УДК 517.518.43

О коэффициентах формального произведения тригонометрических рядов[1]

Т. Д. Козловская (Москва, Россия)
tdkozl2018@mail.ru

Рассматривается формальное произведение $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx}$ тригонометрического ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и абсолютно сходящегося тригонометрического ряда. Доказывается теорема, устанавливающая условие, при котором из $c_n \in l^p$ $(p \geq 2)$ вытекает, что и $K_n \in l^p$. Результат можно использовать при доказательстве теоремы об объединении замкнутых U_p-множеств для тригонометрической системы.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, формальное произведение, U_p-множества..

Благодарности: Работа выполнена при частичной поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики при МГУ.

On coefficients of formal product of trigonometric series[1]

T. D. Kozlovskaya (Moscow, Russia)
tdkozl2018@mail.ru

A formal product $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} K_n e^{inx}$ of trigonometric series $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ and absolutely convergent trigonometric series is considered. A theorem stating an a condition under which the assumption $c_n \in l^p$ $(p \geq 2)$ implies $K_n \in l^p$ is proved. This result can be used to obtain a theorem on the union of closed U_p- sets for trigonometric system.

Keywords: trigonometric series, formal product, U_p- sets..

Acknowledgements: This work was partially supported by Moscow center for fundamental and applied mathematics.

Формальным произведением двух тригонометрических рядов $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ и $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx}$ назовем ряд, коэффициенты которого определяются равенством

$$K_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \gamma_{n-k}. \tag{1}$$

А. Райхман доказал (см., например, [1]), что если $c_n \to 0$ при $n \to +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|$ сходится, то все $K_n \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Множество

$E \subset [a,b]$ называется U_p-множеством для системы $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, если не существует нетривиального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$, $c_n \in l^p$, сходящегося к нулю всюду вне E.

В работе [2] была доказана

Теорема 1 (см. [2]). *Объединение счётного множества замкнутых U_p-множеств, $2 \le p < \infty$, для системы функций Уолша является U_p-множеством для этой системы.*

В доказательстве используется тот факт, что коэффициенты K_n формального произведения ряда Уолша и полинома Уолша принадлежат l^p, если коэффициенты ряда из l^p. Однако для тригонометрической системы функций не очевидно, что из условия $c_n \in l^p$ вытекает, что и $K_n \in l^p$. Пусть c_{m_n} – подпоследовательность последовательности c_n, состоящая из всех таких элементов последней, для которых $|c_{m_n}| > |c_k|$, если $k > m_n$.

Докажем для формального произведения тригонометрических рядов следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p < \infty$ $(p \ge 2)$, $c_k = 0$, если $k \neq m_n$; $\lambda(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{inx} \in C^{(3)}(T)$. Тогда $K_n \in l^p$.* **Доказательство**. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=-\infty}^{[\frac{n}{2}]} |c_k||\gamma_{n-k}|,$$

$$T_n = \sum_{k=[\frac{n}{2}]+1}^{+\infty} |c_k||\gamma_{n-k}|,$$

так что $|K_n| \le S_n + T_n$.

Из условия $\lambda(x) \in C^{(3)}(T)$ следует, что коэффициенты Фурье этой функции $\lambda_n = o(1/|n|^3)$. Поэтому

$$|S_n| \le A \sum_{r=n-[\frac{n}{2}]}^{+\infty} |\gamma_r| \le \frac{B}{n^2}\ (\in l^p),$$

где A, B—- константы.

Докажем, что $T_n \in l^p$. Разобьем ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p$ на пачки вида $\sum\limits_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p$.

$$T_{2m_k} = \sum_{j=m_k+1}^{+\infty} |c_j||\gamma_{2m_k-j}| = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k-m_i}|,$$

так как $c_j = 0$ для $j \neq m_i$.

$$T_{2m_k+1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}||\gamma_{2m_k+1-m_i}|,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$T_{2m_{k+1}-1} = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}| \sum |\gamma_{2m_{k+1}-1-m_i}|.$$

Суммируем эти $2m_{k+1} - 2m_k$ слагаемых, затем используем монотонное убывание последовательности $|c_{m_n}| : |c_{m_i}| \leq |c_{m_{k+1}}|$ для всех $i \leq k+1$:

$$\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n = \sum_{i=k+1}^{+\infty} |c_{m_i}| \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leq |c_{m_{k+1}}| \sum_{j=2m_k-m_i}^{2m_{k+1}-1-m_i} |\gamma_j| \leq |c_{m_{k+1}}| \sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|.$$

Полученное неравенство приводит к следующей оценке:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^p = \sum_{k=\infty}^{+\infty} \sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n^p| \leq \sum_{k=\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=2m_k}^{2m_{k+1}-1} T_n \right)^p \leq \sum_{k=\infty}^{+\infty} |c_{m_{k+1}}|^p \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j| \right)^p.$$

По условию $c_{m_n} \in l^p$ и ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_j|$ сходится. Значит, $T_n \in l^p$. Итак, коэффициенты формального произведения $K_n \in l^p$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961. 936 с.

[2] *Козловская Т. Д.* Об U_p-множествах для системы функций Уолша // Вестник МГТУ "СТАНКИН 2012 № 1(18). С. 85–88.