УДК 517.52

Оценка скорости сходимости в принципе локализации Римана[1]

Т. Ю. Семенова (Москва, Россия)
station@list.ru

Для непрерывных периодических функций получена оценка скорости сходимости в утверждении, известном как принцип локализации Римана для тригонометрических рядов. В случае, когда функция обращается в нуль на некотором отрезке, внутри этого отрезка найдена оценка скорости сходимости ряда Фурье к значению функции, близкая к неулучшаемой.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, принцип локализации, скорость сходимости.

Estimation of the rate of convergence in the Riemann localization principle[1]

T. Yu. Semenova (Moscow, Russia)
station@list.ru

For continuous periodic functions, an estimate of the convergence rate is obtained in a statement known as the Riemann localization principle for trigonometric series. In the case when the function vanishes on a certain segment, an estimate of the convergence rate of the Fourier series to the value of the function is found within this segment, close to the unimproved one.

Keywords: rigonometric series, localization principle, convergence rate.

Согласно принципу локализации Римана, сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 зависит лишь от свойств функции в некоторой окрестности этой точки. Другая формулировка принципа локализации: если $f \in L[-\pi, \pi]$ равна нулю на некотором интервале $I \subset (-\pi, \pi)$, то ее ряд Фурье сходится к нулю равномерно на любом компакте $K \subset I$. Помимо факта равномерной сходимости вызывает интерес также оценка скорости этой сходимости. Этому вопросу посвящены работы Э. Хилле, Г. Клейна [1] и С.А. Теляковского [2], где для произвольной 2π-периодической функции $f \in L[-\pi, \pi]$, для любого $\delta \in (0, \pi)$ доказано неравенство

$$\left|S_n(f, x_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\sin(nt)}{t}dt\right| \le \frac{K}{\delta}\left(\omega\Big(f,\, \frac{1}{n}\Big)_L + \frac{|a_0(f)|}{n}\right). \quad (1)$$

Здесь $S_n(f, x)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f, $\omega\big(f, h\big)_L$ — интегральный модуль непрерывности, $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, K — абсолютная постоянная.

Автором рассмотрен случай непрерывных 2π-периодических функций и доказано неравенство, аналогичное (1), но без "неопределенной" постоянной K. В случае, когда f обращается в нуль на некотором отрезке, найдена оценка скорости сходимости внутри этого отрезка, близкая к неулучшаемой.

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ действительнозначных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \bigm| x \in \mathbb{R}\} = \max_{-\pi\le x\le\pi} |f(x)|.$$

Модулем непрерывности функции $f \in C_{2\pi}$ называется величина

$$\omega(f, h) = \max\{|\,f(x_1) - f(x_2)|,\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ |\,x_1 - x_2\,| \le h\},\quad 0 \le h \le \pi.$$

Обозначим $N = n + 0.5$, $\omega_n(f) = \omega\big(f, \frac{2\pi}{3N}\big)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C_{2\pi}$, $\delta_1, \delta_2 \in (0, \pi)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого натурального $n \ge 3$ такого, что $N \ge \frac{2\pi}{3\min\{\delta_1,\delta_2\}}$, выполнено неравенство*

$$\left|S_n(f, x_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} f(x_0+t)D_n(t)dt\right| \le$$

$$\le \omega_n(f)\left(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\right) + \frac{|f(x_0)|}{2N}\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right).$$

Теперь рассмотрим подкласс $C_{2\pi}$, состоящий из функций, равных нулю на некотором отрезке, содержащем точку x_0. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, и $f(x) = 0$ при $x \in [x_0 - \delta_1,\, x_0 + \delta_2]$, $\delta_1, \delta_2 \in (0, \pi)$. Тогда для любого натурального $n \ge 3$ такого, что $N \ge \frac{2\pi}{3\min\{\delta_1,\delta_2\}}$, выполнено неравенство*

$$|S_n(f, x_0)| \le \omega_n(f)\left(\frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2} + 1\right).$$

Оценка теоремы 2 близка к оптимальной.

Теорема 3. *Для любого натурального $n \ge 3$, для любых $\delta_1, \delta_2 \in [\frac{2\pi}{3N}, 1)$ существует функция $f \in C_{2\pi}$ такая, что $f(x) = 0$ при $x \in [-\delta_1,\, \delta_2]$, $\omega_n(f) = 1$ и*

$$|S_n(f, 0)| > \frac{1}{\pi^2}\ln\frac{1}{\delta_1\delta_2}.$$

Из теоремы 2 легко получить оценку скорости сходимости ряда Фурье в точке x_0, если функция $f \in C_{2\pi}$ равна нулю на симметричном отрезке, а также оценку скорости равномерной сходимости на отрезке, содержащимся внутри промежутка, где функция равна нулю.

Следствие 1. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$, $\delta \in (0,\, \pi)$. *Тогда для любого натурального* $n \geq 3$ *такого, что* $N \geq \frac{2\pi}{3\delta}$, *выполнено неравенство*

$$|S_n(f,\, x_0)| \leq \omega_n(f) \left(\frac{2}{\pi^2} \ln \frac{1}{\delta} + 1 \right).$$

Следствие 2. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$ *и* $f(x) = 0$ *при* $x \in [a,\, b] \subset [-\pi,\, \pi]$. *Тогда для любого* $\delta \in \left(0,\, \frac{b-a}{2}\right)$ *и для любого натурального* $n \geq 3$ *такого, что* $N \geq \frac{2\pi}{3\delta}$, *выполнено неравенство*

$$\sup_{x \in [a+\delta,\, b-\delta]} |S_n(f,\, x)| \leq \omega_n(f) \left(\frac{1}{\pi^2} \ln \frac{1}{\delta(b-a-\delta)} + 1 \right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hille E., Klein G.* Riemann's localization theorem for Fourier series // Duke Math. J. 1954. Vol. 21. C. 587–591.

[2] *Теляковский С. А.* Принцип локализации, оценка скорости сходимости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 25. С. 178–181.