УДК 517.5

Об определении обобщенной вариации функции через двумерные колебания[1]

А. Н. Бахвалов (Москва, Россия)
an-bakh@yandex.ru

Показано, что для некоторых двумерных классов Ватермана в определениии класса нельзя заменить смешанное приращение двумерным колебанием, т.е. точной верхней гранью смешанных приращений по вложенным прямоугольникам.

Ключевые слова: обобщенная вариация, классы Ватермана, двумерные колебания..

On the definition of the generalized variation of a function by means of two-dimensional oscillations[1]

A. N. Bakhvalov (Moscow, Russia)
an-bakh@yandex.ru

It is proved that for certain two-dimensional Waterman classes, the difference in the definition of the calss cannot be replaced by the two-dimensional oscillation, i.e. by the supremum of the differences over the subrectangles.

Keywords: generalized variation, Waterman classes, two-dimensional oscillations.

Хорошо известно следующий простой факт: при определении вариации функции на отрезке вместо супремума обычных вариационных сумм $V_T(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, где $T = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$, можно рассматривать супремум величин $V_T^o(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{osc}(f, [x_{k-1}, x_k])$, где для множества I положено $\operatorname{osc}(f, I) = \sup_{x,y \in I} |f(x) - f(y)|$.

Этот факт легко переносится на случай различных классов обобщенной ограниченной вариации на отрезке, например, для определенных ниже классов функций ограниченной Λ-вариации он использовался как очевидный уже в работе Ватермана [1].

Для функций двух переменных, имеющих ограниченную вариацию на прямоугольнике в смысле Харди, аналогичное утверждение было использовано (без подробного доказательства) в работе Морица [2].

В данной заметке мы покажем, что для двумерных классов ограниченной Λ-вариации аналогичное утверждение, вообще говоря, не выполняется.

Для промежутка Δ на прямой через $\Omega(\Delta)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}_{n=1}^N$, таких, что $\overline{I_n} \subset \Delta$.

Назовём последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ допустимой, если она не убывает, стремится к бесконечности и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Для интервалов $I_n = (a_n, b_n)$ и $J_k = (\alpha_k, \beta_k)$ положим $f(I_n, y_0) = f(b_n, y_0) - f(a_n, y_0)$ и $f(I_n \times J_k) = f(I_n, \beta_k) - f(I_n, \alpha_k)$. Следуя [2], рассмотрим также двумерные колебания

$$\operatorname{osc}_2(f, I_n \times J_k) = \sup_{x,x' \in I_n,\, y,y' \in J_k} |f(x,y) - f(x,y') - f(x',y) + f(x',y')|.$$

Определение (Ватерман [3]). *Пусть Λ — допустимая. Функция $f(x)$ имеет ограниченную Λ-вариацию на промежутке I, если*

$$V_\Lambda(f; I) = \sup_{\{I_n\} \in \Omega(I)} \sum_n \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < \infty.$$

Для функции двух переменных возьмем две допустимые последовательности Λ и M. Будем обозначать через $V_\Lambda^1(f(x, y_0); I)$ и $V_M^2(f(x_0, y); I)$ ее Λ-вариацию и M-вариацию как функции x при фиксированном $y = y_0$ и от y при $x = x_0$ соответственно. Двумерной компонентой вариации будем называть

$$V_{\Lambda,M}^{1,2}(f; I \times J) = \sup_{\substack{\{I_n\} \in \Omega(I) \\ \{J_k\} \in \Omega(J)}} \sum_{n,k} \frac{|f(I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k}.$$

Определение (Саакян [4], Саблин [5]). *Функция f имеет ограниченную (Λ, M)-вариацию на прямоугольнике $D = I \times J$ (обозначаем $f \in (\Lambda, M)BV(D)$), если конечна ее полная (Λ, M)-вариация*

$$V_{\Lambda,M}(f; D) = V_{\Lambda,M}^{1,2}(f; D) + \sup_{y_0 \in J} V_\Lambda^1(f(x, y_0); I) + \sup_{x_0 \in I} V_M^2(f(x_0, y); J).$$

В основе примера, который мы строим, лежит следующая лемма, идея и частные случаи которой принадлежат Саакяну [4, формула (6)] и Дьяченко [6, Теорема 1].

Лемма. *Пусть N фиксировано, а множество $E \subset [0,1]^2$ таково, что любое его сечение вертикальной или горизонтальной прямой состоит из не более чем N отрезков (возможно, некоторые или все отрезки вырождаются в точки). Пусть допустимые Λ и M таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \mu_k} < \infty. \tag{1}$$

Тогда $\chi_E(x,y) \in (\Lambda, M)BV([0,1]^2)$.

Доказательство. Пусть $f(x,y) = \chi_E(x,y)$. Рассмотрим произвольный фиксированный интервал $I = (a,b)$. Поскольку для любого J положено $f(I \times J) = f(b,J) - f(a,J)$, то $f(I \times J)$ может быть отлично от нуля лишь тогда, когда либо $f(b,J) \neq 0$, либо $f(a,J) \neq 0$. Но если взята система $\{J_j\}_{j=1}^p \in \Omega([0,1])$, то для фиксированной точки x среди величин $|f(x,J_j)|$ есть не более $2N$ единиц, а остальные равны нулю. Отсюда следует , что среди $|f(I \times J_j)|$ есть не более $4N$ ненулевых, по модулю не превосходящих двойки. Тем самым автоматически получаем оценку

$$V_M^y(f,[0,1]) \leq 2\sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{\mu_k}.$$

Вариация по x оценивается аналогично.

