УДК 517.958

О явных аналитических формулах в нелокальной задаче теплопроводности[1]

И. В. Тихонов, Е. Д. Писаренкова (Москва, Россия)
ivtikh@mail.ru, ekaterinapisarenkova@gmail.com

Работа имеет характер краткого обзора. Обсуждается модельная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности. Вместо начального условия задан интеграл по времени, взятый от неизвестного решения. Указаны явные аналитические формулы, позволяющие решать поставленную задачу при тех или иных дополнительных предположениях. Использованные подходы допускают перенос на многие другие нелокальные задачи для эволюционных уравнений.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелокальная задача, разрешающие формулы, полиномы Бернулли, особые решения.

Благодарности: Работа подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

On explicit analytical formulas in one nonlocal heat conduction problem[1]

I. V. Tikhonov, E. D. Pisarenkova (Moscow, Russia)
ivtikh@mail.ru, ekaterinapisarenkova@gmail.com

The note is in the nature of a brief review. A model nonlocal problem for the one-dimensional heat equation is discussed. Instead of the initial condition, the integral over time of the unknown solution is given. Explicit analytical formulas are indicated that make it possible to solve the problem under various additional assumptions. Suggested approaches can be transferred to many other nonlocal problems for evolution equations.

Keywords: heat equation, nonlocal problem, resolving formulas, Bernoulli polynomials, special solutions.

Acknowledgements: The paper was carried with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075-15-2022-284.

Постановка задачи

В полосе $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ рассмотрим нелокальную задачу для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \int_0^1 u(x,t)\,dt = \varphi(x). \tag{1}$$

Функция $u = u(x,t)$ из класса $C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,1])\cap C(\mathbb{R}\times[0,1])$ и ее начальное состояние

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{2}$$

предполагаются неизвестными. Функция $\varphi \in C(\mathbb{R})$ считается заданной. Требуется найти $u = u(x,t)$, используя соотношения (1).

Возникают обычные вопросы существования и единственности решения задачи, а также явного представления искомого решения. Начнем с результатов работ [1, 2], полученных при помощи традиционной аналитической техники.

Интегральные формулы

В работе [1] дано описание классов единственности решения для подобных нелокальных задач. Конкретно для задачи (1) типичный класс единственности образуют функции $u = u(x,t)$, удовлетворяющие оценке

$$|u(x,t)| \leqslant M\exp(\sigma|x|), \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1], \tag{3}$$

с фиксированным показателем $\sigma < \sqrt{\pi}$ и константой $M > 0$, зависящей от функции u. Для подтверждения точности такого результата отметим функцию

$$u(x,t) = \exp(\sqrt{\pi}x)\cos(\sqrt{\pi}x + 2\pi t), \tag{4}$$

удовлетворяющую задаче (1) при $\varphi(x) \equiv 0$ и оценке (3) при $\sigma = \sqrt{\pi}$. То есть формула (4) дает нетривиальное решение однородной нелокальной задачи (1), и единственность решения в (1) нарушается. Точнее, она нарушается при выборе в классе (3) показателя $\sigma = \sqrt{\pi}$.

Возникает вопрос: как находить решение при соблюдении условия единственности? Из результатов [2] следует разрешающая формула

$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)\varphi(y)\,dy - \varphi''(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

действующая для начального состояния (2). Поведение функции Грина

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{s^2}{\exp(s^2)-1}\exp(isx)\,ds, \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad i^2=-1, \tag{6}$$

хорошо изучено. В интересующем нас одномерном случае известно, что

$$g(x) = -\sqrt{2\pi}\,\exp(-\sqrt{\pi}\,|x|)\left[\sin\left(\sqrt{\pi}\,|x| + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{7}$$

при $|x| \to \infty$, а также, что

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(k + \frac{1}{2}\right) \zeta \left(k + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k \tag{8}$$

при $x \in \mathbb{R}$ с дзета-функцией Римана (см. формулы (50), (51) в работе [2]).

Соотношения (5)–(8) полезны для разных исследований, связанных с нелокальной задачей (1). На выработанной основе удалось доказать, в частности, разрешимость задачи (1) в классах единственности, подобных (3), для любой функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющей оценкам

$$|\varphi(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad |\varphi''(x)| \leqslant M \exp(\sigma|x|), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

с константами $M > 0$ и $\sigma < \sqrt{\pi}$. Решение $u = u(x,t)$ находится по формуле Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) u_0(s)\, ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,1], \tag{10}$$

с начальным условием (2), вычисленным по формуле (5).

