

# **Волны, структуры, самоорганизация.**

Описание к лабораторным работам.

*Трубецков Д.И., Короновский А.А.,  
Храмов А.Е., Ремпен И.С.*

## Предисловие

Лаборатория «Волны, структуры, самоорганизация» кафедры электроники колебаний и волн факультета нелинейных процессов является современным научно-исследовательским практикумом для студентов-физиков и радиофизиков, предназначенным для проведения практических занятий по курсам, связанным с изучением волновых процессов, физики открытых систем и самоорганизации в нелинейных системах. Лаборатория «Волны, структуры, самоорганизация» является уникальной, включая в себя возможность проведения физических экспериментов по наблюдению нелинейных явлений, ставших классическими примерами различных явлений в современной нелинейной физике, таких как наблюдение и исследование ячеек Бенара, ряби Фарадея, автоволн в периодических химических реакциях, солитонов в длинных замкнутых радиотехнических линиях с нелинейными элементами и т.д.

Цели лабораторных работ в практикуме состоят в теоретическом и экспериментальном изучении волновых процессов и самоорганизации в нелинейных средах различной природы. Структура каждого из описаний включает в себя: (1) теоретическое описание, в котором приводятся основные сведения, уравнения, описывающие явление, их теоретический анализ и основные соотношения, которые далее необходимо будет использовать при выполнении расчетного и экспериментального заданий; (2) задания для численного расчета (для чего в пособии приведены процедуры для программы MathCad, которые студенты должны использовать при выполнении данных заданий); (3) методика проведения эксперимента, (4) экспериментальное задание, (5) контрольные вопросы, которые являются средством контроля студентом самостоятельной работы по подготовке к выполнению лабораторной работы.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой первую часть описания к лабораторным работам, включенным в практикум «Волны, структуры, самоорганизация», и включает в себя работы, посвященные изучению формирования и динамики паттернов в активных автоволновых средах. В пособие вошли описания следующих лабораторных работ:

1. Колебания, автоколебания и автоволны в химических реакциях (автор Трубецков Д.И.). Цель данной лабораторной работы состоит в теоретическом и экспериментальном изучении колебательных и волновых явлений в химических системах. После ознакомления с теоретической частью работы, в которой описаны модель Лотки – «химический маятник», автоколебательная химическая реакция – реакция Белоусова-Жаботинского, а также автоволновые феномены в активной химической системе (ревербератор, ведущий центр), студентам необходимо будет провести ряд теоретических расчетов. Эксперимент предлагается провести на примере реакции Бриггса-Раушера (йодные часы), в процессе которой в реакторе изменяется концентрации йода и йодид-ионов, что приводит, в частности, к периодическому изменению окраски раствора.

– Ячейки Бенара (автор работы Ремпен И.С.). Цель лабораторной работы состоит в теоретическом и экспериментальном изучении формирования паттернов (ячеек Бенара) в тонком слое вязкой жидкости, подогреваемого снизу – конвекции Рэлея–Бенара и Бенара-Марангони. Описание лабораторной работы включает в себя основные теоретические сведения о явлении, описание методики экспериментального исследования, задания для расчетов и практического исследования.

– Пространственно-временные структуры ряби Фарадея (авторы Храмов А.Е. и Короновский А.А.). Цель данной лабораторной работы состоит в теоретическом и экспериментальном изучении явления самоорганизации, заключающемся в формировании структур на поверхности слоя жидкости, колеблющегося в вертикальном направлении – параметрическом возбуждении капиллярных волн. После ознакомления с теоретической частью работы, включающей вывод основных уравнений и получение дисперсионного уравнения для волн на поверхности жидкости, на основании которых выводятся основные характеристики возникающей структуры капиллярных волн, необходимо провести теоретические оценки для заданного преподавателем типа жидкости. Далее в эксперименте необходимо пронаблюдать возникающую рябь Фарадея на поверхности вязкой жидкости, определить характеристики ряби Фарадея при изменении параметров параметрического воздействия, сравнить результаты расчетов и экспериментального исследования.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Физика», «Физика открытых нелинейных систем», «Радиофизика и электроника», а также по направлениям «Радиофизика», «Прикладная математика и физика» и «Физика открытых нелинейных систем». Данное пособие будет полезно для всех студентов и специалистов, интересующихся проблемами физики открытых систем и нелинейной динамики.

