УДК 517.518

О восстановлении интегрируемых функций[1]

А. Д. Кашина, П. В. Павлова, М. Г. Плотников
(Москва, Вологда, Россия)
alisa.kashina@math.msu.ru, pavlovapv2020@gmail.com,
mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Рассматриваются задачи о точном и приближенном восстановлении интегрируемых функций по их значениям на множестве малой меры. В качестве классов функций берутся классы Коробова на окружности $\mathbb{T}$.

Ключевые слова: восстановление функций, классы Коробова, коэффициенты Фурье.

On recovery of integrable functions[1]

A. D. Kashina, P. V. Pavlova, M. G. Plotnikov
(Moscow, Vologda, Russia)
alisa.kashina@math.msu.ru, pavlovapv2020@gmail.com,
mikhail.plotnikov@math.msu.ru

Problems of exact and approximate recovery of integrable functions from their values on a set of small measure are considered. The Korobov classes on the circle $\mathbb{T}$ are taken as functional classes.

Keywords: recovery of functions, Korobov classes, Fourier coefficients.

Введение

Вопросы о возможности восстановления функции по ее значениям на множестве малой меры рассматривались в работе [1]. Было доказано, что любую функцию f из функционального класса Λ, который определяется скоростью сходимости мажоранты коэффициентов Фурье к нулю, можно однозначно восстановить по ее значениям на специальном множестве G сколь угодно малой меры, общем для всего класса. Скажем, что $G \subset X$ — δ-восстанавливающее множество ($\delta > 0$) для класса функций $\Lambda \subset L_1(X, \mu)$, если $\mu(G) < \delta$ и отображение $f \in \Lambda \mapsto f|_G$ инъективно. Здесь (X, μ) — пространство с неатомической мерой, $f|_G$ — сужение функции f на множество G.

Если μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, пишем $L_1(X)$ вместо $L_1(X,\mu)$. Обозначим $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$. Будем рассматривать функциональные классы Коробова

$$E_\alpha(\mathbb{T})=\left\{f\in L_1(\mathbb{T})\colon \widehat{f}_n=O(n^{-\alpha})\right\},\quad \alpha>\frac{1}{2}.$$

$E_\alpha(\mathbb{T})$ является нормированным пространством с нормой

$$\|f\|_{E_\alpha(\mathbb{T})}=\sup_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_n|\left(|n|+1\right)^\alpha.$$

В работе решаются две задачи. Первая — приблизить функцию $f\in E_\alpha(\mathbb{T})$ тригонометрическим полиномом, для построения которого используется информация о значениях функции f лишь на специальном множестве малой меры, а также оценить точность этого приближения. Вторая — точно восстановить функцию $f\in E_\alpha(\mathbb{T})$ по ее значениям на множестве малой меры.

Мы исследуем классы Коробова с параметром гладкости α, который не обеспечивает абсолютной сходимости ряда Фурье. Более того, существуют всюду разрывные функции из данных классов, которые остаются таковыми при любом их изменении на множестве меры нуль.

Основные результаты

Для н N нечетного $M=2N+1$ введем множество

$$G(M,h)=\bigcup_{j=-N}^{N}(x_j-2h,x_j+2h),\quad x_j=\frac{2\pi j}{2N+1},\quad 0<h<\frac{\pi}{2M}. \tag{1}$$

В [2] было показано, что коэффициенты Фурье функции $f\in L_1(\mathbb{T})$ с номерами $|m|\le N$ удовлетворяют соотношению $\widehat{f}_m=(\widehat{f}_m)\tilde{}+T$, где

$$(\widehat{f}_m)\tilde{}=\frac{1}{4Mh^2\mathrm{sinc}^2(mh)}\sum_{j=-N}^{N}\exp(-imx_j)\int\limits_{x_j-2h}^{x_j+2h}f(u)(2h-|u-x_j|)du,$$

$$T=T(m,M,h)=-\sum{}'\frac{\mathrm{sinc}^2(nh)}{\mathrm{sinc}^2(mh)}\widehat{f}_n, \tag{2}$$

сумма $\sum'$ распространяется на все n такие, что $|n|>N$ и $n=m\ (\mathrm{mod}\, M)$. При определенных условиях на M и h величину T можно сделать малой, а $(\widehat{f}_m)\tilde{}$ определяются только значениями функции f на множестве (1).

Рассмотрим тригонометрический полином $\widetilde{f}^L_{M,h}$ степени не выше L, $L \le M$, с коэффициентами $(\widehat{f}_m)^{\sim}$, которым будем приближать функции из класса $E_\alpha(\mathbb{T})$. Он полностью определяется значениями функции f на множестве (1).