Казалось бы, исследование задачи завершено. Но в некоторых простых ситуациях использование интегральных формул (5), (10) довольно тяжело на практике. Например, любой полином $\varphi(x) = P(x)$ или экспонента $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с показателем $\alpha \in \mathbb{C}$ при $|\operatorname{Re}\alpha| < \sqrt{\pi}$ попадают в соответствующий класс (9). Однако в подобных примерах получить ответ, исходя из указанных формул, можно лишь с помощью сложных расчетов. Здесь более эффективны другие методы.

Ряды по полиномам Бернулли

В работе [3] предложен способ, позволяющий выражать ответы в нелокальной задаче (1) через ряды по полиномам Бернулли

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, \varphi^{(2n)}(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]. \tag{11}$$

Полиномы Бернулли $B_n(t)$ определим через производящую функцию

$$\frac{\lambda}{\exp\lambda - 1}\, \exp(\lambda t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\, \lambda^n, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \qquad |\lambda| < 2\pi. \tag{12}$$

Свойства полиномов Бернулли считаем известными (см. [4, 5]). Напомним только, что $B_0(t) \equiv 1$, а дальше по индукции

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B_n(t)}{n!}\right) = \frac{B_{n-1}(t)}{(n-1)!}, \qquad \int\limits_0^1 B_n(t)\,dt = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Используя сказанное, нетрудно проверить, что ряд (11) формально удовлетворяет задаче (1). Возникает вопрос о сходимости этого ряда.

В случае, когда $\varphi(x) = P(x)$ — полином степени $d \in \mathbb{N}$, ряд (11) сводится к конечной сумме

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{[d/2]} \frac{B_n(t)}{n!}\,\varphi^{(2n)}(x), \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1], \tag{13}$$

и проблем со сходимостью не возникает. Например, для $\varphi(x) = x^5$ формула (13) сразу дает ответ

$$u(x,t) = x^5 + 10(2t-1)x^3 + 10(6t^2 - 6t + 1)x \tag{14}$$

с учетом того, что

$$B_0(t) \equiv 1, \qquad B_1(t) = t - \frac{1}{2}, \qquad B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Из теоремы единственности следует, что та же функция (14) получится по формулам (5), (10).

Рассмотрим также принципиальный пример $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с показателем $\alpha \in \mathbb{C}$. Используя формулу (11) и учитывая соотношение (12), получаем, что

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(t)}{n!}\,\alpha^{2n}\,\exp(\alpha x) = \frac{\alpha^2}{\exp(\alpha^2) - 1}\,\exp(\alpha x + \alpha^2 t). \tag{15}$$

Ряд сходится при $|\alpha| < \sqrt{2\pi}$, но сумма ряда допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точек вида

$$\alpha_{1,k}^{(\pm)} = \pm(1+i)\sqrt{\pi k}, \qquad \alpha_{2,k}^{(\pm)} = \pm(1-i)\sqrt{\pi k}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

где $i^2 = -1$. Ответ (15) элементарно проверяется подстановкой в исходную задачу (1). Он применим при выборе $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$ с любым показателем $\alpha \in \mathbb{C}$ кроме значений, указанных в формуле (16). Возникает вопрос: как искать решение в этих исключительных случаях? Дадим разъяснение в следующем пункте.

Особые решения

Зафиксируем значение $\mu \in \mathbb{C}$ и рассмотрим пару функций $\varphi_\mu(x)$ и $\psi_\mu(x)$, отличных от тождественного нуля, и таких, что

$$\varphi''_\mu(x) = \mu\varphi_\mu(x), \qquad \psi''_\mu(x) = \mu\psi_\mu(x) + \varphi_\mu(x). \tag{17}$$

Другими словами, рассмотрим собственную и присоединенную функции оператора $A = d^2/dx^2$ с собственным значением μ.

Составим комбинацию $u(x,t) = \gamma_{1,\mu}(t)\varphi_\mu(x) + \gamma_{2,\mu}(t)\psi_\mu(x)$ так, чтобы выполнялось уравнение $u_t = u_{xx}$. С учетом (17) получим

$$u(x,t) = (C(\mu)t + D(\mu))\exp(\mu t)\varphi_\mu(x) + C(\mu)\exp(\mu t)\psi_\mu(x). \tag{18}$$

При выборе коэффициентов $C(\mu) = \mu$ и $D(\mu) = 1$ имеем интеграл

$$\int_0^1 u(x,t)\,dt = \exp\mu\cdot\varphi_\mu(x) + (\exp\mu - 1)\psi_\mu(x). \tag{19}$$

Применим конструкцию к нужному примеру.

