УДК 517.53

О кратной интерполяции в плоском классе Привалова в круге[1]

Е. Г. Родикова (Брянск, Россия)
evheny@yandex.ru

В работе решается задача интерполяции в плоском классе И.И. Привалова в круге при условии, что узлы интерполяции имеют ограниченную кратность и находятся в конечном числе углов Штольца.

Ключевые слова: кратная интерполяция, класс Привалова по площади, единичный круг, углы Штольца.

On multiple interpolation in the area Privalov classes in a disk[1]

E. G. Rodikova (Bryansk, Russia)
evheny@yandex.ru

We solve the problem of multiple interpolation in the Privalov classes by area provided that the interpolation nodes have a limited multiplicity and are located in the finite union of Stolz angles.

Keywords: multiple interpolation, the Privalov classes by area, the Stolz angles, unit disk.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D.

При всех $0 < q < +\infty$ введём в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. Класс $\tilde{\Pi}_q$ является обобщением хорошо известного плоского класса Р. Неванлинны и при $q = 1$ совпадает с ним. Отметим, что пространства $\tilde{\Pi}_q$ возникают естественным образом при исследовании вопросов дифференцирования в классах И.И. Привалова (см. [1]).

В данной работе исследуются вопросы интерполяции в указанных классах при всех $0 < q < 1$. Сформулируем общую задачу кратной интерполяции в классе $\tilde{\Pi}_q$: пусть $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ и $\{w_k\}_1^\infty$ - произвольные последовательности комплексных чисел; для фиксированного номера $j \geq 1$

обозначим через p_j — кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ — кратность появления числа z_j на «отрезке» $\{z_k\}_1^j$. Очевидно, что $1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty$. При каких условиях, налагаемых на узлы $\{z_k\}_1^\infty$ и последовательность точек $\{w_k\}_1^\infty$, можно построить функцию из класса $\tilde{\Pi}_q$, такую что

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, \ldots? \tag{1}$$

Последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ в этом случае называют *интерполяционной.* Если $\sup\limits_{j\geq 1}\{p_j\} < +\infty$, то узлы интерполяции имеют ограниченную кратность. Если $s_k = 1$, т.е. все члены последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ различны, то говорят, что интерполяция осуществляется на множестве простых узлов $\{z_k\}$.

При решении задачи свободной интерполяции, когда на интерполируемую функцию налагаются минимальные ограничения, важно найти естественный класс, которому должно принадлежать сужение функции на интерполяционное множество.

Для заданной последовательности $\{z_k\}_1^\infty \subset D$ и фиксированного $0 < q < 1$ обозначим через $l^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_k\}_1^\infty$, таких что

$$\ln^+ |w_k| = o\left((1 - |z_k|)^{-2/q}\right),\ k \to +\infty,$$

т.е.

$$|w_k| = \exp \frac{\mu(k)}{(1 - |z_k|)^{2/q}}, \tag{2}$$

$\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \to +\infty$.

Отметим, что класс $l^q(z_n)$, а вместе с ним и условие (2), являются естественными для решения задачи (1) в классе $\tilde{\Pi}_q$, ввиду справедливости следующей теоремы:

Теорема A. (см. [2]) *Пусть* $q > 0$. *Если* $f \in \tilde{\Pi}_q$, $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $0 < r < 1$, *то*

$$\ln^+ M(r, f) = o((1 - r)^{-2/q}), \quad r \to 1 - 0,$$

причём эта оценка является точной.

Кроме того, как установлено в [3], плоский класс Привалова инвариантен относительно оператора дифференцирования при всех $q > 0$.

Для формулировки основного результата введем дополнительные обозначения и определения. Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ (см. [4]). Обозначим $\pi_{\beta,n}(z,z_k)$ произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ без n-го фактора. Если $\beta = m \in \mathbb{Z}_+$ произведение Джрбашяна имеет вид:

$$\pi_m(z,z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}_k(z_k - z)}{1-\overline{z}_k z} \exp \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\overline{z}_k z}\right)^{j+1}.$$

Как установлено в [4], произведение $\pi_\beta(z,z_k)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\beta+2} < +\infty.$$

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0<\delta<1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.

К классу $\widetilde{\Delta}$ отнесём последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. узлы интерполяции имеют ограниченную кратность:

$$\sup_{k\ge 1}\{p_k\} = p < +\infty,$$

2. $$\int_0^1 (1-r)n^q(r)dr < +\infty,$$

   где $n(r) = card\{z_k : |z_k| < r\}$ для любого $0 \le r < 1$;

3. найдется положительная бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, такая что

$$|\pi_{\beta,n}(z_k,z_n)| \ge \exp\frac{-\varepsilon_n}{(1-|z_n|)^{\frac{2}{q}}},$$

   при всех $\beta > \frac{2}{q} - 2$.

Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < 1$, *последовательность* $\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$ *для некоторого* $0<\delta<1$.

Если $\{z_k\}_1^\infty \in \widetilde{\Delta}$, *то для любой последовательности* $\{w_k\} \in l^q(z_n)$ *можно построить в явном виде функцию* $f \in \tilde{\Pi}_q$, *являющуюся решением интерполяционной задачи* (1).

Обратно, если задача (1) *разрешима при всех* $1 \leq s_k < +\infty$ *и* $\{w_k\}_1^\infty \in l^q(z_n)$, *то* $\{z_k\}_1^\infty \in \widetilde{\Delta}$.

Отметим, что постановка задачи кратной интерполяции и способ построения специальной системы функций, решающей задачу интерполяции с узлами ограниченной кратности восходит к работе М.М. Джрбашяна [5]. Задача (1) на множестве простых узлов в классе $\tilde{\Pi}_q$ решалась в работах автора [6], [7]. Вопросам интерполяции в классах Привалова [8] посвящены также работы [9]— [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Rodikova E.G., Shamoyan F.A.* On the differentiation in the Privalov classes // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2020. 13:5. С. 622-630.

[2] *Родикова Е.Г.* О коэффициентных мультипликаторах плоских классов Привалова // Уфимск. матем. журн. 2021. 13:4. С. 82–93.

[3] *Шамоян Ф.А., Махина Н.М.* Некоторые замечания о дифференциальных операторах в классах И.И. Привалова // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. 19:2. С. 784–791

[4] *Шамоян Ф.А.* Весовые пространства аналитических функций со смешанной нормой. - Брянск: РИО БГУ. 2014. — 250 с.

[5] *Джрбашян М.М.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2 // Изв. АН АрмССР. 1974. 9:5. С. 339—373.

[6] *Родикова Е.Г.* Об интерполяции на множествах Карлесона в плоских классах И.И. Привалова в круге // Ученые записки Брянского государственного университета. 2022. 4:28. С. 13-15.

[7] *Родикова Е.Г.* Интерполяционные последовательности плоских классов Привалова // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа - 2023. Воронеж: Изд. дом ВГУ. – С. 344-345.

[8] *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций — М.: Изд. МГУ, 1941. —206 с.

[9] *Родикова Е.Г., Беднаж В.А.* Об интерполяции в классах И. И. Привалова в круге // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1762–1775.

[10] *R. Mestrovic, J. Susic* Interpolation in the spaces $N^p(1 < p < +\infty)$ // Filomat, 2013. 27:2. С. 291–299.

[11] *Rodikova E.G.* Multiple interpolation in the Privalov classes in a disk // Filomat. 2021. 35:1. С. 271-286.