УДК 591.65

О последовательном улучшении точности аппроксимации константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональными функциями[1]

И. А. Шакиров (Набережные Челны, РФ)
iskander.sh.57@yandex.ru

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье равномерно приближается логарифмическими функциями, не содержащими и содержащими сдвиг их аргумента, а также логарифмическо-дробно-рациональными функциями; при этом точность приближения константы Лебега последовательно улучшается. Изучение проблемы о наилучшем приближении L_n на подмножествах множества натуральных чисел позволяет далее решить задачу об аппроксимации константы Лебега с наперед заданной точностью.

Ключевые слова: константа Лебега оператора Фурье, дробно-рациональная функция, экстремальная задача, погрешность аппроксимации.

On consequential accuracy improvement of approximation of the Lebesgue constant of the Fourier operator by logarithmic-fractional-rational functions[1]

I. A. Shakirov (Naberezhnye Chelny, Russia)
iskander.sh.57@yandex.ru

The Lebesgue constant L_n of the classical Fourier operator is uniformly approximated by logarithmic functions that do not contain and contain a shift of their argument, as well as logarithmic-fractional-rational functions; wherein the accuracy of approximation of the Lebesgue constant is improved consistently. The study of the problem of the best approximation L_n on subsets of the set of natural numbers allows you to solve the problem of approximating the Lebesgue constant with predetermined accuracy further.

Keywords: Lebesgue constant of Fourier operator, fractional-rational function, extreme problem, approximation error.

Основной задачей теории приближения функций является максимально строгая (по точности) замена элемента $x \in X$ из выбранного нормированного пространства более простыми агрегатами $u \in U \subset X$, содержащими малое число подлежащих определению параметров. В рамках данной работы константа Лебега [1]

$$L_n = \|S_n| = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2n+1} \quad (S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}) \qquad (1)$$

классического оператора Фурье

$$S_n(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(s)D_n(t-s)ds \quad \left(D_n(u) = \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin(u/2)}, \quad n \in N\right)$$

равномерно (дискретно) приближается логарифмическо-дробно-рациональной функцией, зависящей от трех параметров. Точнее говоря, ниже даются ответы на вопросы:

1) возможно ли допущенную в приближенном равенстве

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b + \frac{d}{(n+a)^2} \stackrel{def}{=} u_n(a,b,d) \quad (n \in N) \qquad (2)$$

погрешность последовательно минимизировать, варьируя при этом тремя параметрами $(a,b,d) \in \Omega$ и аргументом $n \in N_k \subset N$, где

$$\Omega = [0,1] \times [0,1.5] \times [0,0.1] \subset R^3, \quad N_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}, \quad N_1 = N;$$

2) как оценить соответствующие подмножествам N_k наилучшие приближения

$$E_k \stackrel{def}{=} \inf_{(a,b,d)\in\Omega}\sup_{n\in N_k}|\varepsilon_n(a,b,d)| \quad (\varepsilon_n = \varepsilon_n(a,b,d) \stackrel{def}{=} L_n - u_n(a,b,d), \;\; E_1 = E)? \qquad (3)$$

Теорема 10 ([2]). *В приближенных равенствах*

$$L_n \approx (4/\pi^2)\ln n + \widetilde{\alpha}_0, \quad L_n \approx (4/\pi^2)\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0, \quad n \in N \qquad (4)$$

для наилучшего приближения $E = E_1$ имеют место следующие оценки:

$$E < \inf_{(0,b,0)\in\Omega}\sup_{n\in N}|\varepsilon_n(0,b,0)| \le \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n - \widetilde{\alpha}_0\right| = \\ = 0.165637883\ldots = \delta_1, \qquad (5)$$

$$E < \inf_{(a,b,0)\in\Omega}\sup_{n\in N}|\varepsilon_n(a,b,0)| \le \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0\right| = \\ = 0.001309064\ldots = \delta_2, \qquad (6)$$

где функции погрешности ε_n определены согласно (3) *и* (2), $\widetilde{\alpha}_0 = c_0 + (4/\pi^2)\ln 2 = 1.270353244\ldots$ ($c_0 = 0.989431273\ldots$ — *const Ватсона*).

