УДК 517.5

О наилучшем среднеквадратическим приближением аналитических функций в пространстве Бергмана[1]

М. Р. Лангаршоев (Старая Купавна, Российская Федерация)
mukhtor77@mail.ru

В работе найдены точные неравенства между наилучшими приближениями аналитических в единичном круге функций и усредненным значением модуля непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, пространство Бергмана.

On the best root-mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space[1]

M. R. Langarshoev (Staraya Kupavna, Russian Federation)
mukhtor77@mail.ru

In this work, the exact inequalities between the best approximations of analytic in the unit disk functions and the average value of the modulus of continuity of the m-th order in the Bergman space B_2 are found.

Keywords: best approximation, modulus of continuity, Bergman space.

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Аналитическая в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \; z = \rho e^{it}, \; 0 \le \rho < 1$$

принадлежит пространству Бергмана B_2, если [1]

$$\|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} < \infty.$$

[1] Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

[1] This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

© Лангаршоев М. Р., 2024

Величину

$$\omega_m(f^{(r)},u)_2=2^{m/2}\sup_{|u|\le t}\Big\{\sum_{k=r}^{\infty}c_k|^2\frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+1}|(1-\cos(k-r)u)^m\Big\}^{1/2} \qquad (1)$$

назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка в пространстве B_2.

Для любых $n\in\mathbb{N}$ и $a_k\in\mathbb{C}$, $k=0,1,\cdots,n$ символом

$$\mathcal{P}_{n-1}=\left\{p_{n-1}(z):p_{n-1}(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k\right\}$$

обозначим множество всех комплексных полиномов степени $\le n-1$.

Величину

$$E_n(f)_{B_2}=\inf\Big\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}}:p_{n-1}(z)\in\mathcal{P}_{n-1}\Big\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f(z)\in B_2$ подпространством полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$.

Для произвольной $r\in\mathbb{Z}$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ обозначим $f^{(r)}(z)=d^rf/dz^r$. Через $\mathcal{B}_2^{(r)}$ обозначим класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)\in B_2$, для которых $\|f^{(r)}\|_{B_2}\le\infty$.

Основной результат

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, $1\le p\le 2$, $0<u\le\pi/(n-r)$, $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,u]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место точное неравенства*

$$E_n(f)_2\le\frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h(1-\cos(n-r)t)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (2)$$

Неравенство (3) для функции $f_0(z)=z^n$ обращается в равенство.

Доказательство. Из соотношения (1) получаем

$$\omega_m^2(f^{(r)},t)_2\ge 2^m\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{kr}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m. \qquad (3)$$

Возведем обе части неравенства (3) в степень $p/2$:

$$\omega_m^p(f^{(r)},t)_2 \geq 2^{mp/2}\Big\{\sum_{k=r}^{\infty}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m\Big\}^{mp/2}. \qquad (4)$$

Теперь умножаем неравенство (4) на $\varphi(t)$, проинтегрируем по отрезке $[0,u]$, $0<u\leq\pi/(n-r)$, затем, возведем обе части полученного неравенство в степень $1/p$, имеем

$$\left(\int_0^u \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\geq\left\{\int_0^u\left[2^m\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{kr}^2\frac{|c_k|^2}{k-r+1}(1-\cos(k-r)t)^m\right]^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}.$$

Применяя к последнему неравенству, неравенство Минковского [2], а также с учетом того, что функция $\varphi(t)$ выполняет некоторые определенные условия, получаем

$$\left(\int_0^u \omega_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\geq 2^{m/2}\left[\int_0^u(1-\cos(n-r)t)^{mp/2}\varphi(t)dt\right]^{1/p}E_{n-r-1}(f^{(r)})_2. \qquad (5)$$

Используя леммы 1 из работы [3], получаем неравенство (2). Точность неравенство (2) для функции $f_0(z)=z^n$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 1 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Charles H.* Zeros of functions in Bergman Space // Bull. Amer. Math. Soc., 1974. Vol. 80, № 4. P. 713–714.

[2] *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. Москва : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 326 с.

[3] *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значение n-поперечников // Математические заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 617–631.