УДК 517.982

Об одной последовательности функций с полным спарком[1]

И. М. Избяков (Самара, Россия)
izbyakov.im@ssau.ru

Доказано, что последовательность функций $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ имеет полный спарк в пространстве $L_2[0,1]$, но не является ни бесселевой последовательностью, ни фреймом.

Ключевые слова: полный спарк, фрейм, бесселева последовательность, гильбертово пространство.

Благодарности: Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-878).

About full spark function sequence[1]

I. M. Izbiakov (Samara, Russia)
izbyakov.im@ssau.ru

It's proved that the full spark function sequence $f_n(t) = e^{a_n t}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ in the space $L_2[0,1]$ is not a Bessel sequence or a frame either.

Keywords: full spark, frame, Bessel sequence, Hilbert space.

Acknowledgements: The work performed under the development program of Volga Region Mathematical Center (agreement No. 075-02-2023-878).

В статьях $[1, 2]$ рассмотрены вопросы восстановления элемента f из сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ по модулям скалярных произведений $(|\langle f, \varphi_n\rangle|)_{n=1}^{\infty}$ этого элемента и некоторой системы «измерительных элементов» $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Важной особенностью таких систем является свойство альтернативной полноты.

Определение 1. *Будем говорить, что набор векторов* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ *гильбертова пространства* $\mathcal{H}$ *обладает свойством альтернативной полноты (АП), если для любого подмножества* $S \subseteq \mathbb{N}$ *либо* $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S} = \mathcal{H}$, *либо* $\overline{span}\{\varphi_n\}_{n\in S^C} = \mathcal{H}$.

Следующая теорема сформулирована в [1] для фреймов, хотя существование таких фреймов вызывает вопросы.

Теорема 1. *а) Пусть* $\mathcal{H}$ *— сепарабельное гильбертово пространство, и* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— набор векторов в* $\mathcal{H}$. *Если* $\Phi \in$ *(ВМИ), то* $\Phi \in$ *(АП).*

б) Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем вещественных чисел и пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — набор векторов в $\mathcal{H}$. Если $\Phi \in$ (АП), то $\Phi \in$ (ВМИ).

Определение 2. $[1, 2]$ *Система элементов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ бесконечномерного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется системой с полным спарком, если каждое бесконечное подмножество полно в $\mathcal{H}$.*

Очевидно, что система с полным спарком обладает свойством альтернативной полноты, и, в силу теоремы 1, обеспечивает восстановление по модулям измерений в вещественном гильбертовом пространстве. Видимо, впервые доказательство существования систем с полным спарком в бесконечномерном гильбертовом пространстве было дано в [3].

В [2] построена система с полным спарком в явном виде в пространстве $L_2[0, 1]$. Рассмотрим эту систему подробнее. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вещественных или комплексных чисел такая, что $\lim a_n = a$ и $a_n \neq a$. Тогда система $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L_2[0, 1]$. Действительно, пусть $\langle f, e^{a_n t}\rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е.

$$\int\limits_0^1 f(t)e^{a_n t}\, dt = 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Функция комплексного переменного $\psi(z) = \int_0^1 f(t)e^{zt}\, dt$ является голоморфной в $\mathbb{C}$ (см., напр., [4]) и, по теореме единственности для голоморфных функций, из равенств $\langle f, e^{a_n t}\rangle = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ следует ортогональность f множеству всех экспонент, следовательно, $f = 0$. Так как любая подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к a, то система $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ оказывается системой с полным спарком.

Теорема 2. *Система функций $\{e^{a_n t}\}_{n=1}^{\infty}$ не является бесселевой последовательностью, и следовательно, не является фреймом.*

Доказательство. Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесселевой последовательностью с границей B, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2,\ f \in L_2[0, 1].$$

Фреймом пространства $L_2[0, 1]$ называется система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что существуют числа $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для всех $f \in L_2[0, 1]$,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n\rangle|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Предположим, что $\varphi_n = e^{a_n t}$, $n = 1, 2, \ldots$ является бесселевой последовательностью с границей B. Дальнейшие рассуждения проводятся для вещественных функций. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_1, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \, \|\varphi_1\|^2,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle \varphi_1, \varphi_n \rangle|^2$ сходится.

С другой стороны,

$b_n = |\langle \varphi_1(t), \varphi_n(t) \rangle|^2 = \left(\int\limits_0^1 e^{(a_1+a_n)t} dt \right)^2 = \left(\frac{e^{a_1+a_n}-1}{a_1+a_n} \right)^2 = \left(\frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2.$

Если $\lim \tilde{a}_n = \tilde{a} \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \left(\frac{e^{\tilde{a}}-1}{\tilde{a}} \right)^2 \neq 0$, а следовательно, ряд $\sum b_n$ является расходящимся. Таким образом, последовательность $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ не может являться бесселевой, и не может являться фреймом.

Пусть теперь $\lim \tilde{a}_n = \tilde{a} = 0$. Такая ситуация возможна в том случае, когда a_n сходится к значению, равному первому члену, взятому с противоположным знаком, например, $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}$. Предел этой последовательности равен $-\frac{1}{2}$, в то время как $a_1 = \frac{1}{2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2 = \left(\lim\limits_{\tilde{a}_n\to 0} \frac{e^{\tilde{a}_n}-1}{\tilde{a}_n} \right)^2 = \left(\lim\limits_{\tilde{a}_n\to 0} \frac{e^{\tilde{a}_n}}{1} \right)^2 = 1.$

Следовательно, и в этом случае ряд $\sum b_n$ является расходящимся, а значит, функции $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ не образуют ни бесселеву последовательность, ни фрейм.

Таким образом, доказано, что последовательность функций $\varphi_n(t) = e^{a_n t}$ в пространстве $L_2[0,1]$ не может являться фреймом при любой сходящейся последовательности a_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Cahill J., Casazza P. G., Daubechies I.* Phase retrieval in infinite dimensional Hilbert spaces // Transactions of the AMS, Series B. 2016. V. 3. P. 63-76.

[2] *Botelho-Andrade S., Casazza P., Cheng D., Haas J., Tran T.* Phase Retrieval in $\ell^2(\mathbb{R})$ // http://arxiv.org/abs/math/1804.01139v1 (дата обращения: 14.11.2023).

[3] *Вершинин Р. В.* О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховом пространстве // Математическая физика, анализ, геометрия. 1998. Т. 5.;№ 1/2. С. 3-14.

[4] *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по ТФКП. Москва : Наука, 1989. 480 с.