Рассмотрим теперь еще и систему $\{I_k\}_{k=1}^p \in \Omega([0,1])$. Для каждого k положим $j(k) = \min\{j \ : \ f(I_k \times J_j) \neq 0\}$. Если же таких j нет, то возьмем $j(k) = p+k$. Тогда

$$S = \sum_{k,j} \frac{|f(I_k \times J_j)|}{\lambda_k \mu_j} \leq 8N \sum_k \frac{1}{\lambda_k \mu_{j(k)}}.$$

По построению все значения $j = j(k) > p$ принимаются только один раз. Если же $j = j(k) \leq p$, то $f(I_k \times J_j) \neq 0$. Поэтому, как и в рассуждениях выше, для фиксированного j_0 может найтись не более $4N$ штук таких k, что $j(k) = j_0$. Положим $j'(k) = j(k)$ для того из них, где произведение $\lambda_k \mu_{j(k)}$ наименьшее, а для остальных определим $j'(k)$ произвольно, но так, чтобы все значения $j'(k)$ были различны. Тогда $S \leq 32N^2 \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k \mu_{j'(k)}}$. Но если $A \geq a$ и $B \geq b$, то $AB + ab \geq Ab + aB$. Поэтому в силу монотонности последовательностей Λ и M получаем, что $S \leq 32N^2 \sum\limits_k \frac{1}{\lambda_k \mu_k}$. Тогда в силу (1) имеем

$$V_{\Lambda,M}^{1,2}(f,[0,1]^2) \leq 32N^2 \sum_k \frac{1}{\lambda_k \mu_k}.$$

Лемма доказана. □

В качестве класса, удовлетворяющего условию (1), можно взять, например, класс функций $(\{n^a\},\{n^b\})BV([0,1]^2)$ при $a+b>1$.

Теорема. *Пусть допустимые последовательности* Λ *и* M *удовлетворяют условию* (1). *Тогда существует измеримая функция* f *из* *класса* $(\Lambda, M)BV([0,1]^2)$, *для которой*

$$\sup_{\{I_n\}\in\Omega([0,1]),\,\{J_k\}\in\Omega([0,1])} \sum_{n,k} \frac{\operatorname{osc}_2(f, I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k} = +\infty, \tag{2}$$

и, тем более,

$$\sup_{\{I_n\}\in\Omega([0,1])\,\{J_k\}\in\Omega([0,1])} \sum_{n,k} \frac{\operatorname{osc}_2(f, \overline{I_n} \times \overline{J_k})|}{\lambda_n \mu_k} = +\infty.$$

Доказательство. Как показано, например, в [7, гл. 10, п. 20], существует всюду плотное на $[0,1]^2$ измеримое множество E, которое пересекается с каждой вертикальной и горизонтальной прямой не более чем по одной точке. Возьмём $f = \chi_E$. По лемме она принадлежит классу $(\Lambda, M)BV([0,1]^2)$. В тоже время, для любой пары невырожденных интервалов (I, J) в силу плотности множества E найдутся две различных точки (x, y) и (x', y'), лежащие в $(I \times J) \cap E$. По свойствам множества E тогда $x \neq x'$, $y \neq y'$, $(x', y) \notin E$ и $(x, y') \notin E$. Отсюда получаем равенство

$$f(x, y) - f(x, y') - f(x', y) + f(x', y') = 2,$$

что автоматически влечёт оценку $\operatorname{osc}_2(f, I \times J) \geq 2$. (Из свойств множества E легко увидеть, что здесь имеет место равенство, но это и не нужно для доказательства.) Тем самым для любых систем $\{I_n\}_{n=1}^N \in \Omega([0,1])$ и $\{J_k\}_{k=1}^K \in \Omega([0,1])$ получаем неравенство

$$\sum_{n,k} \frac{\operatorname{osc}_2(f, I_n \times J_k)|}{\lambda_n \mu_k} \geq 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n} \cdot \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\mu_k},$$

а при увеличении N и K приходим к (2). Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Waterman D.* Estimating functions by partial sums of their Fourier series // JMAA. 1982. V. 87, № 1. P. 51–57.

[2] *Moricz F.* A quantitive version of the Dirichlet–Jordan test for double Fourier series // J. Approx. Theory. 1992. V. 71, P. 344–358.

[3] *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Stud. math. 1972. V. 44, № 1. P. 107–117.

[4] *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН Арм. ССР. 1986. Т. 21, № 6. С. 517–529.

[5] *Саблин А. И.* Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. ВУЗов. Математика. 1987. № 10. С. 66–68.

[6] *Dyachenko M. I.* Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series // Analysis Math. 1995. V. 21, № 1. P. 3–21.

[7] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М: Мир, 1967. 251 с.