УДК 517.52

Оценка модуля производной суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов[1]

А. Ю. Попов (Москва, Россия)
station@list.ru

При небольших положительных значениях x получены оценки сверху и снизу производной суммы синус-ряда с выпуклой последовательностью коэффициентов. Оценка сверху асимптотически неулучшаема, оценка снизу точна по порядку.

Ключевые слова: синус-ряд, выпуклая последовательность коэффициентов, двусторонние оценки.

Estimation of the modulus of the derivative of a sum of a sine series with a convex sequence of coefficients[1]

A. Yu. Popov (Moscow, Russia)
station@list.ru

For small positive values of x, upper and lower bounds are obtained for the derivative of the sum of a sine series with a convex sequence of coefficients. The upper bound is asymptotically best possible, and the lower bound is order-sharp.

Keywords: sine series, convex sequence of coefficients, two-sided estimates.

Рассматриваются синус-ряды

$$g(b;x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \tag{1}$$

последовательности коэффициентов $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ которых монотонно стремятся к нулю:

$$b_1 > 0, \quad b_{k+1} \le b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{2}$$

Класс всех последовательностей b, удовлетворяющих (2), обозначим $\mathfrak{M}$. Нас в основном будет интересовать подкласс $\mathfrak{M}$, состоящий из выпуклых последовательностей (обозначим его $\mathfrak{M}_1$), то есть таких, что

$$b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \ge 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Оценкам сумм рядов (1) с коэффициентами из $\mathfrak{M}$ (или из $\mathfrak{M}_1$) посвящено довольно много работ, начиная с [1]. Упомянем недавние работы [2], [3], где имеется библиография по этой тематике. Положим

$$m(x) = \left[\frac{\pi}{x}\right], \ V(b;x) = \sum_{k=1}^{m(x)} k\, b_k, \ 0 < x \le \pi.$$

В [4] была доказана оценка сверху

$$g(b;x) < x\, V(b;x) \quad \forall x \in (0,\, \pi) \quad \forall b \in \mathfrak{M}, \tag{3}$$

дополненная в [3] оценками снизу ($n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$)

$$g\left(b; \frac{2\pi}{n}\right) \ge 0, \ \ g(b;x) \ge -\frac{b_n}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}\right), \ \ x \in \left(\frac{2\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n}\right) \quad \forall b \in \mathfrak{M}.$$

В [3] доказаны уточнения оценки (3). Заметим, что если $b \in \mathfrak{M}_1$, то $g(b;x) > 0$ $\forall x \in (0,\, \pi)$. В [2], [4], [5] имеются оценки снизу с точными константами сумм синус-рядов с выпуклой последовательностью коэффициентов через различные функции, связанные с последовательностью b (в частности, через V).

Автору не известны работы, в которых выводились бы оценки производной $g'(b;x)$ для последовательности $b \in \mathfrak{M}_1$ общего вида, учитывающие специфику коэффициентов $\{b_k\}$. В [1] (глава 10) $\forall b \in \mathfrak{M}_1$ установлена справедливость соотношений

$$g(b;\,\cdot\,) \in C^1(0,\, 2\pi), \ \ g'(b;x) = o(x^{-2}) \ \text{ при } \ x \to 0.$$

Замечание 1. Если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, kb_k > 0$, то формально продифференцированный ряд (1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k \cos(kx)$ расходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, и существуют такие последовательности $b \in \mathfrak{M}$, что сумма ряда (1) не имеет производной ни в одной точке ([1], глава X, параграф 8). Если же $b \in \mathfrak{M}_1$, то независимо от скорости стремления к нулю b_k ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kb_k \cos(kx)$ суммируется к $g'(b;x)$ методом средних арифметических в каждой точке $x \in (0,\, 2\pi)$.

Авторoм получены следующие результаты.

Теорема 1. *При любом $x \in (0,\, \pi/18]$ выполняется неравенство*

$$|g'(b;x)| \le V(b;x) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{4}$$

Сверху производная суммы синус-ряда оценивается величиной, меньшей $V(b;x)$, сама же оценка верна на большем, чем в теореме 1, полуинтервале.