Под $\| \ \|$ понимаем норму в $L_2(\mathbb{T})$. Величины $C, C_1, \dots$ ниже (разные в разных формулах) зависят от α, но не зависят от L, M, h и от функции $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$.

Лемма 1. *Если $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то*

$$\|f(x) - S_L(f)\|_2 \le C_1 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Здесь $S_L(f)$ — L-ая частичная сумма ряда Фурье функции f.

Доказательство. С учетом того, что $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, имеем

$$\|f(x) - S_L(f,x)\|_2 = C \left(\sum_{|n| \ge L+1} |\widehat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C_1 \|f\|_\alpha L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Лемма 2. *Пусть $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, где $\alpha > \frac{1}{2}$. Тогда*

$$\|S_L(f,x) - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C_2 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}. \tag{3}$$

Доказательство. Воспользуемся (2) и тем, что $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$. Имеем:

$$\left| \sum\nolimits' \operatorname{sinc}^2(nh) \widehat{f}_n \right| \le \frac{1}{h^2} \sum\nolimits' \left| \frac{\widehat{f}_n}{n^2} \right| \le \frac{1}{h^2} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \sum\nolimits' \frac{1}{|n|^{2+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{h^2} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{1}{|m+kM|^{2+\alpha}} \le \frac{C_3}{h^2 M^{2+\alpha}} \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})},$$

$$C_3 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left|k - \frac{1}{2}\right|^{2+\alpha}}.$$

Применяя проделаннные вычисления, оценим левую часть (3):

$$\|S_L(f)(x) - \widetilde{f}^L_{M,h}(x)\|_2 = \left\| \sum_{m=-L}^{L} \left(\sum\nolimits' \frac{\operatorname{sinc}^2(nh)}{\operatorname{sinc}^2(mh)} \widehat{f}_n \right) e^{inx} \right\|_2$$

$$\le C_4 \left(\sum_{m=-L}^{L} \left| \sum\nolimits' \operatorname{sinc}^2(nh) \widehat{f}_n \right|^2 \right)^{1/2} \le C_2 \|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{2+\alpha}}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > \frac{1}{2}$, $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, $\lim\limits_{M\to\infty} \frac{L(M)}{M^{1-2\beta/\alpha}} = 1$. *Тогда при* $L = L(M) \in \mathbb{N}$ *и* $h = h(M) = \frac{1}{M^{1+\beta}}$ *справедлива оценка*

$$\|f - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} M^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Доказательство. Воспользуемся леммами 1 и 2:

$$\|f - \widetilde{f}^L_{M,h}\|_2 \le C_5\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \left(L^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}\right)$$

$$\le C_5\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} \left(L^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{L^{\frac{1}{2}}}{h^2 M^{\alpha+2}}\right) \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} M^{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Следствие 1. *Пусть* $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, *где* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда для каждого* $L \in \mathbb{N}$ *найдется тригонометрический полином* T^L *степени не выше* L, *который полностью определяется значениями функции* f *на некотором множестве вида* $G(M,h)$, *где* $M = M(L)$, $\lim\limits_{L\to\infty} M(L) L^{-\frac{1}{1-2\beta/\alpha}} = 1$, $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, *и для которого*

$$\|f - T^L\|_2 \le C\|f\|_{E^\alpha(\mathbb{T})} L^{\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Для доказательства возьмем в качестве T^L *построенный в теореме* 1 *тригонометрический полином* $f^L_{M,h}$ *и выразим* M *и* h *через* L.

Теорема 2. *Допустим,* $f \in E_\alpha(\mathbb{T})$, *где* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда для любого* $\delta > 0$ *существуют последовательности функций* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *и множеств* $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ *такие, что* $f_k \to f$ *при* $k \to \infty$ *в норме* $L_2(\mathbb{T})$, f_k *определяются значениями функции* f *на множестве* G_k *и* $\mu G < \delta$, *где* $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1. Возьмем β такое, что $0 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, а затем найдем последовательность нечетных чисел $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\frac{1}{4(M_k)^\beta} < \delta$. Положим

$$G_k = G\left(M_k, h_k\right), \qquad h_k = \frac{1}{(M_k)^{1+\beta}}$$

(множества $G(M,h)$ определены в (1)). Пусть, наконец, $f_k = \widetilde{f}^{L_k}_{M_k,h_k}$, $L_k = L(M_k) \in \mathbb{N}$. Тогда множества G_k и функции f_k являются искомыми.

Замечание 1. Множество G из теоремы 2 является δ-восстанавливающим для класса $E_\alpha(\mathbb{T})$ при $\alpha > \frac{1}{2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Плотников М. Г.* Задачи восстановления интегрируемых функций и тригонометрических рядов // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 6. С. 109–125.

[2] *Плотников М. Г.* Множества единственности положительной меры дл перестановок тригонометрической системы // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 6. С. 161–186.