Пусть α — комплексное число из множества (16). Тогда $\exp(\alpha^2) = 1$. Определим функции

$$\varphi(x) = \exp(\alpha x), \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\alpha}\,x\exp(\alpha x). \tag{20}$$

Это собственная и присоединенная функции оператора $A = d^2/dx^2$, отвечающие собственному значению $\mu = \alpha^2$. Ориентируясь на формулу (18) со значениями $C(\mu) = \mu = \alpha^2$ и $D(\mu) = 1$, определим решение уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = (\alpha^2 t + 1)\exp(\alpha^2 t + \alpha x) + (\alpha/2)\,x\exp(\alpha^2 t + \alpha x). \tag{21}$$

Согласно (19) со значением $\mu = \alpha^2$ (таким, что $\exp\mu = 1$) имеем

$$\int_0^1 u(x,t)\,dt = \exp(\alpha x). \tag{22}$$

Тем самым, при любом выборе показателя α из множества (16) функция $u(x,t)$ вида (21) удовлетворяет условию (22), т. е. является решением нелокальной задачи (1) при $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$. Полученное решение не связано с рядом (15) (по полиномам Бернулли), и начальное состояние (2) не выражается интегральной формулой (5).

Пусть, например, конкретно $\alpha = (1+i)\sqrt{\pi}$, т. е. $\alpha = \alpha_{1,1}^{(+)}$ из множества (16). Тогда

$$\varphi(x) = \exp((1+i)\sqrt{\pi}\, x) = \exp(\sqrt{\pi} x)(\cos(\sqrt{\pi} x) + i \sin(\sqrt{\pi} x)), \qquad (23)$$

и формула (21) дает нужное решение нелокальной задачи

$$u(x,t) = \left(2\pi i t + 1 + \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2}\, x\right) \exp(2\pi i t + (1+i)\sqrt{\pi} x). \qquad (24)$$

Представляя функцию (24) в виде $u(x,t) = u_1(x,t) + i u_2(x,t)$, получим решения $u = u_1(x,t)$ и $u = u_2(x,t)$ для соответствующих условий

$$\varphi_1(x) = \exp(\sqrt{\pi} x) \cos(\sqrt{\pi} x) \quad \text{и} \quad \varphi_2(x) = \exp(\sqrt{\pi} x) \sin(\sqrt{\pi} x),$$

т. е. для вещественной и мнимой частей от функции (23). Проверка всех найденных ответов осуществляется их подстановкой в задачу (1). Свойство единственность в данном классе решений отсутствует: поскольку показатель роста равен $\sqrt{\pi}$, то, не нарушая свойств, к указанным решениям u можно прибавлять функции типа (4).

Изложенные соображения допускают перенос на многие другие ситуации. Отметим, например, задачу

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \qquad \frac{u(x,0) + u(x,1)}{2} = \varphi(x), \qquad (25)$$

которая исследуется по той же схеме с заменой полиномов Бернулли полиномами Эйлера (см. [6]). Общая конструкция нелокальных задач, подобных (1) или (25), на языке абстрактных дифференциальных уравнений имеет вид

$$u'(t) = Au(t), \qquad \int_0^T u(t)\, d\mu(t) = \varphi \qquad (26)$$

с фиксированным значением $T > 0$. Для задачи (26) известен универсальный критерий единственности решения (см. [7]), который дает ориентиры дальнейшим продвижениям.

Авторы признательны А. Ю. Попову, В. Б. Шерстюкову и Ю. С. Эйдельману, в сотрудничестве с которыми возникли многие идеи данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 3. С. 396–405.

[2] *Попов А. Ю., Тихонов И. В.* Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Матем. сборник. 2005. Т. 196, № 9. С. 71–102.

[3] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Эйдельман Ю. С.* Применение полиномов Бернулли в неклассических задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVIII Международной научной конференции, посвященной 70-летию В. И. Мунермана. Вып. 18. Смоленск : СмолГУ, 2017. С. 223–226.

[4] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Пер. с англ. под ред.: В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. М. : Наука, 1979. 832 с.

[5] *Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark Ch. W.* NIST Handbook of Mathematical Functions. N. Y. : Cambridge University Press, 2010. 952 p.

[6] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Писаренкова Е. Д.* Полиномы Эйлера и их применение в нелокальных задачах математической физики // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 24. Смоленск : СмолГУ, 2023. С. 337–344.

[7] *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Известия РАН. Серия матем. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 133–166.