УДК 517.55

# Об одной краевой задаче для двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами[1]

**А. Б. Лейнартене (Красноярск, Россия)**

aleina@mail.ru

В данной работе сформулирована краевая задача с несмежными начальными данными для двумерного разностного уравнения. Приведена постановка задачи, основные термины, пример схемы решения.

*Ключевые слова:* разностные уравнения, задача Коши.

*Благодарности:* Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2023-936).

# On a boundary value problem for a two-dimensional difference equation with constant coefficients[1]

**A. B. Leinartene (Krasnoyarsk, Russia)**

aleina@mail.ru

In this paper, a boundary value problem with non-adjacent initial data for a two-dimensional difference equation is formulated. The problem statement, basic terms, and an example of a solution scheme are given.

*Keywords:* boundary value problem, two-dimensional difference equation.

В работах [1] – [4] изучалась задача Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами вида:

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x-\alpha) = g(x). \tag{1}$$

А именно, найти такую функцию $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, которая удовлетворяет (1) и совпадает с некоторой заданной функцией начальных данных $\varphi(x)$ на множестве $X_0$:

$$f(x)=\varphi(x), x\in X_0 \tag{2}$$

Задачи вида (1) – (2) возникают в перечислительном комбинаторном анализе [5], теории вейвлетов [6], теории разностных схем при аппроксимации дифференциальных уравнений [7], теории цифровых рекурсивных фильтров [8].

Наряду с задачами Коши в литературе рассматриваются краевые задачи для разностных уравнений [9], когда начальные данные не смежные.

Приведем формулировку такой краевой задачи для двумерного разностного уравнения

$$\sum_{\substack{0\leqslant\alpha_1\leqslant m_1\\0\leqslant\alpha_2\leqslant m_2}} c_{\alpha_1,\alpha_2} f(x-\alpha_1, x-\alpha_2) = 0.$$

Пусть $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ — конечное множество точек, такое, что найдется $m = (m_1, m_2) \in A$, что для любой точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in A$ выполняется условие $\alpha \leqslant m$, т.е. $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant m_1, 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant m_2$. Для $m \in \mathbb{Z}^2_{\geqslant}$ построим множество краевых данных $X_0$ следующим образом. Пусть $0 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_{m_1}$ и $0 \leqslant l_1 < l_2 < \dots < l_{m_2}$ — некоторые целые неотрицательные числа. Тогда $X_0$ — это объединение множеств $X_1$ и $X_2$:

$$X_1 = \bigcup_{i=1}^{m_1} \{(k_i, y)\}_{y=0}^{\infty}, X_2 = \bigcup_{j=1}^{m_2} \{(x, l_j)\}_{x=0}^{\infty}$$

Зададим функцию краевых данных

$$\varphi : X_0 \to \mathbb{C}. \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (1), совпадающего с заданной функцией $\varphi$ краевых данных (3) на $X_0$. Задачу (1), (3) назовем краевой задачей для двумерного разностного уравнения (1).

Отметим, что если найдется $s \in \mathbb{Z}^2$ такое, что $s + A \subset X_0$, тогда начальные данные на множестве $s + A$ должны удовлетворять условию согласования, а именно:

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(m + s - \alpha) = g(m + s).$$

Отметим, что при $k_1 = 0, k_2 = 1, \dots, k_{m_1} = m_1 - 1$ и $l_1 = 0, l_2 = 1, \dots, l_{m_2} = m_2 - 1$ получается хорошо изученная в работах [1, 4] задача Коши для уравнения (1).

Рассмотрим пример. Дано разностное уравнение

$$f(x_1, x_2) - f(x_1 - 1, x_2) - f(x_1, x_2 - 1) = 0$$

и пусть краевые данные заданы на множестве $(x_1, k_1)$, $x_1 = 0, 1, 2, \dots$, $(l_1, x_2)$, $x_2 = 0, 1, 2, \dots$, $k_1 > 0, l_1 > 0$.

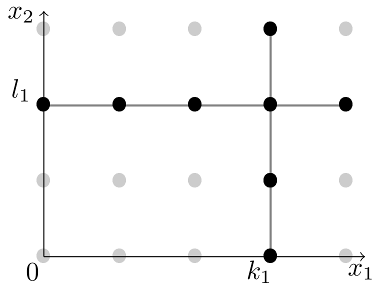


Рис. 1: Множество краевых данных $X_0$

На множестве $(x_1, x_2) \in (k_1, l_1) + \mathbb{Z}^2_{\geqslant}$ $(x_1 \geqslant k_1, x_2 \geqslant l_1)$ данная задача сводится к задаче Коши для разностного уравнения (1).

В полосах $0 \leqslant x_1 \leqslant k_1, x_2 \geqslant l_1$ и $x_1 \geqslant k_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_1$ для вычисления значений функции можно использовать метод сечений производящего ряда, описанный в статье [10].

В прямоугольнике $0 \leqslant x_1 \leqslant k_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant l_1$ восстановить значения функции $f(x)$ можно, решая соответствующую систему уравнений с $k_1 l_1$ неизвестными.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] *Leinartas E. K., Nekrasova T. I.* Constant Coefficient Linear Difference Equations On The Rational Cones Of The Integer Lattice // Siberian Math. J., 2016, 57(1), P. 74–85.

[2] *Leinartas E. K.* Multiple Laurent Series And Difference Equations // Siberian Mathematical Journal, 2004, 45(2), P. 321–326.

[3] *Лейнартас Е. К., Ляпин А. П.* О рациональности многомерных возвратных степенных рядов // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 2:4 (2009), С. 449—455.

[4] *Apanovich M. S., Leinartas E. K.* Correctness of a two-dimensional Cauchy problem for a polynomial difference operator with constant coefficients // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 10:2 (2017), С. 199-–205.

[5] *Stanley R.* Enumerative Combinatorics // Volume 1, 1990.

[6] *Daubechies I.*, Ten Lectures on Wavelets // SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[7] *Рябенький В. С., Филиппов А. Ф.* Об устойчивости разностных уравнений // Гос. изд-во техн.-теорет. лит., М., 1956, 174 с.

[8] *Dudgeon D. E., Mersereau R. M.* Multidimensional digital signal processing // Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1984.

[9] *Самарский А. А.* Теория разностных схем // Наука, М., 1977, 656 с.

[10] *Ляпин А. П., Ахтамова С. С.* Рекуррентные соотношения для сечений производящего ряда решения многомерного разностного уравнения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 31:3 (2021), С. 414—423.