УДК 517.5

О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке интегральными операторами Фурье – Чебышёва[1]

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба (Гродно, Республика Беларусь)
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Изучаются аппроксимации сингулярных интегралов специального вида на отрезке $[-1, 1]$ рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва. Найдено интегральное представление приближений. В случае, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность, получены оценки поточечных приближений, равномерных приближений с определенной мажорантой, ее асимптотическое выражение и оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых равномерные рациональные приближения оказываются в значительной степени лучше своих полиномиальных аналогов.

Ключевые слова: рациональная аппроксимация, интегральный оператор Фурье – Чебышёва, сингулярные интегралы, равномерные оценки.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269 (Республика Беларусь).

On rational approximations of one singular integral on a segment by Fourier – Chebyshev integral operators[1]

P. G. Potseiko, Y. A. Rovba. (Grodno, Belarus)
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Approximations of singular integrals of the special form on the segment $[-1, 1]$ by rational integral operators of Fourier – Chebyshev are studied. An integral representation of the approximations is found. In the case when the density of the singular integral has power singularity, estimates of pointwise approximations, uniform approximations with a certain majorant, its asymptotic expression and optimal values of the approximating function parameters are found at which uniform rational approximations turn out to be significantly better than their own polynomial analogues.

Keywords: rational approximation, Fourier – Chebyshev integral operator, singular integrals, uniform estimates.

Acknowledgements: The work was carried out with financial support from the state scientific research program «Convergence 2020», No. 20162269 (Republic of Belarus).

Введение

При решении многих задач математики и физики встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида [1, 2]:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2}\, dt, \qquad x \in [-1,\ 1], \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где $f(t) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Известно, что сингулярные интегралы вычисляются в явном виде в очень редких случаях. Поэтому как в теоретических исследованиях, так в особенности для различных приложений особое значение имеет разработка приближенных методов их вычислений.

Нахождение значений сингулярных интегралов вида (1) при помощи методов численного анализа являлось предметом исследований многих авторов [3–5]. В работах В. П. Моторного [6] изучались полиномиальные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1). Рациональные аппроксимации сингулярных интегралов такого вида изучены в работах белорусского математика В. Н. Русака [7] и его учеников [8, 9].

В 1979 году Е. А. Ровба [10] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [10]:

$$s_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v,\ u)}{\sin \dfrac{v-u}{2}}\, dv, \quad x = \cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u) = \int_{u}^{v} \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2},\ z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k| < 1. \tag{3}$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n\,(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{P}_n,$$

A – множество параметров $(a_1, \ldots, a_n)$, и $s_n(1,\ x) \equiv 1$. В частности, при $a_k = 0,\ k = 1, \ldots, n$, выражение $s_n(f,\ x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Основной целью настоящей работы является исследование равномерных рациональных аппроксимаций сингулярных интегралов вида (1) на отрезке $[-1,\ 1]$ интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) при специальном выборе полюсов.

Интегральное представление и равномерная оценка приближений

Введем следующие обозначения

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ x\ , A) = \hat{f}(x) - s_n(\hat{f},\ x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ A) = ||\varepsilon_n(\hat{f},\ x,\ A)||_{C[-1,\ 1]}, \quad \varepsilon_n(\hat{f}) = \inf_{A} \varepsilon_n(\hat{f},\ A), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. *Для приближений сингулярного интеграла вида* (1) *на отрезке* $[-1,\ 1]$, *рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва* (2) *справедливо интегральное представление*

$$\varepsilon_n(\hat{f},\ x,\ A) = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\cos\tau)\sin\tau \frac{\cos\lambda_n(\tau,\ u)}{\sin\dfrac{\tau - u}{2}}\,d\tau, \quad x = \cos u, \qquad (4)$$

где $\lambda_n(\tau,\ u)$ *из* (3).

В представлении (1) положим $f_s(t) = |t|^s$, где $s \in (0,\ +\infty)\backslash\mathbb{N}$. Тогда

$$\hat{f}_s(x) = 2x\int\limits_{0}^{1} \frac{t^s}{t^2 - x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,\ 1].$$

Исследуем приближения (4) таких функций. Положим $n \mapsto 2n-1$ и пусть $2n-1$ параметров $\{z_k\}_{k=1}^{2n-1}$ аппроксимирующей рациональной функции имеют следующий вид:

$$z_k = -z_{n+k-1},\ z_k = i\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,\ z_{2n-1} = 0,$$

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_p = 0, \quad p = \left[\frac{s}{2}\right], \ n > p. \tag{5}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа.

Теорема 2. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2) при выполнении условий (5) имеет место оценка сверху:*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s,\ A) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1}(1+t^2)t^{1+2p-s}\left|\prod_{k=1}^{n-p-1}\frac{t^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2 t^2}\right| dt,\ n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Случай фиксированного числа полюсов

Пусть $n > p,\ p = [s/2]\,, n_1 = n-p-1$ и q – натуральное число, $0 < q < n_1$, A_q есть множество параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})$ таких, что среди них ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m,\ n_1 = mq$. То есть, речь идет об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка $2p+2$ и $2q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый.

Теорема 3. *Для равномерных приближений функции $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ рациональным интегральным оператором (2) с $2q$ геометрически различными полюсами справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1,2q}(\hat{f}_s) \leq 2^{1-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s)\left(\frac{q^{2q-1}s^{2q-1}(q!)^2}{2^{2q-2}}\right)^s\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^s, n > n_0(s),$$

где $n_0(s)$ – некоторое натуральное число, не зависящее от n, но зависящее от s, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Случай «ньюменовских» параметров

Исследуем асимптотическое поведение правой части (6) в случае, когда принимаемые параметрами аппроксимирующей функции значения, являются некоторой модификацией параметров, введенных Д. Ньюменом [11]. Пусть A_N – набор параметров α_k, $k = 1, 2, \ldots, n_1$, для каждого фиксированного $n_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}}, \quad \beta_k = \mathrm{e}^{-\frac{ck}{\sqrt{n_1}}}, \quad k = 1,\ 2, \ldots, n_1, \quad n_1 = n-1-p, \tag{7}$$

c – некоторая положительная постоянная, не зависящая от n.

Теорема 4. *Для равномерных приближений функции* $\hat{f}_s(x)$ *на отрезке* $[-1,\,1]$ *рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва* (2) *существует такой набор параметров* A_N^* *вида* (7), *что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s) \le 3\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(1+p)} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{ns}}, \quad n > n_0(s),$$

где $p = \left[\frac{s}{2}\right]$, $\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 543 с.

[2] *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. М. : Наука, 1968. 513 с.

[3] *Шешко М. А.* О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем. 1976. № 12. С. 108–118.

[4] *Саакян А. В.* Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // В сб. : «Проблемы механики тонких деформируемых тел», посв. 80-летию акад. С. А. Амбарцумяна. Ереван : 2002. С. 259–265.

[5] *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10, № 4. С. 61–75.

[6] *Моторный В. П.* Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. жур. 2001. Т. 53, № 3. С. 331–345.

[7] *Русак В. Н.* Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1993. № 2. С. 22–26.

[8] *Бокша А. Н.* Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1, Физ. Мат. Инф. 1997. № 3. С. 68–71.

[9] *Русак В. Н., Уазис А. Х.* Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью // Изв. БГПУ. Сер 3. Физ. Матем. Инф. Биол. Геогр. 2009. № 1(59). С. 8–11.

[10] *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

[11] *Newman, D. I.* Rational approximation to $|x|$ // The Michigan Mathematical Journal. 1964. Vol. 11, iss. 1. P. 11–14.