УДК 517.984

О решениях систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра[1]

М. А. Кузнецова (Саратов, Россия)
kuznetsovama@info.sgu.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси с суммируемыми коэффициентами и нелинейной зависимостью от спектрального параметра. Получены наборы решений, имеющие экспоненциальные асимптотики и свойства аналитичности по спектральному параметру в некоторых секторах. Эти результаты являются основой для исследования спектральных свойств операторов высокого порядка с коэффициентами-распределениями.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, суммируемые коэффициенты, асимптотические формулы, нелинейная зависимость от параметра.

Благодарности: Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-10001), https://rscf.ru/project/21-71-10001/.

On solutions of systems of differential equations with nonlinear dependence on the spectral parameter[1]

M. A. Kuznetsova (Saratov, Russia)
kuznetsovama@info.sgu.ru

We consider a system of first-order differential equations on the half-line with summable coefficients, containing a nonlinear dependence on the spectral parameter. We obtain sets of its solutions having exponential asymptotics and analyticity properties on the spectral parameter in certain sectors. These results are basic for studying spectral properties of the high-order operators whose coefficients are distributions.

Keywords: systems of differential equations, summable coefficients, asymptotic formulae, nonlinear dependence on a parameter.

Acknowledgements: This work was implemented in Saratov State University and supported by the Russian Science Foundation (project № 21-71-10001), https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/.

Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений на полуоси

$$\mathbf{y}' = \big[\lambda V(x) + A(x) + C(x,\lambda)\big]\mathbf{y}, \quad x \ge 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — спектральный параметр, а $\mathbf{y}(x) = [y_j(x)]_{j=1}^n$ — вектор с абсолютно локально непрерывными компонентами. Предположим, что матрицы V, A и C порядка n удовлетворяют следующим условиям:

I. $V(x) = r(x)B$, где $r(x) \in L_{loc}[0,\infty)$ и $r(x) > 0$ п.в., а постоянная матрица B диагональна: $B = \operatorname{diag}\{b_j\}_{j=1}^n$, $b_j \neq 0$ при $j = \overline{1,n}$.

II. $A(x) = [a_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$, где элементы $a_{jk}(x) \in L[0,\infty)$.

III. $C(x,\lambda) = [c_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^n$, где $c_{jk}(x,\lambda)$ — голоморфные отображения $\lambda \in \mathbb{C}_0 \to L[0,\infty)$. Кроме того, выполнено

$$\|C(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} := \max_{j,k=\overline{1,n}} \|c_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{L[0,\infty)} \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

$$\exists m(\alpha) > 0,\ \alpha \geq 0\colon\ m(\alpha) \to 0,\ \sup_{|\lambda| \geq m(\alpha)} \|C(\cdot,\lambda)\|_{L[\alpha,\infty)} \to 0,\ \alpha \to \infty. \tag{2}$$

Получим ФСР системы (1), имеющие экспоненциальные асимптотики и свойства аналитичности по параметру λ при достаточно больших $|\lambda| > \lambda_0$. Построение таких систем рассматривается отдельно для каждого сектора $\lambda \in \Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{C}_0\colon\ \arg\lambda \in (\alpha_\kappa, \alpha_{\kappa+1})\}$, для которого существует такая нумерация $\{b_j\}_{j=1}^n$, что выполнено

$$\operatorname{Re}\lambda b_1 \geq \operatorname{Re}\lambda b_2 \geq \ldots \geq \operatorname{Re}\lambda b_n, \quad \lambda \in \overline{\Gamma_\kappa}. \tag{3}$$

ФСР с описанными свойствами впервые рассматривались Дж. Биркгофом в работе [1] для случая конечного интервала $x \in [a,b]$. Метод последовательных приближений, использованный в ней и более поздних работах, требует, чтобы норма некоторого интегрального оператора была меньше 1, что накладывает ограничение $a_{jk} \in AC[a,b]$. Впоследствии удалось ослабить это ограничение до $a_{jk} \in L[a,b]$, оценивая норму квадрата оператора (см. [2, 3]). Результаты для систем (1) с суммируемыми коэффициентами являются основой для исследования операторов n-го порядка с коэффициентами-распределениями (см. [3, 4]).

Подавляющее большинство работ по построению ФСР систем первого порядка посвящено случаю конечного интервала. Случай полуоси рассматривался В. Юрко в [5], но только для матриц A с абсолютно непрерывными коэффициентами. Здесь же исследуется более общий случай и строится семейство ФСР, зависящих от параметра $\alpha \geq 0$ и определенных при $|\lambda| > \lambda_\alpha > 0$. Условие (2) позволяет добиться того, чтобы $\lambda_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Также будут построены наборы решений (1), аналитические по параметру λ в больших секторах, где не сохраняется нумерация (3), в случае, когда $\{b_j\}_{j=1}^n$ — различные корни n-й степени из 1. Именно этот случай имеет приложение к исследованию дифференциальных уравнений n-го порядка. Полученные ФСР и наборы решений в больших секторах играют важную роль при постановке и решении обратных спектральных задач для операторов на полуоси (см. [6]).

