_os@mail.ru, apsolodov@mail.ru

The sharp domains of univalence on classes of holomorphic self-mappings of the disc with repulsive boundary fixed point are found depending on the localization of the attracting fixed point and the value of the angular derivative at the repulsive fixed point.

Keywords: holomorphic map, fixed points, angular derivative, domain of univalence.

Acknowledgements: The work of Solodov A.P. was supported by the Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation «BASIS».

В работе изучается задача об области однолистности на классах ограниченных голоморфных в круге функций.

Пусть $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ — класс голоморфных отображений единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ в себя, которые оставляют неподвижной граничную точку $z = 1$ (неподвижность понимается в смысле углового предела) и имеют ограничение на значение угловой производной: $f'(1) \leqslant \alpha$, $\alpha > 1$. В [1] показано, что ни при каком $\alpha > 1$ на классе $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ нет непустых областей однолистности. Поскольку любая функция из $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ наряду с отталкивающей неподвижной точкой обязательно имеет притягивающую неподвижную точку, то класс $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ естественно представить в виде объединения непересекающихся подклассов, выделяемых условием расположения притягивающей неподвижной точки q (внутри или на границе круга $\mathbb{D}$): $\mathscr{B}_\alpha\{1\} = \bigcup_{q\in\overline{\mathbb{D}}} \mathscr{B}_\alpha[q, 1]$.

Существование непустых областей однолистности на указанных подклассах класса $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$ при некоторых значениях α было установлено в работе [2].

Точная область однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[q,1]$, где q — внутренняя неподвижная точка, при $\alpha \in (1,4]$ была найдена в [3].

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, $q \in \mathbb{D}$, то f однолистна в области*

$$\mathscr{D} = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{\left|(1+q)(1-q)^{-1}\left(1 - 2\mathrm{Re}\, z + |z|^2\right) - 2i\mathrm{Im}\, z\right|}{1-|z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{V}$, $\mathscr{D} \subset \mathscr{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{V} \neq \mathscr{D}$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, не однолистная в области $\mathscr{V}$.

В [4] получена оценка сверху области однолистности на классе $\mathscr{B}_\alpha[q,1]$, где q — граничная притягивающая неподвижная точка. Следующая теорема показывает, что при $\alpha \in (1,4]$ эта оценка точна.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, $q \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$, то f однолистна в области*

$$\mathscr{U} = \left\{ z \in \mathbb{D} \colon \frac{2}{|1-q|}\,\frac{|1-z||q-z|}{1-|z|^2} < \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{V}$, $\mathscr{U} \subset \mathscr{V} \subset \mathbb{D}$, $\mathscr{V} \neq \mathscr{U}$, найдется функция $f \in \mathscr{B}_\alpha[q,1]$, не однолистная в области $\mathscr{V}$.

Тем самым теоремы 1 и 2 дают полный ответ на вопрос о точной области однолистности на подклассах $\mathscr{B}_\alpha\{1\}$, $\alpha \in (1,4]$, с фиксированным расположением притягивающей неподвижной точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кудрявцева О. С., Солодов А. П.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2019. Т. 210, № 7. С. 120–144.

[2] *Горяйнов В. В.* Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. 2017. Т. 208, № 3. С. 54–71.

[3] *Солодов А. П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85, № 5. С. 190–218.

[4] *Горяйнов В. В., Кудрявцева О. С., Солодов А. П.* Оценка области однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с двумя граничными неподвижными точками // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 512, С. 96–101.