Теорема 2. *При любом* $x \in (0,\, \pi/2]$ *верна оценка сверху*

$$g'(b;x) \le \sum_{k=1}^{m(x)} \frac{k(k+1)}{2}(b_k - b_{k+1}) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{5}$$

Замечание 2. При любом $m \in \mathbb{N}$ для произвольного набора чисел $\{b_k\}$, $1 \le k \le m+1$, выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k(k+1)}{2}(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{m} k b_k - \frac{m(m+1)}{2} b_{m+1}.$$

Отсюда видно, что правая часть неравенства (5) меньше правой части (4), если $b_{m(x)+1} \ne 0$.

Константа 1 в оценке сверху $g'(b;x)$ через $V(b;x)$ является точной на классе $\mathfrak{M}_1$. Ее нельзя понизить, если последовательность b быстро стремится к нулю. В этой ситуации выпуклость последовательности коэффициентов ряда (1) не требуется.

Теорема 3. *Если* $b \in \mathfrak{M}$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, *то* $g \in C^1(0,\, 2\pi)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k b_k \cos(kx)$ *сходится к* $g'(b;x)$ *в каждой точке интервала* $(0,\, 2\pi)$ *равномерно на отрезках* $[\varepsilon,\, 2\pi - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$. *При дополнительном условии* $b_k = O(k^{-2})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{x \to 0+} \frac{g'(b;x)}{V(b;x)} = 1.$$

Что же касается константы "-1" в оценке снизу $g'(b;x) \ge -V(b;x)$, то при малых x ее можно заменить лучшей.

Теорема 4. *При любом* $x \in \left(0,\, 10^{-3}\pi\right]$ *выполняется неравенство*

$$g'(b;x) \ge -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) V(b;x) \quad \forall b \in \mathfrak{M}_1. \tag{6}$$

Величину $\cos(\pi/8)$ в неравенстве (6) можно уменьшить, но понизить ее до $\cos(\pi/7)$ (даже уменьшив границу для x) автору не удалось. В то же время заменить $\cos(\pi/8)$ числом $2\pi^{-2}$ нельзя: такое неравенство не будет выполняться ни при каких достаточно малых x, если взять $b = \{k^{-a}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $0 < a < 0.1$.

Таким образом, оценка сверху $g'(b;x)$ асимптотически неулучшаема на всем классе $\mathfrak{M}_1$, а оценка снизу — точна по порядку. Отметим, что на всем классе $\mathfrak{M}_1$ может идти речь лишь об оценке модуля производной. Построен пример такой последовательности $b \in \mathfrak{M}_1$, что производная суммы синус-ряда (1) в любой правой полуокрестности нуля бесконечно много раз меняет знак.

В заключение приведем два следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Если $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_1$, то вариация суммы синус-ряда (1) на отрезке $[\pi/(m+1), \pi/m]$ при любом $m \geq 18$ допускает оценку сверху*

$$\operatorname{Var} g(b;x)\Big|_{\pi/(m+1)}^{\pi/m} \leq \frac{\pi}{m(m+1)} \sum_{k=1}^{m} kb_k \leq \frac{\pi}{m+1} \sum_{k=1}^{m} b_k.$$

Следствие 2. *Если $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{M}_1$ и последовательность kb_k неубывает, то для модуля производной суммы синус-ряда (1) верна оценка*

$$|g'(b;x)| \leq \pi^2 x^{-2} b_{m(x)} \quad \forall x \in (0, \pi/18].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 936 с.

[2] *Солодов А. П.* Точные константы в двусторонней оценке С.А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов // Математические заметки. 2020. Т. 107, № 6. С. 906–921.

[3] *Попов А. Ю.* Уточнение оценок сумм синус-рядов с монотонными и косинус-рядов с выпуклыми коэффициентами // Математические заметки. 2021. Т. 109, № 5. С. 768–780.

[4] *Попов А. Ю.* Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Математические заметки. 2003. Т. 74, № 6. С. 877–888.

[5] *Солодов А. П.* Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами // Математический сборник. 2016. Т. 207, № 12. С. 124–158.