УДК 517.9

Об алгебрах операторов в функциональных пространствах с инволюцией[1]

Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова (Воронеж, Россия)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

В работе рассматриваются два вида ограниченных операторов с инволюцией: разностный и интегральный. Показано, что оба типа операторов обрвают алгебру, причем алгебра разностных операторов является наполненной. А также приведены формулы для спектра.

Ключевые слова: разностный оператор, интегральный оператор, инволюция, спектр.

On operator algebras in function spaces with involution[1]

G. V. Garkavenko, N. B. Uskova (Voronezh, Russia)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

The paper considers two types of bounded operators with involution: difference and integral. It is shown that both types of operators terminate the algebra, and the algebra of difference operators is complete. Formulas for the spectrum are also given.

Keywords: difference operator, integral operator, involution, spectrum.

Введение

Пусть $End\mathcal{X}$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Xx\|$, $X \in End\mathcal{X}$. Пусть $\ell_p = \ell_p(\mathbf{Z}, \mathbf{C}), p \in [1, \infty]$ — пространство двусторонних комплексных последовательностей $x : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ с нормой $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x(n)|^p\right)^{1/p}, p \in [1, \infty)$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{Z}} |x(n)|$. При $p = 2$ пространство ℓ_2 является гильбертовым со стандартным скалярным произведением. Пространство ℓ_∞ является алгеброй с поточечным умножением $(\alpha\beta)(n) = \alpha(n)\beta(n), n \in \mathbf{Z}, \alpha, \beta \in \ell_\infty$.

Пусть $L_p = L_p(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $p \in [1, \infty)$ банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и суммируемых со степенью $p = [1, \infty)$ функций с нормой $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbf{R}} |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$, $x \in L_p, p = [1, \infty)$ и

$L_\infty, (p=\infty)$ банахово пространство существенно ограниченных (классов эквивалентности) функций с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |x(t)|$. Пространство $L_1(\mathbf{R})$ является банаховой алгеброй со сверткой функций в качестве операции умножения $(f*g)(t) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \qquad t\in\mathbf{R}, \qquad f,g\in L_1$. Через $\widehat{f}$ обозначается преобразование Фурье функции $f\in L_1$ (или $f\in L_2$).

Определение. *Оператор $J\in End\mathcal{X}$ называется инволюцией, если $J^2=I$.*

Во введенных выше пространствах стандартная инволюция задается формулой $(Jx)(n)=x(-n), n\in\mathbf{Z}, x\in\ell_p$ и $(Jx)(t)=x(-t), t\in\mathbf{R}, x\in L_p$ (иногда называется оператором отражения).

Операторы с инволюцией

Пусть $\alpha\in\ell_\infty$, определим оператор $E_\alpha\in End\,\ell_p$, $E_\alpha x=\alpha x,\ x\in\ell_p$, формулой $(E_\alpha x)(n)=\alpha(n)x(n),\ n\in\mathbf{Z}$. Определим оператор с инволюцией $E_{\alpha,\beta}=E_\alpha+E_\beta J, \alpha,\beta\in\ell_\infty$, действующий по формуле $(E_{\alpha,\beta}x)(n)=\alpha(n)x(n)+\beta(n)x(-n)$, $n\in\mathbf{Z}, x\in\ell_p, p\in[1,\infty)$ и в стандартном базисе пространства $\ell_p, p\in[1,\infty)$ имеющий разреженную матрицу $E_{\alpha,\beta}\sim(\varepsilon_{ij}),\ i,j\in\mathbf{Z}$, где $\varepsilon_{ii}=\alpha(i),\ \varepsilon_{i,-i}=\beta(i),\ i\in\mathbf{Z}\backslash\{0\},\ \varepsilon_{00}=\alpha(0)+\beta(0)$, а остальные элементы равны нулю. Оператор $E_{\alpha,\beta}$ ограничен и $\|E_{\alpha,\beta}\|\le\|\alpha\|_\infty+\|\beta\|_\infty$. Множество таких операторов обозначим через $\mathcal{M}$. Очевидно, что $I,J\in\mathcal{M}$, так как $I=E_{e,0}=eI+0J$, $J=E_{0,e}=0I+eJ$, где символом e обозначена такая последовательность, что $e(n)=1, n\in\mathbf{Z}$, а символом 0 – нулевая последовательность, т. е. $0(n)=0, n\in\mathbf{Z}$.

Пусть теперь $\alpha\in L_1(\mathbf{R})$ введем в рассмотрение оператор B_α, определенный формулой

$$(B_\alpha x)(t)=(\alpha*x)(t)=\int\limits_{\mathbf{R}}\alpha(\tau)x(t-\tau)\,d\tau=\int\limits_{\mathbf{R}}\alpha(\tau)S(-\tau)x(t)\,d\tau, \quad (1)$$

где через S обозначен оператор сдвига функции $S(s)x(t)=x(t+s), s,t\in\mathbf{R}$. Формула (1) определяет на $L_p, p\in[1,\infty)$ структуру банахова $L_1(\mathbf{R})$ — модуля, ассоциированного с представлением S (см. [1, 2]).

Рассмотрим оператор $B_{\alpha,\beta}=B_\alpha+B_\beta J$, α, $\beta\in L_1, B_{\alpha,\beta}\in End L_p, p\in[1,\infty)$. Оператор $B_{\alpha,\beta}$ является интегральным оператором с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов:

$$((B_\alpha+B_\beta J)x)(t)=\int_{\mathbf{R}}\alpha(t-\tau)x(\tau)\,d\tau+\int\limits_{\mathbf{R}}\beta(t+\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad x\in L_p,$$

и $\|B_{\alpha,\beta}\| \le \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1$. Множество таких операторов обозначим $\mathcal{M}'$.

