УДК 517.95;519.63;51–73

О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью[1]

Е. В. Серегина*, М. А. Степович(Калуга, Россия)**
***evfs@yandex.ru, **m.stepovich@mail.ru**

В настоящей работе изложены результаты использования проекционного метода наименьших квадратов для решения уравнений теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью на полупрямой. Дана порядковая оценка погрешности и получено условие вычислительной устойчивости рассмотренной проекционной схемы, соответствующей приближённому решению уравнения теплопроводности с использованием базиса из многочленов Лагерра–Якоби. Приведены результаты расчетов для двумерной модельной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, проекционный метод наименьших квадратов, многочлены Лагерра-Якоби.

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23–21–10069, https://rscf.ru/project/23–21–10069/.

On the projection method for solving the heat conduction equation with locate heat capacity[1]

E. V. Seregina*, M. A. Stepovich(Kaluga, Russia)**
***evfs@yandex.ru, **m.stepovich@mail.ru**

The present paper presents the results of using the projection method of least squares to solve the equations of thermal conductivity with concentrated heat capacity on a half–line. An ordinal estimate of the error is given and the condition of computational stability of the considered projection scheme corresponding to the approximate solution of the thermal conductivity equation using the basis of Laguerre–Jacobi polynomials is obtained. The results of calculations for a two–dimensional model problem are presented.

Keywords: thermal conductivity equation, projection method of least squares, Laguerre-Jacobi polynomials.

Acknowledgements: The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the Government of the Kaluga Region No. 23–21–10069, https://rscf.ru/en/project/23–21–10069/.

В работе [1] был представлен алгоритм и проведено обоснование проекционного метода Галёркина для решения стационарного трёхмерного дифференциального уравнения тепломассопереноса в полубесконечной области.

В настоящей работе изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения решения на полупрямой нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра–Якоби. В работах [2] и [3] было проведено обоснование и рассмотрен вопрос вычислительной устойчивости модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда, генерированных внешним источников в полупроводниковом материале. Настоящая работа продолжает такие исследования и ставит задачу дать оценку погрешности и получить условие вычислительной устойчивости предложенной проекционной схемы МНК, соответствующей приближённому решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью, для расчета температурного поля в мишени.

Будем искать решение дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью вида

$$(C + C_0 \delta (z - z_0)) \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = f(z,t).$$

с начальным условием

$$\theta(z,0) = \varphi(z), \left. \frac{d\theta(z,t)}{dz} \right|_{z=0} = 0,\ 0 \le z < \infty,\ \ 0 \le t < \infty.$$

Здесь $\theta(z,\ t)$ — температура, $f(z,t)$ — удельная мощность внутреннего тепловыделения, C — теплоёмкость единицы объёма, k —коэффициент теплопроводности. В точке z_0 помещена сосредоточенная теплоёмкость величины C_0. Пусть также выполняются условия:

$$f(+\infty, t) = 0, f(z, +\infty) = 0, \varphi(+\infty) = 0.$$

Последние условия возможны, например, для электронного или светового пучков, когда источник описывается классической функцией Гаусса или экспонентой, убывающей на бесконечности до нуля [4], а также произведением некоторого многочлена на убывающую экспоненту, характеризующую плотность потока энергии.

Для решения этой задачи был использован проекционный метод МНК. В настоящей работе получена оценка погрешности и условия вычислительной устойчивости проекционной схемы, соответствующей приближённому решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоёмкостью. Метод позволяет находить матрицу, определяющую приближённое решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Проведено сравнение приближённых результатов расчета с точным решением для двумерной модельной задачи. Приближённое решение содержит небольшое число членов разложения по базису из многочленов Лагерра–Якоби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Makarenkov A.M.,Seregina E.V., Stepovich M.A.* The Projection Galerkin Method for Solving the Time–Independent Differential Diffusion Eequation in a Semi–infinite Domain // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017. — Vol. 57. Issue 5. — P. 802-814.

[2] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2013. — № 11. — С. 65–69.

[3] *Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М.* Модифицированная проекционная схема метода наименьших квадратов для моделирования концентрации неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах // Успехи прикладной физики. — 2013. — Т. 1. № 3. — С. 354–358.

[4] *Степович М. А.* Количественная катодолюминесцентная микроскопия прямозонных материалов полупроводниковой оптоэлектроники: Дис. … д–ра физ.–мат. наук. М.: Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2003. 351 с.