*Д.И. Трубецков  
А.Е. Храмов*

## КОЛЕБАНИЯ, АВТОКОЛЕБАНИЯ И АВТОВОЛНЫ В ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЯХ

Цель данной лабораторной работы состоит в теоретическом и экспериментальном изучении колебательных и волновых явлений в химических системах. После ознакомления с теоретической частью работы, в которой описаны модель Лотки – «химический маятник», автоколебательная химическая реакция – реакция Белоусова-Жаботинского, а также автоволновые феномены в активной химической системе (ревербератор, ведущий центр), следует привести ряд теоретических расчетов. Эксперимент предлагается провести на примере реакции Бриггса-Раушера (йодные часы), в процессе которой в реакторе изменяется концентрации йода и йодид-ионов, что приводит, в частности, к периодическому изменению окраски раствора. Предлагается, выбирая условия смешивания заранее приготовленных растворов (начальное распределение концентрации) и форму границ реактора, воздействуя на физические параметры раствора, пронаблюдать перечисленные выше феномены.



Альфред Лотка



Б.П. Белоусов



А.М. Жаботинский

## Периодическая химическая реакция – «химический маятник»

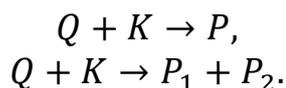
По-видимому, первым исследовал «химический маятник» – гипотетическую химическую реакцию в гомогенной среде – Альфред Лотка (см., например, Lotka A.J. Elements of physical biology. Baltimore, 1925).

Внутри гомогенной среды присутствуют поверхности раздела, которые отделяют друг от друга части среды, разные по составу и свойствам. Эти части среды должны быть достаточно велики, чтобы можно было использовать понятия температуры, концентрации и т.д. Гомогенность среды важна: именно из-за убеждения в том, что в такой среде не может быть колебательной реакции, отвергалась рецензентами статья Бориса Павловича Белоусова, в которой описывалась не гипотетическая, а реально существующая, ставшая впоследствии знаменитой реакция Белоусова-Жаботинского (BZ-reaction).

Символическая запись реакции Лотки выглядит так:



Словами реакцию можно описать следующим образом. Предположим, что в избыточном состоянии имеется некоторое вещество  $A$ , которое с определенной скоростью  $k_0$  переходит в вещество  $X$ . В «избыточном состоянии» означает, что количество вещества  $A$  практически не изменяется. Вещество  $X$  превращается со скоростью  $k_1$  в вещество  $Y$ . Чем больше вещества  $Y$ , тем эффективнее превращается оно в вещество  $X$ . В символической записи это отмечено обратной стрелкой над  $Y$ . Наконец, вещество  $Y$  со скоростью  $k_2$  превращается в вещество  $B$ . Как превратить символическую запись и словесное описание в математические уравнения? Этим занимается химическая кинетика, которая изучает взаимодействие различных веществ и скорости их реагирования. Для того, чтобы провзаимодействовать двум молекулам или атомам, им нужно встретиться. Но такие встречи случайны и многочисленны, поэтому нет смысла рассматривать каждую, да и предсказать их невозможно. Поэтому в химической кинетике говорят о вероятности встречи и о среднем числе реагирующих в процессе реакции молекул или атомов, т.е. об усредненной величине концентрации вещества  $Q$  и  $K$ . В результате взаимодействия может появиться либо сложная молекула  $P$ , либо две новых молекулы  $P_1$  и  $P_2$ . В символической записи имеем:



Скорость реакции зависит от вероятности столкновения веществ  $Q$  и  $K$ , которая пропорциональна произведению усредненных величин концентраций  $N_Q$  и  $N_K$ . Тогда скорость реакции взаимодействия можно записать так:

$$v_{QK} = k_{QK} N_Q N_K \quad (2)$$

где коэффициент  $k_{QK}$  – абсолютная скорость этой реакции, зависящая, например, от температуры, которая определяет скорость движения

молекул. Реакцию, описываемую соотношением (2), называют реакцией второго порядка.

