УДК 517.2 + 519.853

Об остром минимуме в задаче чебышевского приближения[1]

С. И. Дудов, М. А. Осипцев (Саратов, Россия)
DudovSI@info.sgu.ru Osipcevm@gmail.com

Показано, что решение задачи наилучшего равномерного приближения непрерывной функции полиномом по чебышевской системе функций характеризуется острым минимумом. А именно, имеет место линейная оценка роста отклонения целевой функции коэффициентов полинома данной задачи от её минимального значения относительно отклонения вектора вектора коэффициентов от оптимального.

Ключевые слова: альтернанс, чебышевская система функций, острый минимум.

On the sharp minimum in the Chebyshev approximation problem[1]

Sergei I. Dudov, Mikhail A. Osiptsev (Saratov, Russia)
DudovSI@info.sgu.ru Osipcevm@gmail.com

It has been demonstrated that the solution to the problem of achieving the best uniform approximation of a continuous function by a polynomial over the Chebyshev system of functions is characterised by a sharp minimum. Specifically, there is a linear estimate of the growth of the deviation of the target function's coefficients for the polynomial of this problem from its minimum value with respect to the deviation of the coefficient vector from the optimal value.

Keywords: alternance, Chebyshev function system, sharp minimum.

1. Говорят, что в задаче на условный экстремум

$$f(x) \to \min_{x \in D}, \quad D \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

в точке $x_0 \in D$ имееет место острый минимум ([1]), если существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x) - f(x_0) \geq \delta \|x - x_0\|, \quad \forall x \in D. \tag{2}$$

Эта оценка роста (2) целевой функции задачи (1), выражаемая правой частью неравенства (2), имеет важное конструктивное значение при разработке численных методов решения задачи и оценке их скорости сходимости. Очевидно далеко не в любой экстремальной задаче острый минимум имеет место. Однако в определённых ситуациях сочетания свойств целевой функции $f(x)$ и допустимого множества аргументов D он может быть предопределен. Как будет показано ниже, эта предопределённость присутствует в задачах чебышевского приближения.

2. Пусть $f(t)$ – непрерывная на множестве $T \subset \mathbb{R}$ функция, $|T| \geq n+2$. Рассматриваем задачу

$$F(A) \equiv \max_{t \in T} |f(t) - P_n(A,t)| \to \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \tag{3}$$

равномерного на T приближение функции $f(t)$ обобщенным полиномом $P_n(A,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(t)$ по чебышевской ([2], [3]) на T системе функций $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=\overline{0,n}}$, где $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Для системы точек $t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$ из T определим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} -\varphi_0(t_0) & \varphi_0(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_0(t_{n+1}) \\ -\varphi_1(t_0) & \varphi_1(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_1(t_{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_n(t_0) & \varphi_n(t_1) & \dots & (-1)^{n+1}\varphi_n(t_{n+1}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Матрица D невырождена и элементы последнего столбца матрицы $C = D^{-1} = (c_{ij})_{i,j=1,n}$ положительны: $c_{k\,n+1} > 0$, $k = \overline{1, n+2}$.*

Теорема. *Пусть на векторе коэффициентов A^* функция $F(A)$ достигает минимального на $\mathbb{R}^{n+1}$ значения и, при этом, альтернанс реализуется на системе точек $\{t_j\}_{j=\overline{0,n+1}} \subset T : t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$:*

$$F(A^*) = |f(t_j) - P_n(A^*, t_j)|, \quad j = \overline{0, n+1},$$

$$f(t_j) - P_n(A^*, t_j) = P_n(A^*, t_{j+1}) - f(t_j), \quad j = \overline{0, n},$$

и, кроме того, $[t_0, t_{n+1}] \subset T$. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется неравенство

$$F(A) - F(A^*) \geqslant \delta_0 \|A - A^*\|, \tag{4}$$

где

$$\delta = \min_{k=\overline{1,n+2}} \frac{c_{k,n+2}}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n+1} c_{k,j}^2}}. \tag{5}$$

3. Для практического применения полезно располагать хотя бы оценкой снизу для δ. Она естественно будет зависеть от используемой чебышевской системы и системы узлов, на которой реализуется альтернанс. Этот вопрос предполагается обсудить.

В наиболее простом случае величину δ по формуле (5) удается получить в явном виде. Приведем примеры.

1) $n = 1$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1} = \{1, t\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2\}$

$$\delta = \min\left\{\frac{t_2 - t_1}{\sqrt{4 + (t_1 + t_2)^2}}, 1, \frac{t_1 - t_0}{\sqrt{4 + (t_0 + t_1)^2}}\right\}.$$

2) $n = 2$, $\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=0,1,2} = \{1, t, t^2\}$, на системе узлов $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$

$$\delta = \min\left\{\frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4(t_1^2 - t_3^2)^2 + (t_1 - t_3)^2 (t_2(t_3 - t_2) + t_1(t_2 + t_3))^2}},\right.$$
$$\frac{(t_2 - t_0)(t_3 - t_0)(t_3 - t_2)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4(t_0^2 - t_2^2)^2 + (t_2 t_3(t_3 - t_2) + t_0^2(t_2 + t_3) - t_0(t_2^2 + t_3^2))^2}},$$
$$\frac{(t_1 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_0)}{\sqrt{4(t_1 - t_3)^2 + 4(t_1^2 - t_3^2)^2 + (t_1 - t_3)^2(-t_0^2 + t_1 t_3 + t_0(t_1 + t_3))^2}},$$
$$\left.\frac{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)}{\sqrt{4(t_0 - t_2)^2 + 4(t_0^2 - t_2^2)^2 + (t_0 - t_2)^2(t_1(-t_1 + t_2) + t_0(t_1 + t_2))^2}}\right\}.$$

Отметим, что альтернанс, следствием которого стал острый минимум в задаче (1), присутствует также в задачах по полиномиальным оценкам и приближении сегментных функций ([4]– [7]), где также могут быть получены оценки роста целевой функции, подобные оценке (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 383 с.

[2] *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: «Наука», 1976, 568с.

[3] *Дзядык, В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977, 510с.

[4] *Выгодчикова И. Ю., Дудов С.И., Сорина Е. В.* Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, N7, 1175–1183.

[5] *Дудов С.И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой фиксированной ширины // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т.51, N11, 1981–1994

[6] *Дудов С.И., Сорина Е. В.* Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ, 2012, т.24, N5, 44-71

[7] *Волосивец С.С., Дудов С.И., Прохоров Д.В., Хромова Г.В.* Новые методы аппроксимации и оптимизации в задачах действительного и комплексного анализа // Саратов:Изд. Саратовского ун-та, 2016. 296 с.