УДК 517.9

О сходимости рядов Фурье – Якоби в пространствах Лебега с переменным показателем[1]

Т. Н. Шах-Эмиров (Махачкала, Россия)
email@mail.ru

Б. Мукенхаупт показал, что ряды Фурье по полиномам Якоби $P_n^{\alpha,\beta}$ сходятся в пространстве $L^p_{w_{a,b}}(-1,1)$ при определенных условиях на параметры a, b, α, β. В настоящей работе показано, что если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет этим условиям в некоторых окрестностях точек ± 1, то имеет место сходимость этих рядов в пространстве $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$.

Ключевые слова: полиномы Якоби, пространство Лебега с переменным показателем, ряды Фурье – Якоби.

On Fourier-Jacobi series convergence in variable exponent Lebesgue spaces [1]

T. N. Shakh-Emirov (Makhachkala, Russia)
email@mail.ru

B. Muckenhaupt showed that Fourier series in Jacobi polynomials $P_n^{\alpha,\beta}$ converge in the space $L^p_{w_{a,b}}(-1,1)$ if certain conditions on the parameters a, b, α, β hold. In this paper we show that if the variable exponent $p(x)$ satisfies these conditions in some neighborhoods of the points ± 1, then these series converge in the space $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$.

Keywords: Jacobi polynomials, variable exponent Lebesgue spaces, Fourier – Jacobi series.

Введение

Пусть $p(x)$ – неотрицательная на $[-1,1]$ измеримая функция, $a, b > -1$, $w_{a,b}(x) = (1-x)^a(1+x)^b$ – весовая функция. Через $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ обозначим множество функций f таких, что

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^{p(x)} w_{a,b}(x) dx < \infty, \tag{1}$$

– пространство Лебега с переменным показателем. Введем следующие обозначения

$$p_-(A) = ess \inf_{x\in A} p(x), \ p_+(A) = ess \sup_{x\in A} p(x),$$

где A – измеримое множество. При условии $1 \leq p_-([-1,1]) \leq p(x) \leq p_+([-1,1]) < \infty$ пространство $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ нормируемо [1] и одну из эквивалентных норм можно задать следующим образом

$$\|f\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} w_{a,b}(x)dx \leq 1\right\}. \quad (2)$$

Отметим, что в случае постоянного показателя $p(x) = p$ норма (2) совпадает с классической нормой в обычных пространствах Лебега.

Приведем некоторые сведения о полиномах Якоби. Для произвольных α, β полиномы Якоби можно определить с помощью формулы Родрига

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{w_{\alpha,\beta}(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{w_{\alpha,\beta}(x)\sigma^n(x)\right\},$$

где $\sigma(x) = 1 - x^2$. Если $\alpha, \beta > -1$, то полиномы Якоби образуют ортогональную систему с весом $w_{\alpha,\beta}(x)$, то есть

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)w_{\alpha,\beta}(x)dx = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где

$$h_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)2^{\alpha+\beta+1}}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

а δ_{nm} – символ Кронеккера. При условии $\alpha, \beta > -1$ для функции $f \in L^{p(\cdot)}_{w_{\alpha,\beta}}(-1,1)$ можно определить коэффициенты Фурье – Якоби

$$f_k^{\alpha,\beta} = \frac{1}{h_k^{\alpha,\beta}}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^{\alpha,\beta}(x)\mu(\alpha,\beta,x)dx$$

и сопоставить ей ряд Фурье – Якоби

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

Определим также частичные суммы Фурье – Якоби

$$S_n^{\alpha,\beta}(f) = S_n^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f_k^{\alpha,\beta}P_k^{\alpha,\beta}(x).$$

При $\alpha, \beta \geq -\frac{1}{2}$ вопросы сходимости рядов Фурье – Якоби в среднем исследовались в работах Г. Полларда [2–4], Г.М. Винга [5], Дж. Ньюмана и В. Рудина [6]. В работе [7] Б. Мукенхаупт усилил эти результаты, рассмотрев сходимость в $L^{p(\cdot)}_{w_{a,b}}(-1,1)$ рядов Фурье по полиномам $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ $(\alpha,\beta>-1)$ в случае, когда параметры a,b у веса $w_{a,b}(x)$ вообще говоря не совпадают с α,β. Им были получены условия на параметры a,b, обеспечивающие сходимость рядов Фурье – Якоби в среднем. В настоящей работе предпринята попытка обобщить этот результат на случай переменного показателя.

Основной результат

Обозначим через $\mathcal{P}(-1,1)$ класс переменных показателей $p(x)$, заданных на $[-1,1]$ и удовлетворяющих условиям:

A) условие Дини – Липшица

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{d}{-\ln|x-y|},\quad |x-y|\le\frac{1}{2};$$

B) $\underline{p}([-1,1])=\min_{x\in[-1,1]}p(x)>1$;

C) для $p(x)$ существуют (произвольно малые) числа $\delta_i=\delta_i(p)$ $(i=1,2)$ такие что $p(x)=p(-1)$ для $x\in[-1,-1+\delta_1]$ и $p(x)=p(1)$ для $x\in[1-\delta_2,1]$.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Положим, что $p(x)\in\mathcal{P}(-1,1)$ и $\alpha,\beta>-1$. Тогда*

$$\|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1)\le c(\alpha,\beta,p)\|f\|_{p(\cdot),w_{a,b}}(-1,1),$$

если

$$\left|\frac{a+1}{p(1)}-\frac{\alpha+1}{2}\right|<\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\alpha+1}{2}\right\},$$
$$\left|\frac{b+1}{p(-1)}-\frac{\beta+1}{2}\right|<\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\beta+1}{2}\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.

[2] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series // Trans. Amer. Math. Soc. 1947. Vol. 62. № 2. P. 387–403.

[3] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1948. Vol. 63. № 2. P. 355–367.

[4] *Pollard H.* The mean convergence of orthogonal series. III // Duke Math. J. 1949. Vol. 16. № 1. P. 189–191.

[5] *Wing G. M.* The mean convergence of orthogonal series // Amer. J. Math. 1950. Vol. 72. P. 792–808.

[6] *Newman J., Rudin W.* Mean convergence of orthogonal series // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 3. № 2. P. 219–222.

[7] *Muckenhoupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 23. № 2. P. 306–310.