УДК 517.9

О периодическом аналоге одного интегрального преобразования[1]

А. Б. Афанасьева, В. Б. Васильев, А. Б. Каманда Бонгай
(Белгород, Россия)
vbv57@inbox.ru

В работе рассматривается периодический аналог одного интегрального преобразования, которое применялось для построения решений дискретных эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конических областях. Рассмотрен случай угла на плоскости и выписан явный вид этого преобразования, содержащий периодический аналог преобразования Гильберта.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретное преобразование, периодический аналог преобразования Гильберта.

On periodic analogue of a certain integral transform[1]

A. B. Afanaseva, V. B.'Vasilyev, A. B. Kamanda Bongay
(Belgorod, Russia)
vbv57@inbox.ru

We consider periodic analogue of a certain integral transform which was applied for constructing solutions for discrete elliptic pseudo-differential equations in conical domains. the case of a plane sector was considered and explicit form for this transform with periodic analogue of the Hilbert transform is written.

Keywords: digital pseudo-differential operator, discrete transform, periodic analogue of the Hilbert transform.

Введение

В работах [1,2,3] изучались вопросы разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конических областях. Для модельных псевдодифференциальных уравнений были построены решения в простых канонических областях с помощью специальной факторизации эллиптических символов. однако с вычислительной точки зрения полученные формулы трудно использовать и в связи с этим появилась необходимость дискретизации полученных результатов. Появилась концепция дискретных псевдодифференциальных операторов [4] и некоторые результаты получили дискретную интерпретацию.При построении решений в непрерывном случае использовались некоторое интегральное преобразование, дискретный аналог которого приводится в этой заметке.

Дискретные функции и операторы

Пусть $\mathbb{Z}^2$ – целочисленная решетка на плоскости, $h > 0, \hbar = h^{-1}$. Обозначим $K_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), x_2 > a_n|x_1|a_n > 0\}$ угол раствора $2\operatorname{arctg} a_n$, где a_n может принимать значения вида $n, 1/n, n \in \mathbb{N}$, $K_{n,d} = h\mathbb{Z}^2 \cap K_n$. Мы работаем с функциями дискретной переменной $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2, \hbar = h^{-1}$. Функции, определенные на $\hbar\mathbb{T}^2$, мы трактуем как периодические функции на $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

На функциях u_d дискретного аргумента можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

По заданной в $\mathbb{R}^2$ измеримой периодической функции $\widetilde{A}_d(\xi)$ (называемой символом) с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$ можно определить дискретный псевдодифференциальный оператор A_d в дискретном угле $K_{n,d}$ следующей формулой

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_{n,d}.$$

Дискретные и периодические преобразования

При исследовании разрешимости уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_{n,d} \tag{1}$$

возникает необходимость применения замены переменных, которая переводит точки дискретного угла $K_{n,d}$ в точки верней полуплоскости. Более точно, для $\tilde{x} \in K_{n,d}$ новые переменные выглядят так

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1| \quad . \end{aligned}$$

Если обозначить оператор замены переменной T_{a_n}, то мы получим

$$(T_{a_n} u_d)(\tilde{y}) = u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1|).$$

Решение уравнения (1) конструируется в образах Фурье, и поэтому желательно знать, как выглядит в образах Фурье оператор T_{a_n}, действующего на дискретную функцию, сосредоточенную на $K_{n,d}$.

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi) = \lim_{\tau\to+0}\sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1|)h^2 =$$

$$= \sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}} he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}\left(\sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{x}_2\cdot\xi_2}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1|)h\right) =$$

$$= \sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}} he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}\sum_{\tilde{y}_2\in h\mathbb{Z}} e^{i(\tilde{y}_2+a_n|x_1|)\cdot\xi_2}u_d(\tilde{x}_1,\tilde{y}_2)h$$

после замены $\tilde{y}_2 = \tilde{x}_2 - a_n|\tilde{x}_1|$. Тогда

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}} he^{i\tilde{x}_1\cdot\xi_1}e^{ia_n|\tilde{x}_1|\cdot\xi_2}\hat{u}_d(x_1,\xi_2),$$

где $\hat{u}_d(x_1,\xi_2)$ - дискретное преобразование Фурье по второй переменной. Положим $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$ и разобьем последнюю сумму на два слагаемых. Тогда

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi) = \sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} he^{i\tilde{x}_1\cdot(\xi_1+a_n\xi_2)}\hat{u}_d(x_1,\xi_2) + \sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_-} he^{i\tilde{x}_1\cdot(\xi_1-a_n\xi_2)}\hat{u}_d(x_1,\xi_2)$$

Последние две суммы вычислялись в [5] при $h=1$ путем регуляризации введением комплексного параметра и применения свойства преобразования Фурье о свертке. В результате имеем следующее выражение

$$(F_dT_{a_n}u_d)(\xi) = \frac{\tilde{u}_d(\xi_1+a_n\xi_2,\xi_2)+\tilde{u}_d(\xi_1+a_n\xi_2,\xi_2)}{2}+$$

$$+v.p.\frac{ih}{4\pi}\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1+a_n\xi_2-\eta_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta_1,\xi_2)d\eta_1-$$

$$-v.p.\frac{ih}{4\pi}\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-a_n\xi_2-\eta_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta_1,\xi_2)d\eta_1.$$

С помощью последней формулы конструируется решение дискретного уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Васильев В. Б.* Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи. М : URSS, 2010. 135 с.

[2] *Васильев В. Б.* Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах // Сибирск. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 1129–1149.

[3] *Vasilyev V.* Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case // Opuscula Math. 2019. V. 39, No 1. P. 109–124.

[4] *Vasilyev V. B.* On a digital version of pseudo-differential operators and its applications // Lect. Notes Comput. Sci. V. 11386. Cham : Springer, 2019. P. 596–603.

[5] *Vasilyev A., Vasilyev V.* Discrete singular operators and equations in a hal-space // Azerb. J. Math. 2013. V. 3, No 1. P. 84–93.