УДК 517.958, 517.956.32

О решении начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида[1]

В. С. Рыхлов (Саратов, Россия)

RykhlovVS@yandex.ru

Дается решение обобщённой неоднородной начально-граничной задачи для волнового уравнения в полуполосе с нулевым потенциалом. Формулируются достаточные условия, когда это обобщённое решение является классическим. Затем, как приложение этого результата, формулируется теорема об обобщённом решении начально-граничной задачи для аналогичного однородного уравнения с потенциалом общего вида. В заключение формулируются достаточные условия, при которых это обобщённое решение является классическим решением.

Ключевые слова: начально-граничная задача, волновое уравнение, гиперболическое уравнение, дифференциальное уравнение с частными производными, потенциал общего вида, полуполоса, смешанная производная в уравнении, обобщённое решение, классическое решение.

On solving the initial boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a potential of the general form[1]

V. S. Rykhlov (Saratov, Russia)

RykhlovVS@yandex.ru

A solution to the generalized inhomogeneous initial-boundary value problem for the wave equation in a half-strip with zero potential is given. Sufficient conditions are formulated when this generalized solution is classical. Then, as an application of this result, a theorem on a generalized solution of the initial boundary value problem for a similar homogeneous equation with a general potential is formulated. Finally, sufficient conditions are formulated under which this generalized solution is a classical solution.

Keywords: initial boundary value problem, wave equation, hyperbolic equation, partial differential equation, general potential, half-strip, mixed derivative in the equation, generalized solution, classical solution.

Введение

Рассмотрим обобщённую задачу для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x), \tag{3}$$

где $(x,t)\in Q=[0,1]\times[0,+\infty)$; $p_1,p_2\in\mathbb{R}$; $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L_1[0,1]$, $f(x,t)\in L_1(Q_T)$ при любом $T>0$, $Q_T=[0,1]\times[0,T]$ (называем такую $f(x,t)$ функцией класса $\mathcal{Q}$) и все эти функции комплекснозначные.

Для уравнения (1) выполняется условие $p_1^2-4p_2>0$, то есть корни ω_1, ω_2 многочлена $\omega^2+p_1\omega+p_2$ вещественны и различны. Предположим

$$\omega_1<0<\omega_2. \tag{4}$$

Определение обобщённого решения для задачи (1)–(3) приведено в [1,2] и сделано на основе теоремы существования и единственности классического решения [3]. Это определение аналогично определению, данному в [4, 5]. Там же даётся и история вопроса. Отметим, что в [4, 5] впервые использован метод построения обобщённого решения, основаннный на резольвентном и аксиоматическом подходах, в случае начально-граничной задачи для уравнения колебания струны ($p_1=0$).

Далее под *классическим решением* (или *решением почти всюду* (п.в.)) начально-граничной задачи (1)–(3) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую начальным и граничным условиям, у которой $u'_x(x,t)$ и $u'_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x и по t в Q_T при любом $T>0$, п.в. в Q выполняется равенство $u''_{xt}(x,t)=u''_{tx}(x,t)$ и которая удовлетворяет дифференциальному уравнению для п.в. $(x,t)\in Q$. Соответствующую начально-граничную задачу при этом будем называть *классической начально-граничной задачей.*

В случае классической задачи по необходимости должны выполняться следующие условия: $\varphi(x)\in W_1^2[0,1]$, $\psi(x)\in W_1^1[0,1]$ ($W_p^n[0,1]$ есть пространства Соболева), $f(x,t)\in\mathcal{Q}$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$.

Обобщённое и классическое решения неоднородной задачи без потенциала

Введем следующие обозначения.

$$v(x,t):=\zeta\big(\{\alpha(x,t)\}\big)-\zeta\big(\{\beta(x,t)\}\big),\ \ \zeta(x):=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}(x)-\omega_1\omega_2\widetilde{\Psi}(x)\Big).$$

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\begin{cases}\omega_2\varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi\in[0,a),\\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi\in[a,1),\end{cases} \qquad \widetilde{\Psi}(\xi)=\begin{cases}\Psi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi\in[0,a),\\ \Psi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi\in[a,1),\end{cases}$$

$\eta(s) := \dfrac{\{s\}}{a}\chi\big(a-\{s\}\big) + \dfrac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\}-a\big)$, $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 0$ при $x < 0$ и $\chi(x) = 1$ при $x \geq 0$), $\Psi(x) := \int\limits_0^x \psi(\xi)\, d\xi$, $\{x\}$ — дробная часть $x \in \mathbb{R}$, $a = \dfrac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}$, $\alpha(x,t) := \dfrac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}$, $\beta(x,t) := \dfrac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}$.