Видно, что использование сдвига аргумента логарифма во втором приближенном равенстве из (4) улучшает характеристику δ_1 более чем на два порядка ($\delta_1/\delta_2 = (0.165637883\ldots)/(0.001309064\ldots) \approx 126.5$).

Использование слагаемой вида $d/(n+a)^2$ в правой части (2) на такой же порядок улучшает характеристику δ_2 логарифмического приближения L_n со сдвигом $a = 0.5$, что хорошо прослеживается в теореме 11.

Теорема 11 ([3]). *Приближенное равенство с вполне определенной правой частью вида*

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2}, \quad n \in N \tag{7}$$

обеспечивает следующую оценку для наилучшего логарифмическо-дробно-рационального приближения E (*в* (3) $E_1 = E$):

$$E < \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0 - \frac{d_1^*}{(n+0.5)^2}\right| < 0.000005282\ldots = \delta_3, \tag{8}$$

где $d_1^* = 2.25 \cdot [L_1 - (4/\pi^2)\ln 1.5 - \widetilde{\alpha}_0] = 0.002945386\ldots, \quad L_1 = 1/3 + 2\sqrt{3}/\pi$.

Результат теоремы 11 сильнее, чем ранее приведенная оценка (6), что видно из отношения $\delta_2/\delta_3 \approx 247.8$. Отметим, что в условиях теорем 10 и 11 конкретные значения констант a, b, d определены достаточно строго (см. [2], [3]), и заметное улучшение оценки (8) варьируя только ими становится невозможной. Поэтому используем следующий алгоритм увеличения точности аппроксимации в формуле (7):

- значения констант Лебега $L_1 - L_5$ (для определенности) с необходимой точностью вычислим согласно формуле Фейера (1), например, $L_1 = 1.435991124176917\ldots,\ L_5 = 1.961360593766014\ldots$;
- приближенное уравнение (2) и экстремальную задачу (3) детально изучим при $n \in N_6 \subset N$;
- коэффициенты $a = 0.5,\ b = \widetilde{\alpha}_0$ в (7) оставим без изменения, а отличную от d_1^* постоянную $d = d_6^*$ определим из условия совпадения левой и правой частей (2) на концах их общей области определения $N_6 \subset N$. В итоге получим более сильный результат.

Теорема 12. *В приближенном равенстве с конкретной правой частью вида*

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) + \widetilde{\alpha}_0 + \frac{d_6^*}{(n+0.5)^2}, \quad n \in N_6$$

для наилучшего приближения E_6 (*в* (3) $k = 6$) *верна оценка*

$$E_6 < \sup_{n\in N_6}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5) - \widetilde{\alpha}_0 - \frac{d_6^*}{(n+0.5)^2}\right| < 0.000000033688\ldots \stackrel{def}{=} \delta_4,$$

где $d_6^* = 30.25 \cdot [L_5 - (4/\pi^2)\ln 5.5 - \widetilde{\alpha}_0] = 0.002993865903\ldots$.

Здесь наблюдается более весомый вклад дробно-рациональной слагаемой на точность аппроксимации константы Лебега L_n $(n \in N_6)$, и с ростом значения индекса k в (3) величины E_k $(k \geq 6)$ стремятся к нулю с большой скоростью.

Замечание. При $k = 11$ значение наилучшего приближения E_{11} сверху оценивается величиной $\delta_5 = 0.000000002556\ldots$, и характеристика δ_4 из теоремы 12 уменьшается более чем на один порядок (в этом случае погрешность аппроксимации константы Лебега логарифмическо-дробно-рациональной функцией находится в пределах одной миллиардной).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Fejer L.* Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues // Ann. de Ec. Norm. 1911. Vol. 28. P. 63–103.

[2] *Shakirov I.A.* About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, № 6. P. 841–846.

[3] *Шакиров И.А.* Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональной функцией // Изв. вузов. Математика. 2023. № 11. С. 75–85.