УДК 517.927.2

Об условиях экстремума энергетического функционала в классе разрывных функций[1]

М. Б. Зверева (Воронеж, Россия)
margz@rambler.ru

В настоящей работе вариационными методами получены необходимое и достаточное условия экстремума функционала потенциальной энергии для цепочки стилтьесовских струн, расположенной вдоль отрезка $[0, l]$. При этом предполагается, что в точках $x = 0$ и $x = l$ установлены ограничители на перемещение струн под воздействием внешней силы. Соответствующий аналог уравнения Эйлера представлен в виде интегро - дифференциального уравнения с производной по мере и обобщенным интегрированием по Стилтьесу. В точках $x = 0$ и $x = l$ установлены нелинейные краевые условия. Доказаны существование и единственность решения полученной краевой задачи.

Ключевые слова: минимум функционала, функция ограниченной вариации, производная по мере, интеграл Стилтьеса.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы QRPK-2023-0002).

On the conditions for the extremum of the energy functional in the class of discontinuous functions[1]

M. B. Zvereva (Voronezh, Russia)
margz@rambler.ru

In this work, using variational methods, we obtain necessary and sufficient conditions for the extremum of the potential energy functional for a chain of Stieltjes strings located along the segment $[0, l]$. It is assumed that at points $x = 0$ and $x = l$ limiters on the movement of the strings under the influence of an external force are installed. The corresponding analogue of the Euler equation is presented in the form of an integro-differential equation with measure derivative and generalized Stieltjes integral. Nonlinear boundary conditions at the points $x = 0$ and $x = l$ are established. The existence and uniqueness of the solution to the resulting boundary value problem are proved.

Keywords: minimum of a functional, function of bounded variation, derivative with respect to measure, Stieltjes integral.

Acknowledgements: This research was supported by the Ministry of Education of the Russian Federation within the framework of the state task in the field of science (topic number QRPK-2023-0002).

Введение

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox расположена разрывная стилтьесовская струна (цепочка из струн, скрепленных между собой пружинами). Концы цепочки в точках $x = 0$ и $x = l$ прикреплены к спицам, по которым они могут скользить (без учета трения). При этом в точках $x = 0$ и $x = l$ дополнительно установлены ограничители на перемещения струн, представленные отрезками $[-m_1, m_1]$ и $[-m_2, m_2]$ соответственно, где $m_1 > 0$, $m_2 > 0$.

Обозначим через $BV[0, l]$ множество функций ограниченной вариации на отрезке $[0, l]$. Под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F \in BV[0, l]$, струна переходит из положения равновесия в положение, описываемое с помощью функции $u(x)$. Заметим, что скачки функции F в точках разрыва соответствуют сосредоточенным в этих точках силам. Условия нахождения концов струн внутри ограничителей означают, что $|u(0)| \le m_1$, $|u(l)| \le m_2$.

Мы рассматриваем случай, когда функция $u(x)$ может быть разрывна в не более чем счетном множестве точек. Заметим, что во всякой точке разрыва ξ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$, описывающие отклонения от положения равновесия соответствующих концов струн.

Функционал потенциальной энергии такой физической системы имеет вид (см.[1],[2])

$$\Phi(u) = \int\limits_0^l \frac{pu_\mu'^2}{2} d\mu + \int\limits_0^l \frac{u^2}{2} d[Q] - \int\limits_0^l ud[F]. \tag{1}$$

Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$, масштабирующей отрезок $[0, l]$, такой, что функции $u(x)$ могут считаться μ – абсолютно - непрерывными. Функция $u(x)$ является μ – абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta f d\mu,$$

где интеграл понимается по Лебегу–Стилтьесу. Функция f называется μ производной от u по мере μ и обозначается через u'_μ. Заметим, что μ-абсолютно непрерывная функция $u(x)$ может быть разрывной лишь в точках разрыва $\mu(x)$. Причем, во всякой точке ξ разрыва функции μ справедливо равенство $u'_\mu(\xi) = \dfrac{u(\xi + 0) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)}$.