Операторы вида $E_{\alpha,\beta} \in End\,\ell_p$ с неограниченными последовательностями $\alpha, \beta : \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ рассматривались в [3, 4].

Основные результаты

Лемма 1. *Множество $\mathcal{M}$ является наполненной банаховой подалгеброй в $End\,\ell_p, p \in [1,\infty)$ с единицей.*

Доказательство. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что $E_{\alpha,\beta} \cdot E_{\alpha',\beta'} = E_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где

$$\begin{cases} \widetilde{\alpha} = \alpha * \alpha' + \beta * J\beta', \\ \widetilde{\beta} = \alpha * \beta' + \beta * J\alpha'. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что некоторая банахова подалгебра $\mathcal{B} \in End\mathcal{X}$ называется наполненной, если каждый обратимый в $End\mathcal{X}$ оператор обратим и в $\mathcal{B}$. Для того, чтобы найти обратный $E_{\alpha',\beta'}$ к обратимому оператору $E_{\alpha,\beta}$, необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha\alpha' + \beta J\beta' = e, \\ \alpha\beta' + \beta J\alpha' = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} \alpha' = J\alpha(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1}, \\ \beta' = -\beta(\alpha J\alpha - \beta J\beta)^{-1} \\ \alpha'(0) = 1/(\alpha(0) + \beta(0)). \end{cases}$$

Для любой последовательности $b \in \ell_\infty$ введем в рассмотрение ее множество нулей $Z(b) = \{n \in \mathbf{Z} : b(n) = 0\}$

Лемма 2. *Оператор $E_{\alpha,\beta}$ обратим тогда и только тогда, когда $Z(\alpha J\alpha - \beta J\beta) = \varnothing$ и $|\alpha(n)\alpha'(n) + \beta(n)\beta'(-n)| > \epsilon > 0$, для всех $n \in \mathbf{Z}_+$.*

Перейдем к рассмотрению операторов $B_{\alpha,\beta}$.

Лемма 3. *Операторы $B_{\alpha,\beta} \in End\,L_p, p \in [1,\infty)$, образуют подалгебру $\mathcal{M}'$.*

Лемма 3 проверяется непосредственным подсчетом, при этом в пространстве L_p имеем $B_{\alpha,\beta} \cdot B_{\alpha',\beta'} = B_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}$, где $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ определяются формулами (2), т. е. $B_{\alpha,\beta} \cdot B_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}'$, если $B_{\alpha,\beta}, B_{\alpha',\beta'} \in \mathcal{M}'$.

Итак, множество разностных операторов с инволюцией является наполненной банаховой подалгеброй с единицей в пространстве соответствующих ограниченных операторов, а множество интегральных операторов — банаховой алгеброй. При этом они похожи тем, что произведение двух операторов и в первом и во втором случае определяется с использованием формулы (2).

Перейдем к спектрам оператора $E_{\alpha,\beta}$ в пространстве ℓ_2 и $B_{\alpha,\beta}$ в пространстве L_2.

Лемма 4. *Спектр оператора $E_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}$ есть замыкание множества чисел*

$$\left\{\alpha(0)+\beta(0); 0.5\left(\alpha(n)+\alpha(-n) \pm ((\alpha(n)-\alpha(-n))^2+4\beta(n)\beta(-n))^{1/2}\right)\right\},$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Так как спектр ограниченного оператора из $End\,\ell_p, 1 \leq p < \infty$ не зависит от p, то формулы для спектра в любом из пространств $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ останутся такими же, как для $E_{\alpha,\beta} : \ell_2 \to \ell_2$.

Переходим к оператору $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}'$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{M}' \in EndL_2$ ($B_{\alpha,\beta}$ действует в L_2). Тогда спектр оператора $B_{\alpha,\beta}$ совпадает с множеством $\overline{RanS_1 \cap RanS_2}$, где*

$$S_{1,2} = 0.5\left(\widehat{\alpha}(t)+\widehat{\alpha}(-t) \pm \left((\widehat{\alpha}(t)-\widehat{\alpha}(-t))^2+4\widehat{\beta}(t)\widehat{\beta}(-t)\right)^{1/2}\right).$$

В работе [5] исследовались интегральные операторы с ядром, зависящим от суммы и разности аргументов, действующие в L_2 и α, β также принадлежат L_2, это существенно использовалось при доказательстве результатов. Исследуемый же нами оператор $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}'$ такой, что $\alpha, \beta \in L_1$, $B_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}' \subset End\ L_p, p \in [1, \infty)$, поэтому результаты из [5] к оператору $B_{\alpha,\beta}$ не применимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Loomis L.H.* An introduction of abstract harmonic analysis. Van Nostrand Company Inc., Toronto-New York-London, 1953. 208 pp.

[2] *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2005.Т. 69, № 3. С. 3–54.

[3] *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства разностных операторов с инволюцией // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2023. – С. 7–11.

[4] *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Некоторые свойства разностных операторов с инволюцией // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2023. – № 2. – С. 36–45.

[5] *Александров Е. Л.* Интегральные операторы с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов // Изв. вузов. Матем. 1991. Т. 35, № 8. С. 3–8.