УДК 517.984

Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов высших порядков[1]

Н. П. Бондаренко (Саратов, Россия)

bondarenkonp@sgu.ru

В статье рассматривается обратная спектральная задача, состоящая в восстановлении дифференциального выражения произвольного порядка $n \geq 2$ с коэффициентом-распределением по спектральным данным — собственным значениям $(n-1)$ краевой задачи с распадающимися условиями и соответствующим весовым числам. Представлена теорема единственности решения обратной задачи, кратко описан конструктивный метод ее решения, сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, дифференциальные уравнения высших порядков, теорема единственности, метод спектральных отображений, необходимые и достаточные условия.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

An inverse spectral problem for the higher-order differential operators[1]

N. P. Bondarenko (Saratov, Russia)

bondarenkonp@sgu.ru

In this paper, we consider the inverse spectral problem that consists in the recovery of the differential expression of arbitrary order $n \geq 2$ with a distribution coefficient from the spectral data — the eigenvalues of $(n-1)$ boundary value problems with separated boundary conditions and the corresponding weight numbers. The uniqueness theorem for solution of the inverse problem is presented, a constructive method for its solution is briefly described, and the necessary and sufficient conditions for the problem solvability are formulated.

Keywords: inverse spectral problem, higher-order differential equations, uniqueness theorem, method of spectral mappings, necessary and sufficient conditions.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Доклад посвящен обратной спектральной задаче для уравнения

$$\ell_n(y) := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (\tau_{2k}(x) y^{(k)})^{(k)} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} \big((\tau_{2k+1}(x) y^{(k)})^{(k+1)} + (\tau_{2k+1}(x) y^{(k+1)})^{(k)} \big) = \lambda y, \qquad (1)$$

где $n \geq 2$, $x \in (0,1)$, обозначение $\lfloor a \rfloor$ используется для целой части вещественного числа a, $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$, $\nu = \overline{0, n-2}$, λ — спектральный параметр.

Уравнение (1) с коэффициентом τ_0, являющимся обобщенной функцией из класса $W_2^{-1}[0,1]$, понимается в смысле регуляризационного подхода работы [1]. А именно, уравнение (1) сводится к системе первого порядка вида

$$Y'(x) = (F(x) + \Lambda) Y(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

где $Y(x)$ — вектор-функция (столбец) размера n, Λ — матрица размера $(n \times n)$, у которой элемент в позиции $(n,1)$ равен λ, а все остальные элементы — нулевые, $F(x) = [f_{k,j}(x)]_{k,j=1}^n$ — матрица-функция с суммируемыми на $(0,1)$ элементами, согласованная с дифференциальным выражением $\ell_n(y)$ и построенная в соответствии с результатами работы [2]. С использованием матрицы $F(x)$ вводятся квазипроизводные

$$y^{[0]} := y, \quad y^{[k]} := (y^{[k-1]})' - \sum_{j=1}^{k} f_{k,j} y^{[j-1]}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ обозначим через $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$ собственные значения краевой задачи $\mathcal{L}_k$ для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y^{[j-1]}(0) = 0, \quad j = \overline{1, k}, \qquad y^{[s-1]}(1) = 0, \quad s = \overline{1, n-k}.$$

Будем считать, что выполнены следующие предположения:

(A-1) При каждом $k = \overline{1, n-1}$ собственные значения $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$ простые.

(A-2) $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1} \cap \{\lambda_{l,k+1}\}_{l \geq 1} = \varnothing$ для $k = \overline{1, n-1}$.

Для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через $C_k(x, \lambda)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$C_k^{[j-1]}(0, \lambda) = \delta_{k,j}, \quad j = \overline{1, n},$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера, и введем функции

$$\Delta_{k,k}(\lambda) := \det \left([C_r^{[n-j]}(1, \lambda)]_{j,r=k+1}^n \right),$$

$$\Delta_{k+1,k}(\lambda) := \det \left([C_r^{[n-j]}(1, \lambda)]_{j=\overline{k+1,n}, r=k, \overline{k+2,n}} \right).$$

Заметим, что нули целой аналитической функции $\Delta_{k,k}(\lambda)$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{l,k}\}_{l \geq 1}$. Определим весовые числа:

$$\beta_{l,k} := -\frac{\Delta_{k+1,k}(\lambda_{l,k})}{\frac{d}{d\lambda} \Delta_{k,k}(\lambda_{l,k})}, \quad l \geq 1, \ k = \overline{1, n-1},$$

и рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача 1. *По спектральным данным* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *построить коэффициенты* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ *уравнения* (1).

Доказана теорема единственности решения обратной задачи 1:

Теорема 1. *Спектральные данные* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *однозначно определяют коэффициенты* $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$ *при выполнении условий (A-1) и (A-2).*

Получено конструктивное решение обратной задачи 1, основанное на развитии идей метода спектральных отображений (см. [3, 4]). А именно, нелинейная обратная задача сведена к линейному уравнению

$$(I - \tilde{R}(x))\psi(x) = \tilde{\psi}(x), \tag{3}$$

в банаховом пространстве m ограниченных бесконечных последовательностей. Здесь $\psi(x), \tilde{\psi}(x) \in m$, $\tilde{R}(x)$ — компактный оператор и I — единичный оператор в m. Вектор $\tilde{\psi}(x)$ и оператор $\tilde{R}(x)$ построены по спектральным данным $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}$ неизвестной задачи и модельной задаче того же вида, но с другими коэффициентами $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$. По вектору $\psi(x)$ могут быть найдены коэффициенты $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ (см. подробности в [5, 6]).

