УДК 517.9

# Об одной специальной задаче для чётных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля[1]

**Е. Х. Садекова (Москва, Россия)**
vetka.08@mail.ru

В работе изучаются тригонометрические полиномы порядка не выше $n$. Будет показано, что существуют лишь два, различающиеся знаком, решения задачи о нахождении чётного полинома, наименее отклоняющегося от нуля вне интервала $(-\delta, \delta)$ и удовлетворяющего определённым свойствам. Приведены точные по порядку оценки нормы указанного полинома необходимые для намеченных приложений.

*Ключевые слова:* тригонометрический полином, приближение в равномерной метрике, полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля.

# About one special problem for even polynomias that deviate least from zero[1]

**E. H. Sadekova (Moscow, Russia)**
vetka.08@mail.ru

In this work we study trigonometric polynomials of order not higher than $n$. It will be shown that there are only two solutions differing in sign problem of finding an even polynomial that deviates least from zero outside the interval $(-\delta, \delta)$ and satisfying certain properties. Order-precise estimates were written for the norms of the specified polynomial are necessary for the intended applications.

*Keywords:* trigonometric polynomial, approximation in the uniform metric, polynomials least deviating from zero.

## Введение

Пусть $n$ — натуральное число, $0 < \delta < \pi$. Рассмотрим три экстремальные задачи. Среди всех тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка $n$, для которых

$$\max\{|T(x)| : \delta \leqslant |x| \leqslant \pi\} \leqslant 1,$$

найти тот, для которого величина $\|T\| := \max\{|T(x)| : x \in \mathbb{R}\}$ имеет наибольшее значение, и найти это значение, если

(A) на полином $T(x)$ нет дополнительных условий;

(B) $\max\{T(x) : x \in \mathbb{R}\} = -\min\{T(x) : x \in \mathbb{R}\}$;

(C) выполняется условие (B) и полином является чётным.

Решения задач (A) и (B) известны. Задачи являются тригонометрическими аналогами классической задачи об алгебраическом полиноме степени $n$ с равным 1 старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля на отрезках $[-1,-\alpha]$, $[\alpha,1]$ (см. [1] с. 320). Задача (A) соответствует случаю полинома четного порядка. Алгебраический полином для решения задачи (B) найден Н.И.Ахиезером [2]. Соответствующий тригонометрический аналог был указан А.П.Петуховым [3]. Этот полином определен с точностью до знака и является нечетным.

Пусть $\mathcal{I}_{n,\delta}$ — множество таких тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка $n$, что $|T(x)| \leqslant 1$ при $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$, и на интервале $(-\delta,\delta)$ существуют такие три точки $x_1 < x_2 < x_3$, что $T(x_1) > 1$, $T(x_2) < -1$, $T(x_3) > 1$. Для $\mathcal{I}_{n,\delta}$ положим

$$M(T) = \sup\{\min\{T(x_1), -T(x_2), T(x_3)\}\},$$

где супремум берется по всем тройкам точек $x_1 < x_2 < x_3$ указанного типа из интервала $(-\delta,\delta)$. Обозначим

$$\tilde{M} = \sup\{M(T) : T \in \mathcal{I}_{n,\delta}\}.$$

Требуется среди всех полиномов $T \in \mathcal{I}_{n,\delta}$ найти тот полином $T_n(\delta;x)$, у которого величина $M(T_n(\delta;\cdot))$ совпадает с $\tilde{M}$.

В работе доказано утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $n \geqslant 2$, $\dfrac{\pi}{n} < \delta < \pi$. Тогда существует, причем единственный, полином $T_n(\delta;x) \in \mathcal{I}_{n,\delta}$, такой, что выполняется равенство $M(T_n(\delta;\cdot)) = \tilde{M}$. Этот полином обладает следующими свойствами:*

1. *$T_n(\delta;x)$ — четный полином;*

2. *$\|T_n(\delta;\cdot)\| = \tilde{M}$;*

3. *на отрезке $[0,\delta]$ полином $T_n(\delta;x)$ имеет два участка монотонности, а именно, возрастает от своего минимального значения $T_n(\delta;0) = -\tilde{M}$ до своего максимального значения $\tilde{M}$, а затем убывает от $\tilde{M}$ до значения $T_n(\delta;\delta) = 1$;*

4. *на отрезке $[\delta,\pi]$ полином $T_n(\delta;x)$ имеет $n-1$ участков монотонности, на каждом из которых он изменяется от $1$ до $-1$ или от $-1$ до $1$, именно, начиная с точки $x=\delta$ он убывает от 1 до $-1$, затем возрастает от $-1$ до $1$ и т.д., заканчивая точкой $x=\pi$, в которой $T_n(\delta;\pi) = (-1)^{n+1}$.*

Тригонометрический полином $T_n(\delta; x)$ из теоремы 1 назовем *«пробным» полиномом порядка $n$ с параметром $\delta$.*

При $0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{n}$ $T_n(\delta; x) = -\cos nx$.

**Следствие.** *Решение задачи C существует и с точностью до знака совпадает с «пробным» полиномом* $T_n(\delta; x)$ $\left(\dfrac{\pi}{n} < \delta < \pi\right)$.

**Теорема 2.** *Пусть* $0 < \delta < 1/10$,

$$\lambda(\delta) = \log \frac{1 + \sin \dfrac{\delta}{2}}{1 - \sin \dfrac{\delta}{2}}.$$

*Тогда при всех достаточно больших значениях $n\delta$ справедлива оценка:*

$$\frac{1}{9e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)} < \|T_n(\delta; \cdot)\| < \frac{1}{3e} \cdot \frac{e^{n\lambda(\delta)}}{n\lambda(\delta)}.$$

При доказательстве теорем использованы методы из работы Долженко Е.П., Севастьянова Е.А. [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации // М. : Наука, 1965. — 410 с.

[2] *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций // М. : Наука, 1975. — 304 с.

[3] *Петухов А. П.* Об ужах и приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа // Analysis Mathem. — 1985. — Т. 11, № 1. —С. 55–73.

[4] *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* Аппроксимация со знакочувствительным весом (устойчивость, приложения к теории ужей и хаусдорфовым апроксимациям // Изв. РАН. Серия матем., 1999. — Т. 63, №3. — С. 77–118.