УДК 517.51

О восстановлении функций, заданных на сетке[1]

С. Ю. Советникова (Саратов, Россия)
sovetnikovasy@mail.ru

В работе находятся равномерные приближения к непрерывной функции по заданному приближённому набору её значений на отрезке, используя оператор Стеклова с разрывной областью значений.

Ключевые слова: непрерывная функция, приближённые значения, оператор Стеклова.

On restoring functions defined on a grid[1]

S. Y. Sovetnikova (Saratov, Russia)
sovetnikovasy@mail.ru

The work finds uniform approximations to a continuous function from a given approximate set of its values on an interval, using the Steklov operator with a discontinuous range of values.

Keywords: continuous function, approximate values, Steklov operator.

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором $\widehat{f_\delta} = \{f_{\delta_1}, f_{\delta_2}, \dots, f_{\delta_n}\}$, где $f_{\delta i} = f_\delta(x_i), x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}$. Кроме того, известно, что

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(f_{\delta_i} - f_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \delta, \tag{1}$$

где $f_i = f(x_i)$.

Требуется найти равномерные приближения к $f(x)$. Применяем метод, предложенный Г.В. Хромовой - метод сглаживания ломаной $L_n\widehat{f_\delta}$: $(L_n\widehat{f_\delta})(x_i) = f_{\delta_i}$ с помощью семейства осредняющих интегральных операторов, зависящих от параметра. Этот метод был реализован в [1], где в качестве осредняющего оператора был взят модифицированный оператор Стеклова [2]. При использовании этого оператора привлекается дополнительная информация о значениях $f_\delta(x_i)$ в узлах за пределами отрезка, на котором задана $f(x)$. Мы здесь используем так называемый разрывный оператор Стеклова [3], который не требует такой информации и имеет простейшую конструкцию. Он имеет вид:

$$S_\alpha\varphi = \begin{cases} S_{\alpha 2}\varphi, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\alpha 1}\varphi, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{2}$$

где

$$S_{\alpha 1}\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x-\alpha}^{x} \varphi(t)dt, S_{\alpha 2}\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{x}^{x+\alpha} \varphi(t)dt. \tag{3}$$

(Запись (2) означает, что для нас несущественно какое именно значение имеет функция $S_\alpha\varphi$ в точке $x = \frac{1}{2}$).

Ломаная $L_n\widehat{f_\delta}$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид: $\left(L_n\widehat{f_\delta}\right)(x) = a_i x + b_i$, где

$$a_i = n(f_{i+1} - f_i),\ b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1}x_i). \tag{4}$$

Применяем S_α к $L_n\widehat{f_\delta}$

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \le \sqrt{n}\delta + \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega(\alpha),$$

где $L_\infty \equiv L_\infty[0,1]$ - пространство с нормой

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\left\{\|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]}\right\}, \tag{5}$$

$\omega(\cdot)$- *модуль непрерывности функции $f(x)$.*

Доказательство.

Имеем

$$\left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \le \left\|S_\alpha L_n\widehat{f_\delta} - S_\alpha L_n\widehat{f}\right\|_{L_\infty} + \left\|S_\alpha L_n\widehat{f} - f\right\|_{L_\infty}, \tag{6}$$

где $\widehat{f} = \{f_i\}_{i=0}^n$.

Считаем $\widehat{f_\delta}$ и $\widehat{f}$ элементами евклидова пространства E_{n+1} с нормой

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{E_{n+1}} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из (5) и определения нормы интегрального оператора в пространстве непрерывных функций следует, что

$$\|S_\alpha\|_{C[0,1]\to L_\infty} = 1. \tag{7}$$

Известно, что

$$\|L_n\|_{E_{n+1}\to C[0,1]} = \sqrt{n} \ \ ([4]) \tag{8}$$

и

$$\left\|S_\alpha L_n \widehat{f} - f\right\|_{L_\infty} \le \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega(\alpha) \ \ ([5]). \tag{9}$$

Наконец, из (5)-(9) следует утверждение теоремы.

Следствие. *Если* $\alpha = \frac{1}{n}$, *а* $n = n(\delta)$ *так, что* $n(\delta) \to \infty$ *и* $\sqrt{n(\delta)}\delta \to 0$ *при* $\delta \to 0$, *то* $\left\|S_\alpha L_n \widehat{f_\delta} - f\right\|_{L_\infty} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Функции* $S_\alpha L_n \widehat{f_\delta}$ *при* $\alpha = \frac{1}{n}$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *имеют вид:* *для* $x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\left(S_\alpha L_n \widehat{f_\delta}\right)(x) = D_1(x,n) f_{\delta i} + D_2(x,n) f_{\delta,i+1} + D_3(x,n) f_{\delta,i+2}, \tag{10}$$

где

$$D_1(x,n) = \frac{n^2}{2}(x_{i+1} - x)^2, \ D_2(x,n) = \frac{1}{2} + n^2(x - x_i)(x_{i+1} - x),$$

$$D_3(x,n) = \frac{n^2}{2}(x - x_i)^2;$$

для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ *справедлива формула (10) с заменой* $f_{\delta i}$ *на* $f_{\delta,i-1}$, $f_{\delta,i+1}-$ *на* $f_{\delta i}$, $f_{\delta,i+2}$ - *на* $f_{\delta,i+1}$.

Формулы (10) можно использовать при решении прикладных задач. Формулы $S_\alpha L_n \widehat{f}$ в другом виде получены в [5].

Теорема 3.

Если $f(x) \in Lip_M 1$, $n = n(\delta) = [M^{\frac{2}{3}}\delta^{-\frac{2}{3}}]$, $\alpha = \alpha(\delta) = \frac{1}{n(\delta)}$, *то справедлива оценка:* $\left\|S_{\alpha(\delta)} L_{n(\delta)} \widehat{f_\delta} - f(x)\right\|_{L_\infty} \le 2M^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Булычева С. В.* Осреднение исходных данных прикладных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46, № 10. P. 1802–1808.

[2] *Хромова Г. В.* О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1977. Т. 17, № 5. С. 1161–1171.

[3] *Хромова Г. В.* Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и её приложения, Тематические обзоры. Москва : ВИНИТИ РАН, 2021. Т. 200, ч. 2, С. 57–64.

[4] *Бушманова М. В., Хромова Г. В.* О точности результатов при восстановлении экспериментально заданной информации // Математика. Приложения матем. в экономич., технич. и педагогич. исследованиях. Магнитогорск: Изд-во МГТУ. 2004. Вып. 2. С. 3–8.

[5] *Хромова Г. В.* Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. XVI Междунар. Казанская школа-конф. "Теория функций, её приложения и смежные вопросы "Сб. трудов (Казань, 22-27 авг. 2023). Казань : Изд. Казанского федерального ун-та, 2023. Т. 66. С. 279–281.