УДК 517.984

О теоремах равносходимости для операторов с инволюцией на графе[1]

Е. И. Григорьева (Воронеж, Россия)
elenabiryukova2010@yandex.ru

В работе устанавливается теорема равносходимости рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора с инволюцией, заданного на графе из двух ребер с циклом, и невозмущенного оператора. Кроме того, приводится теорема равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье для интегрального оператора на таком графе.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, интегральный оператор, инволюция, резольвента, геометрический граф.

Equiconvergence theorems for operators with involution on a graph[1]

E. I. Grigorieva (Voronezh, Russia)
elenabiryukova2010@yandex.ru

The equiconvergence of Fourier series in eigen- and associated functions of functional-differential operator with involution and of unperturbed operator is established. The operators are defined on the simplest graph of two edges with a cycle. The equiconvergence theorem with trigonometric series for an integral operator on this graph is also given.

Keywords: functional-differential operator, integral operator, operator's resolvent, involution, graph.

Введение

Рассматривается оператор в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), заданный на графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ребро γ_1 представляет собой цикл («кольцо»), ребро γ_2 примыкает к γ_1. В [1] установлена теорема равносходимости разложения по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф) для заданного на таком графе оператора с инволютивным отклонением с разложением в тригонометрический ряд Фурье. Теорема доказана для оператора вида

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{1}$$

Здесь предполагается, что α_k, β_k — комплексные числа, $\beta_k^2 - \alpha_k^2 \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $k = 1, 2$, $x \in [0, 1]$, $p_{i,j} \in C^1[0, 1]$. Краевые условия (1) порождены требованием непрерывности функций во внутреннем узле Г.

Для изучения других спектральных свойств данного оператора, а также обобщающих его интегральных операторов удобнее использовать технику, основанную на равносходимости разложений по с.п.ф исследуемого оператора с разложением по с.п.ф. некоторого невозмущенного оператора [2]. В данной работе устанавливается соответствующий результат о равносходимости для операторов L и

$$L_0 y = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) \end{pmatrix}, \quad y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

Также исследуется интегральный оператор, заданный на графе Г,

$$y(x) = Af(x) = \int_0^1 A(x,t) f(t)\, dt, \quad x \in [0, 1], \tag{2}$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $A(x,t)$ — некоторая матрица. Для такого оператора в докладе представлены результаты, обобщающие результаты из [3].

Основные результаты

1. В [1] установлена связь оператора L с оператором, действующим в пространстве вектор-функций размерности 4:

$$\widetilde{L} z = Q z'(x) + P(x) z(x),$$

$$M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0.$$

Здесь $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $Q = \operatorname{diag}(Q_1, Q_2)$, $P(x) = \operatorname{diag}(P_1(x), P_2(x))$, $Q_k(x) = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$,

$P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = 1, 2$, M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 4, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{31} = -(M_0)_{12} = -(M_0)_{33} = 1$, $(M_1)_{21} = (M_1)_{42} = -(M_1)_{22} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы $(M_k)_{ij} = 0$.

Пусть $y(x) = (R_\lambda f)(x)$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр),

$f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$. Соответственно, резольвенту оператора $\widetilde{L}$ будем обозначать $\widetilde{R}_\lambda$.

Лемма 1. *Если λ таково, что резольвенты операторов L и $\widetilde{L}$ существуют, и $y{=}R_\lambda f$, $z{=}\widetilde{R}_\lambda F$, где $F(x){=}(f_1(x),f_1(1{-}x),f_2(x),f_2(1{-}x))^T$, то $y(x)=\Big([(\widetilde{R}_\lambda F)(x)]_1,[(\widetilde{R}_\lambda F)(x)]_3\Big)$ ($[\cdot]_k$ означает k-ую компоненту вектора).*

Введем также следующие обозначения (см. [1]):
$D=\operatorname{diag}(i\sqrt{d_1},-i\sqrt{d_1},i\sqrt{d_2},-i\sqrt{d_2})$, $d_k^{-1}=\beta_k^2-\alpha_k^2$, $k=1,2$,
$\widetilde{M}_0=M_0BH_0(0)$, $\widetilde{M}_1=M_1BH_0(1)$,
$B=\operatorname{diag}(B_1,B_2)$, $B_k=\begin{pmatrix}1 & b_k\\ b_k & 1\end{pmatrix}$, $b_k=\beta_k^{-1}[i\sqrt{d_k}+\alpha_k]$,
$H_0(x)=\operatorname{diag}(h_1(x),h_2(x),h_3(x),h_4(x))$, $h_i(x)=\exp\Big\{-\int_0^x\widetilde{p}_{ii}(t)\,dt\Big\}$,
$\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)=\operatorname{diag}(\widetilde{P}_1(x),\widetilde{P}_2(x))$,
$\widetilde{P}_k(x)=B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$;
$\widetilde{R}_{0\lambda}$ — резольвента оператора

$$D^{-1}w',\quad U_0(w)=\widetilde{M}_0w(0)+\widetilde{M}_1w(1)=0.$$

Лемма 2 [1]. *Для любых функций $f_1(x)\in L[0,1]$, $f_2(x)\in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\int_{|\lambda|=r}\Big[\widetilde{R}_\lambda F-BH_0(x)\widetilde{R}_{0\lambda}(H_0^{-1}B^{-1}F)\Big]\,d\lambda\Big\|_\infty=0.$$

Развивая далее технику из [2], получим

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, $f_k(x)\in L[0,1]$, $k=1,2$, имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-S_r^0(f,x)\|_\infty=0,$$

где $S_r(f,x)$ ($S_r^0(f,x)$) — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L (L_0), включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k (λ_k^0), для которых $|\lambda_k|<r$ ($|\lambda_k^0|<r$).

2. Приведем здесь результаты для интегрального оператора (2), обобщающие результаты из [3].

Пусть $\widetilde{A}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_1(x,t)$, $\widetilde{B}_2(x,t)$ — произвольные функции, непрерывно дифференцируемые по x и непрерывные по t при $t\neq x$ и $t\neq 1-x$, причем $\widetilde{A}(x,x) \equiv 1$, $\widetilde{B}_k(x,x) \equiv 1$. Установлено, что если ядро интегрального оператора (2) имеет вид

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} A_1(x,t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)} A_1(0,t) & A_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1(x,t) = \varepsilon(x,t)\widetilde{A}_1(x,t) + g_1(x)\nu(t)$,
$A_2(x,t) = \alpha_1 \varepsilon(x,t)\widetilde{B}_1(x,t) + \alpha_2 \varepsilon(1-x,t)\widetilde{B}_2(1-x,t) - \alpha_2 \frac{g_2(x)}{g_2(0)} \widetilde{B}_2(1,t)$;
$\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \geq t$, $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x \leq t$;
$g_1(x), g_2(x) \in C^1[0,1]$ $g_1(0) \neq g_1(1)$, $g_2(0) \neq 0$, $\nu(t) = \frac{\widetilde{A}_1(1,t)}{g_1(0)-g_1(1)}$,
α_k — комплексные числа, $\alpha_2 \neq 0$, то область значений оператора удовлетворяет соотношениям (1).

Теорема 2. *Если A^{-1} существует, то для любой функции $f(x)$ с компонентами из $L[0,1]$*

$$\lim \left\| S_r(f,x) - (\sigma_r(f_1,x), \sigma_r(f_2,x))^T \right\|_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел λ_k, попадающих в круг $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f_j,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции f_j по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 12. С. 1597–1605.

[2] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 3–10.

[3] *Бурлуцкая М. Ш.* Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, № 4. С. 8–13.