Функция $p \in BV[0, l]$ характеризует натяжение струн, причем $\inf\limits_{(0,l)} p > 0$. Мы предполагаем, что значения функции $p(x)$ в точках разрыва $\mu(x)$

совпадают с коэффициентами упругости пружин, соединяющих соответствующие концы струн. Возрастающая функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды. В частности, мы допускаем наличие в не более чем счетном множестве точек дополнительных упругих опор (пружин). Скачки функции $Q(x)$ в точках разрыва совпадают с жесткостями соответствующих пружин.

В функционале (1) первый интеграл понимается по Лебегу - Стилтьесу по мере, порождаемой функцией $\mu(x)$ (мера всякой точки ξ разрыва $\mu(x)$ определяется с помощью скачка $\Delta\mu(\xi) = \mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)$). Второй и третий интегралы понимаются в обобщенном смысле по Стилтьесу (когда мера сингулярных точек "расщепляется"). Интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v]$ впервые был введен Ю.В. Покорным в [2]. Такой интеграл мы называем π -интегралом. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о π - интеграле, мы будем заключать функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Следуя [2], для функций ограниченной вариации $u(x)$ и $v(x)$ π - интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v]$ может быть представлен в виде

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} ud[v] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0 + \sum_{\alpha<s\leq\beta} u(s-0)\Delta^- v(s) + \sum_{\alpha\leq s<\beta} u(s+0)\Delta^+ v(s),$$

где v_0 — непрерывная часть функции v; $\Delta^- v(s) = v(s) - v(s-0)$, $\Delta^+ v(s) = v(s+0) - v(s)$; интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} udv_0$ понимается в обычном смысле по Лебегу-Стилтьесу.

Будем рассматривать функционал (1) на множестве E μ -абсолютно непрерывных функций, таких что $u'_\mu \in BV[0,l]$, и удовлетворяющих условиям

$$|u(0)| \leq m_1, \quad |u(l)| \leq m_2. \tag{2}$$

Согласно принципу Гамильтона - Лагранжа, реальная деформация u_0 минимизирует функционал Φ при условиях (2).

Основные результаты

Пусть $f_1 = F(0+0) - F(0)$, $f_2 = F(l) - F(l-0)$, $\gamma_1 = Q(0+0) - Q(0)$, $\gamma_2 = Q(l) - Q(l-0)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $u_0(x)$ минимизировала функционал потенциальной энергии $\Phi(u)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$u_0(x)$ *являлась решением задачи*

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ p(+0)u'_\mu(+0) - \gamma_1 u(0) + f_1 \in N_{[-m_1,m_1]}(u(0)), \\ -p(l-0)u'_\mu(l-0) - \gamma_2 u(l) + f_2 \in N_{[-m_2,m_2]}(u(l)). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь через $N_C(x)$ обозначен нормальный конус в точке $x \in C$ ко множеству C, определяемый числовым множеством

$$N_C(x) = \{\xi \in R : \xi(c - x) \leq 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Из уравнения в (3) вытекает, что в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ справедливы равенства

$$-p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi),$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0)u'_\mu(\xi + 0) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi),$$

а в точках s, в которых функция $\mu(x)$ непрерывна, и хотя бы одна из функций p, Q, F разрывна, верно равенство

$$-p(s+0)u'_\mu(s+0) + p(s-0)u'_\mu(s-0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s).$$

Теорема 2. *Решение задачи (3) существует и единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Kamenskii M., Raynaud de Fitte P., Wong N.-Ch., Zvereva M.* A model of deformations of a discontinuous Stieltjes string with a nonlinear boundary condition // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. 2021. V. 5, № 5. P. 737–759.

[2] *Pokorny Yu. V.* The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations // Doklady Mathematics. 1999. V. 59, № 1. P. 34–37.