Построение ФСР

При $x \geq 0$ рассмотрим $p(x) = \int_0^x r(t)\,dt$,

$$D(x) = [d_{jk}(x)]_{j,k=1}^n, \quad d_{jk}(x) = \begin{cases} a_{jk}(x), & b_j = b_k, \\ 0, & b_j \neq b_k, \end{cases} \qquad j,k = \overline{1,n}.$$

Пусть $M_\alpha(x) = [m_{jk}(x)]_{j,k=1}^n$ является решением задачи Коши

$$M_\alpha'(x) = D(x) M_\alpha(x), \; x \geq 0, \quad M_\alpha(\alpha) = I,$$

где I обозначает единичную матрицу и $\alpha \geq 0$.

Пусть $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^n$ — набор решений системы (1). Ему единственным образом соответствует матрица-функция $Y(x,\lambda)$, k-й столбец которой совпадает с $\mathbf{y}_k$. В дальнейшем набором решений (1) будем также называть матрицу $Y(x,\lambda)$. В случае линейной независимости столбцов будем называть данную матрицу ФСР (1).

Теорема 1. *Для любого $\alpha \geq 0$ существует такое $\lambda_\alpha > 0$, что при $\lambda \in \overline{\Gamma_\kappa^\alpha}$, $\Gamma_\kappa^\alpha := \{\lambda \in \Gamma_\kappa \colon |\lambda| > \lambda_\alpha\}$, существует ФСР (1) $Y_\alpha(x,\lambda) = [y_{jk}(x,\lambda)]_{j,k=1}^n$ со следующими свойствами.*

1. *Равномерно по $j,k = \overline{1,n}$ и $x \geq \alpha$*

$$y_{jk}(x,\lambda) = e^{\lambda b_k (p(x) - p(\alpha))}\big(m_{jk}(x) + o(1)\big), \quad \overline{\Gamma_\kappa^\alpha} \ni \lambda \to \infty.$$

2. *При каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $y_{jk}(x,\lambda)$, $j,k = \overline{1,n}$, являются непрерывными в $\overline{\Gamma_\kappa^\alpha}$ и аналитическими в Γ_κ^α.*

3. *$y_{jk}(\alpha,\lambda) = \delta_{jk}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{k,n}$.*

Кроме того, $\lambda_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$.

Наборы решений в больших секторах

Рассмотрим случай, когда $\{b_j\}_{j=1}^n$ — все корни n-й степени из 1. Тогда плоскость спектрального параметра λ разбивается на секторы

$$\Gamma_\kappa = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \frac{\pi(\kappa-1)}{n} < \arg\lambda < \frac{\pi\kappa}{n}\right\}, \quad \kappa = \overline{1,2n},$$

в каждом из которых существует своя нумерация $\{b_j\}_{j=1}^n$, при которой выполнено (3). При $m \in \overline{2,n}$ рассмотрим большой сектор

$$G_m = \left\{\lambda \in \mathbb{C}_0\colon \arg\lambda \in \left([(-1)^{m-1} - 1]\frac{\pi}{2n};\ [(-1)^{m-1} + 3]\frac{\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Легко видеть, что $\overline{G_m} = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_\sigma}$, где $\sigma = 2n$, если m четное, и $\sigma = 2$, если m нечетное. Зафиксируем нумерацию чисел $\{b_j\}_{j=1}^n$ так, чтобы (3) выполнялось при $\varkappa = 1$. При переходе в соседний сектор с $\varkappa = \sigma$ неравенства в (3) меняются на противоположные для каждой пары (b_j, b_{j+1}), где $j \in \overline{1, n-1}$ имеет ту же четность, что и m. Таким образом, (3) не выполняется в большом секторе G_m.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \geq 0$ и $G_m^\alpha = \{\lambda \in G_m\colon |\lambda| > \lambda_\alpha\}$. При $\lambda \in \overline{G_m^\alpha}$ существует набор решений (1) $U_\alpha(x,\lambda) = [u_{jk}(x,\lambda)]_{\substack{j=\overline{1,n},\\ k=\overline{m,n}}}$ со следующими свойствами.*

1. *Равномерно по $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{m,n}$ и $x \geq \alpha$*

$$u_{jk}(x,\lambda) = \begin{cases} O\left(e^{\lambda\omega_m[p(x)-p(\alpha)]}\right), & \lambda \in \overline{\Gamma_1^\alpha}, \\ O\left(e^{\lambda\omega_s[p(x)-p(\alpha)]}\right), & \lambda \in \overline{\Gamma_\sigma^\alpha}, \end{cases} \qquad s := \min(m+1, n).$$

2. *При каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $u_{jk}(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{m,n}$, являются непрерывными в $\overline{G_m^\alpha}$ и аналитическими в G_m^α.*

3. *$u_{jk}(\alpha,\lambda) = \delta_{jk}$, $j,k = \overline{m,n}$.*

В силу свойств 3 теорем 1 и 2 набор решений $U_\alpha(x,\lambda)$ можно дополнить первыми $m-1$ столбцами набора $Y_\alpha(x,\lambda)$, чтобы получить ФСР в $\overline{\Gamma_1}$ или $\overline{\Gamma_\sigma}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219–231.

[2] *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Result. Math. 1999. Vol. 36. P. 342–353.

[3] *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 11. С. 129–166.

[4] *Bondarenko N. P.* Inverse Spectral Problems for Arbitrary-Order Differential Operators with Distribution Coefficients // Mathematics. 2021. Vol. 9, № 22. A. 2989.

[5] *Yurko V. A.* Asymptotics of solutions of differential equations with a spectral parameter // arXiv.org e-Print archive. URL: `https://arxiv.org/abs/2204.07505` (дата обращения: 12.11.2023).

[6] *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов : Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001. 499 с.