Будем говорить, что $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W^+_{simp}$, если $\tau_\nu \in W_2^{\nu-1}[0,1]$, $i^{n+\nu}\tau_\nu(x)$ — вещественные функции при $\nu = \overline{0, n-2}$ и соответствующие собственные значения $\{\lambda_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ удовлетворяют условиям (A-1) и (A-2). Для двух задач с коэффициентами $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ и $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$ из W^+_{simp} введем обозначение

$$\xi_l := \sum_{k=1}^{n-1} \left(l^{-(n-1)}|\lambda_{l,k} - \tilde{\lambda}_{l,k}| + l^{-n}|\beta_{l,k} - \tilde{\beta}_{l,k}| \right), \quad l \geq 1.$$

Получены следующие достаточные условия разрешимости обратной задачи 1.

Теорема 2. *Пусть числа* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *удовлетворяют (A-1), (A-2) и следующим условиям:*

$$\lambda_{l,k} = (-1)^n \overline{\lambda_{l,n-k}}, \quad \beta_{l,k} = (-1)^n \overline{\beta_{l,n-k}} \neq 0, \quad l \geq 1,\, k = \overline{1, n-1},$$
$$\text{\textit{При} } n = 2p\text{:} \quad (-1)^{p+1}\beta_{l,p} > 0, \quad l \geq 1.$$
$$\text{\textit{При} } n = 2p+1\text{:} \quad (-1)^{p+1} Re\, \lambda_{l,p} > 0, \quad l \geq 1.$$

Предположим также, что существует модельная задача с коэффициентами $\{\tilde{\tau}_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W^+_{simp}$*, такая, что* $\{l^{n-2}\xi_l\}_{l\geq 1} \in l_2$*. Тогда у обратной задачи 1 по данным* $\{\lambda_{l,k}, \beta_{l,k}\}_{l\geq 1,\, k=\overline{1,n-1}}$ *существует единственное решение* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2}$*, причем* $\{\tau_\nu\}_{\nu=0}^{n-2} \in W^+_{simp}$*.*

При четном n условия теоремы 2 являются не только достаточными, но и необходимыми. При нечетном n по необходимости выполняются все условия, кроме $(-1)^{p+1}\mathrm{Re}\,\lambda_{l,p} > 0$.

Доказательство теоремы 2 приведено в [6]. Наиболее трудная его часть состоит в исследовании разрешимости основного уравнения (3). В [6] доказана теорема 5.1 о достаточных условиях его разрешимости, которая является новым результатом не только для случая коэффициентов-распределений, но и для регулярных коэффициентов. Условие $\{l^{n-2}\xi_l\}_{l\geq 1} \in l_2$ в теореме 2 означает совпадение коэффициентов $\tilde{c}_{j,k} = c_{j,k}$ и $\tilde{d}_{j,k} = d_{j,k}$ в точных асимптотических формулах для спектральных данных

$$\lambda_{l,k} = l^n \left(c_{0,k} + c_{1,k}l^{-1} + c_{2,k}l^{-2} + \dots + c_{n-1,k}l^{-(n-1)} + l^{-(n-1)}\varkappa_{l,k}\right),$$
$$\beta_{l,k} = -\lambda_{l,k}\left(1 + d_{1,k}l^{-1} + d_{2,k}l^{-2} + \dots + d_{n-2,k}l^{-(n-2)} + l^{-(n-2)}\varkappa^0_{l,k}\right).$$

для основной задачи и модельной. Здесь $\{\varkappa_{l,k}\}$, $\{\varkappa^0_{l,k}\} \in l_2$. Однако нахождение коэффициентов $c_{j,k}$ и $d_{j,k}$ для уравнений высоких порядков является технически трудной задачей. Точные асимптотические формулы и соответствующие теоремы о характеризации спектральных данных без требования существования модельной задачи к настоящему моменту получены только для $n = 2, 3, 4$ (см. [6–8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 788–793.

[2] *Bondarenko N. P.* Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders // Math. Meth. Appl. Sci. 2023. Vol. 46, № 6. P. 6639–6659.

[3] *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 384 с.

[4] *Bondarenko N. P.* Reconstruction of higher-order differential operators by their spectral data // Mathematics. 2022. Vol. 10, № 20. Article ID 3882.

[5] *Bondarenko N. P.* Local solvability and stability of an inverse spectral problem for higher-order differential operators // Mathematics. 2023. Vol. 11, № 18.Article ID 3818.

[6] *Bondarenko N. P.* Necessary and sufficient conditions for solvability of an inverse problem for higher-order differential operators. Cornell University Library, ArXiv, 2023. URL: `https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05222` (дата обращения: 21.11.2023).

[7] *Hryniv R. O.; Mykytyuk Y. V.* Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. Vol. 19, № 3. P. 665–684.

[8] *Bondarenko N. P.* Inverse spectral problem for the third-order differential equation // Results Math. 2023. Vol 78. Article number: 179.