С использованием подхода [4, 5] доказана следующая теорема о формуле для обобщённого решения задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (4). *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{5}$$

является обобщённым решением задачи (1)–(3).

Следующие достаточные условия обеспечивают существование классического решения.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $f(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t *в* Q_T *при любом* $T > 0$ *для п.в.* $x \in [0,1]$ *и* $f'_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для всех* $(x,t) \in Q$ *формулой* (5), *является единственным классическим решением задачи* (1)–(3).

Обобщённое и классическое решения однородной задачи с потенциалом

Приложением теоремы 1 является случай обобщённой задачи с ненулевым потенциалом общего вида в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + p_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x,t)u, \tag{6}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$ и эти функции комплеснозначные.

Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q(x)$ в [4–6] (в случае $p_1 = 0$) и в [2, 7] (в случае $p_1 \neq 0$), а для потенциала $q(x,t)$ общего вида в [8] (в случае $p_1 = 0$) и в [9] (в случае

$p_1 \neq 0$). Так же, как и в [2, 4–9], в задаче (6)–(8) будем рассматривать правую часть $q(x,t)u(x,t)$ в уравнении (6) как неоднородность в уравнении (1). Тогда на основании формулы (5) от задачи (6)–(8) переходим к следующему интегральному уравнению относительно функции $u(x,t)$

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\, d\xi =:$$
$$=: v(x,t) + (\mathcal{D}u)(x,t), \quad (9)$$

где $\mathcal{D}$ есть линейный интегральный оператор, действующий из множества $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Отметим, что такой подход к построению обобщённого решения задачи (6)–(8) (в случае потенциала $q(x)$) при наших предположениях относительно исходных данных задачи, состоящий в сведении задачи (6)–(8) к интегральному уравнению типа (9) и затем решении этого уравнения методом последовательных подстановок, был впервые использован в [6].

Естественно назвать решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (9), для которого функция $q(x,t)u(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$, *обобщённым решением* задачи (6)–(8), а саму задачу — *обобщёной начально-граничной задачей.*

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x,t)$ для п.в. $(x,t) \in Q_T$ при любом $T > 0$:

$$(i) \ \ |q(x,t)| \le q_T(x) \in L_1[0,1]; \quad (ii) \ \ |q(x,t)| \le \check{q}(t) \in L_p[0,T] \ (p > 1).$$

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и для нее выполняется условие (i) или (ii). Тогда $\big(\mathcal{D}v\big)(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$.*

Обозначим $w(x,t) := (\mathcal{D}v)(x,t)$ и образуем ряд

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n w)(x,t), \quad (10)$$

где D есть линейнный, ограниченный интегральнй оператор, являющийся сужением оператора $\mathcal{D}$ на пространсво $C(Q_T)$.

Определение 1. Будем говорить, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится не медленнее γ-экспоненциального ряда ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \le C^n/(n!)^{\gamma}$. 1-экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, выполняется условие* (4), *функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и удовлетворяет условиям (i) или (ii). Тогда ряд* (10) *сходится абсолютно и равномерно в $C(Q_T)$ к непрерывной* *функции* $W(x)$ *не медленнее экспоненциального ряда в случае выполнения условия* (i) *и не медленнее* $1/p'$*-экспоненциального ряда в случае выполнения условия* (ii). *При этом функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t) \tag{11}$$

является единственным обобщённым решением задачи (6)–(8).

Следующие достаточные условия обеспечивают существование классического решения.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $q(x,t) = q_1(x)q_2(x,t)$, *где* $q_1(x) \in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$ *и* $q'_{2,t}(x,t)$ *принадлежат* $C(Q_T)$ *при любом* $T > 0$. *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая формулой* (11), *является единственным классическим решением задачи* (6)–(8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 226. С. 89–107.

[2] *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной / В.С. Рыхлов // Совр. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 342–363.

[3] *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Информ. 2023. Т. 23, № 2. С. 183–194.

[4] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междун. Саратовской зимней школы. Саратов: Саратовский университет, 2022. С. 319–324.

[5] *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 2. С. 322–331.

[6] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О классическои и обобщённом решении смешанной задачи для волнового уравнения // Понтрягинские чтения — XXIX: матер. конф., посвящ. 90-летию акад. В. А. Ильина. М.: ООО «Макс Пресс», 2018. С. 132-133.

[7] *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом // Соврем. методы теории краевых задач: матер. Междун. конф.: Воронежская весен. матем. школа (3–9 мая 2023 г.). Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2023. С. 343–345.

[8] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Использование резольвентного подхода и расходящихся рядо в при решении смешанных задач // Математика. Механика: сб. науч. труд. Вып. 23. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2021. С. 18–24.

[9] *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида // Матем. Мех.: сб. науч. труд. Вып. 25. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2023. С. 83–88.