УДК 517.9

О разрешимости разностных уравнений в классе рациональных функций[1]

П. В. Тришин (Красноярск, Россия)
me@trishin.xyz

В работе получены необходимое условие и достаточное условие разрешимости однородных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в классе рациональных функций. Необходимым условием является ограничение на многогранник Ньютона характеристического полинома. В двумерном случае это условие заключается в наличии параллельных сторон у многоугольника. Достаточным условием является равенство нулю определенных сумм коэффициентов уравнения. В случае выполнения достаточного условия решением является класс рациональных функций, знаменатели которых образуют подкольцо в кольце полиномов. Это подкольцо может быть ассоциировано с гранью многогранника Ньютона характеристического полинома уравнения.

Ключевые слова: разностные уравнения, рациональные функции, многогранник Ньютона.

Благодарности: Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

On the solvability of difference equations in the class of rational functions[1]

P. V. Trishin (Krasnoyarsk, Russia)
me@trishin.xyz

A necessary and a sufficient condition for solvability of homogeneous difference equations with constant coefficients in the class of rational functions are obtained. The necessary condition is a restriction on the Newton polyhedron of the characteristic polynomial. In the two-dimensional case, this condition is the existence of parallel sides on the polygon. A sufficient condition is the equality to zero of certain sums of the coefficients of the equation. If the sufficient condition is satisfied, the solution is the class of rational functions whose denominators form a subring in the ring of polynomials. This subring can be associated with an edge of the Newton polyhedron of the characteristic polynomial of the equation.

Keywords: difference equations, rational functions, Newton's polyhedron.

Acknowledgements: This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement No. 075-02-2023-936).

Введение

Пусть $R(z_1, \dots, z_n) = \frac{N(z_1,\dots,z_n)}{D(z_1,\dots,z_n)}$ – рациональная функция, $z \in \mathbb{C}^n$, N, D – взаимно простые полиномы. Функция R является аналитической в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S} = \{z \in \mathbb{C}^n : D(z) = 0\}$, $\#\mathfrak{S}$ – количество неприводимых компонент $\mathfrak{S}$.

Разностное уравнение мы записываем в виде

$$P(\delta)R(z) = 0 \ , \tag{1}$$

где $P(\zeta) = \sum\limits_{\alpha \in A} p_\alpha \zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n}$, $A \subset \mathbb{Z}^n$, $0 \in A$ – характеристический многочлен (Лорана), $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ – набор атомарных операторов сдвига $\delta_i R(z_1, \dots, z_n) = R(z_1, \dots, z_i + 1, \dots, z_n)$. Будем считать что размерность многогранника $\mathbf{Ch}(A)$ (выпуклой оболочки множества A, которая называется многогранником Ньютона полинома P) равна в точности n.

Если R – произвольная рациональная функция, то $R_P(z) := P(\delta)R(z)$ также рациональна и голоморфна в $\mathbb{C}^n \setminus (\mathfrak{S} - A) := \{z \in \mathbb{C}^n : z + \alpha \notin \mathfrak{S},\ \forall \alpha \in A\}$.

Будем говорить, что R является *рациональным решением разностного уравнения*, если она удовлетворяет (1) для всех z из множества $\mathbb{C}^n \setminus (\mathfrak{S} - A)$. Заметим, что поскольку N и D являются взаимно простыми многочленами, то R не может быть аналитически продолжена в $\mathfrak{S}$.

Отметим, что в случае $n = 1$ для неоднородного уравнения с полиномиальными коэффициентами задача решена Абрамовым С. А. [1]. Но однородное уравнение (1) рациональных решений не имеет (при $n = 1$), а методом шагов [2] всегда можно построить аналитическое продолжение мероморфного решения (с конечным числом полюсов) в $\mathbb{C}$.

Отличие одномерного и многомерного случая состоит в том, что в случае $n > 1$ полярное множество рациональной функции может располагаться в $\mathbb{C}^n$ таким образом, что метод шагов будет не применим для построения аналитического продолжения решения.

Необходимое условие

С каждой k-мерной плоскостью $l = \{z \in \mathbb{C}^n : L_i(z) = c_i, i = 1, \dots, n-k\}$ можно ассоциировать множество полиномов вида

$$D_l(L_1(z), \dots, L_{n-k}(z)) \ ,$$

которые образуют подкольцо в кольце полиномов $\mathbb{C}[z]$. Здесь D_l – это полиномы от $n - k$ переменных. Обозначим это подкольцо $\mathbb{C}_l[z]$ и заметим, что оно не зависит от набора однородных линейных функций L_i, определяющих плоскость l.

Если плоскость l пересекает многогранник $\mathbf{Ch}(A)$ по некоторой грани Γ, то с гранью Γ также ассоциируем подкольцо $\mathbb{C}_\Gamma[z]$, выбирая в качестве уравнений $L_i(z) = c_i$ уравнения гиперграней смежных с Γ. В этом случае $\mathbb{C}_l[z] \subset \mathbb{C}_\Gamma[z]$, причем если $\dim l = \dim \Gamma$, то $\mathbb{C}_l[z] = \mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Оказывается, что особое множество $\mathfrak{S}$ рационального решения уравнения (1) может состоять только из неприводимых компонент σ таких, что они являются нулем элемента из подкольца $\mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Теорема 1. *Если рациональная функция $R(z) = N(z)/D(z)$ является решением уравнения (1), тогда существует непустой набор плоскостей $\{l_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ и граней $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\#\mathfrak{S}}$ многогранника Ньютона характеристического полинома уравнения таких, что*

1. *Имеет место включение $\Gamma_j \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, q_{ij}\rangle = c_{ij}, i = 1, \ldots, n - k(j)\} \subset l_j$, где q_{ij} – нормали к граням многогранника $\mathbf{Ch}(A)$, попадающие в нормальный конус к грани Γ_j, $k(j) = \dim \Gamma_j \leqslant \dim l_j$;*

2. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и j пересечение $(l_j + x) \cap \mathbf{Ch}(A)$ не является вершиной $\mathbf{Ch}(A)$;*

3. *Знаменатель $D(z)$ представляется в виде произведения*

$$D(z) = D_1(z) \cdot \ldots \cdot D_{\#\mathfrak{S}}(z) \ ,$$

каждый множитель которого является композицией

$$D_j(z) = D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle) \ ,$$

где D_{Γ_j} – полином от $n - k(j)$ переменных. То есть

$$R(z) = \frac{N(z)}{\prod_{j=1}^{\#\mathfrak{S}} D_{\Gamma_j}(\langle z, q_{1j}\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k(j),j}\rangle)} \ .$$

Теорема содержит необходимое условие на разрешимость уравнения (1) в классе рациональных функций. Это условие формулируется в виде ограничения на многогранник Ньютона $\mathbf{Ch}(A)$ характеристического полинома P и является многомерным обобщением свойства параллельности сторон многоугольника.

Необходимое условие: *Для существования рационального решения уравнения (1) необходимо, чтобы существовала хотя бы одна плоскость l, $1 \leqslant \dim l \leqslant n - 1$ такая, что любой сдвиг $l + x$, $x \in \mathbb{R}^n$ не пересекал $\mathbf{Ch}(A)$ только по вершине.*

Достаточное условие

Знаменатель любого рационального решения разностного уравнения состоит из двух множителей – периодического полинома и апериодического [3].

Полином $\Pi \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ называется *периодическим*, если следующее множество бесконечно

$$\mathrm{Spread}(\Pi, \Pi) = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \gcd(\Pi(z), \Pi(z+\alpha)) \neq 1\} \ ,$$

и *апериодическим* в противном случае. Справедлива

Лемма 1. *Знаменатель рационального решения уравнения* (1) *является периодическим полиномом.*

Дальнейшая идея заключается в том, что периодическим множителем в знаменателе может выступать любой элемент подкольца $\mathbb{C}_\Gamma[z]$ и для решения уравнения (1) следует искать универсальный числитель $N_\Gamma(z)$ такой, что отношение

$$R_\Gamma(z) = \frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(\langle z, q_1\rangle, \ldots, \langle z, q_{n-k}\rangle)} \ .$$

удовлетворяет (1) при любом знаменателе $D_\Gamma \in \mathbb{C}_\Gamma[z]$.

Теорема 2. *Множество функций* $\{\frac{N_\Gamma(z)}{D_\Gamma(z)}\}$, *где* $N_\Gamma(z)$ *– некоторый полином, а* $D_\Gamma(z)$ *произвольный элемент из подкольца* $\mathbb{C}_\Gamma[z]$, *удовлетворяет уравнению* (1) *тогда и только тогда, когда для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l_\Gamma + x)\cap A} p_\alpha = 0 \ ,$$

где l_Γ *– это прямая, содержащая грань* Γ *и* $\dim \Gamma = \dim l$.

Достаточное условие формулируется следующим образом.

Достаточное условие: *Если существует плоскость* $l \subset \mathbb{R}^n$ *такая, что для любого* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{\alpha \in (l + x)\cap A} p_\alpha = 0 \ ,$$

то уравнение (1) разрешимо в классе рациональных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Абрамов С. А.* Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 11. С. 1611–1620.

[2] *Миролюбов Е. М., Солдатов М. А.* Линейные однородные разностные уравнения. Москва : Наука, 1981. 304 с.

[3] *Kauers M., Schneider C.* Partial Denominator Bounds for Partial Linear Difference Equations // Proceedings of ISSAC'10, 2010. P. 211–218.