Когда сложная молекула распадается на две более простые, скорость распада пропорциональна концентрации распадающегося вещества, т.е.

$$v_{P \rightarrow Q+K} = k_P N_P. \quad (3)$$

Это реакция первого порядка.

Если вещество просто втекает (или вытекает) в область реакции с постоянной скоростью, то имеет место реакция нулевого порядка, скорость которой не зависит от концентрации.

Основываясь на изложенных сведениях, вернемся к математическому описанию реакции Лотки.

Обозначим концентрации взаимодействующих веществ через  $X$ ,  $Y$  и  $B$ . Тогда математически реакцию Лотки (1) с учетом соотношений (2) и (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= k_0 - k_1 XY, \\ \frac{dY}{dt} &= k_1 XY - k_2 Y, \\ \frac{dB}{dt} &= k_2 Y. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того, чтобы скорость образования вещества  $B$  была постоянной ( $\frac{dB}{dt} = 0$ ), необходимо, чтобы концентрация веществ  $X$  и  $Y$  не зависела от времени ( $\frac{dX}{dt} = \frac{dY}{dt} = 0$ ). Тогда из первых двух уравнений системы (4) находим, что

$$\begin{aligned} k_0 - k_1 XY &= 0, \\ (k_1 X - k_2) Y &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Решения системы уравнений (5) определяют так называемые равновесные значения концентраций

$$\bar{X} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{Y} = \frac{k_0}{k_2}. \quad (6)$$

Решение  $\bar{Y} = 0$ , следующее из последнего уравнения системы (4) и из второго соотношения системы (5) интереса не представляет.

Зададим малые отклонения  $x(t)$  и  $y(t)$  от равновесных значений, полагая

$$X(t) = \bar{X} + x(t), \quad Y(t) = \bar{Y} + y(t). \quad (7)$$

Предположим, что  $x(t) \ll \bar{X}$ ,  $y(t) \ll \bar{Y}$  и всеми величинами, содержащими произведения  $x$  и  $y$ , вторые и более высокие степени  $x$  и  $y$ , можно пренебречь. Подставляя выражения (7) в первые два уравнения системы (4) и пренебрегая слагаемыми с  $xy$ , получим линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -k_2 y - \frac{k_1 k_0}{k_2} x, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{k_1 k_0}{k_2} x. \end{aligned} \quad (8)$$

Следует заметить, что в системе уравнений (8) отклонения могут быть положительными и отрицательными, в то время как концентрации  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$  могут быть только положительными. Продифференцируем по времени

первое уравнение системы (8) и подставим в получившееся второе из этой системы. Окончательно получим уравнение маятника с затуханием

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2\gamma, k_1 k_0 = \omega_0^2.$

Лотка позднее ввел в свою гипотетическую реакцию не одну, а две реакции второго порядка, что привело к следующим уравнениям [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1 AX - k_2 XY, \\ \frac{dY}{dt} &= k_3 XY - k_4 Y. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуем систему (9) к нормированным переменным

$$x = X \frac{k_3}{k_4}, y = Y, \tau = k_4 t, K = \frac{k_1}{k_4} A, M = \frac{k_2}{k_1 A}.$$

Количество исходного вещества в процессе реакции пополняется, поэтому концентрация  $A$  остается постоянной.

После преобразований система (9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= Kx(1 - My), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y(x - 1). \end{aligned} \quad (10)$$

В книге [1] приводится программа для решения (10) в среде MathCAD, которая для частного случая  $M = 2$  и  $K = 0,1$  имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} &ORIGIN = 1 \quad M = 2 \quad K = 0,1 \\ &F(t, y) = \begin{bmatrix} Ky_1(1 - My_2) \\ y_2(y_1 - 1) \end{bmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \\ &ORIGIN = 0 \quad Z = Rkadapt(y, 0, 100, 5001, F) \\ &th := Z^{(0)} \quad X := Z^{(1)} \quad Y := Z^{(2)} \end{aligned}$$

	0	1	2
0	0	0,5	0,5
1	0,02 =	0,5	0,495
2	0,04	0,5	0,49
3	0,06	0,5	0,485
4	0,08	0,5	0,48
5	0,1	0,5	0,476

Результаты расчета по указанной программе, взятой из [1], приведены на рис. 1.

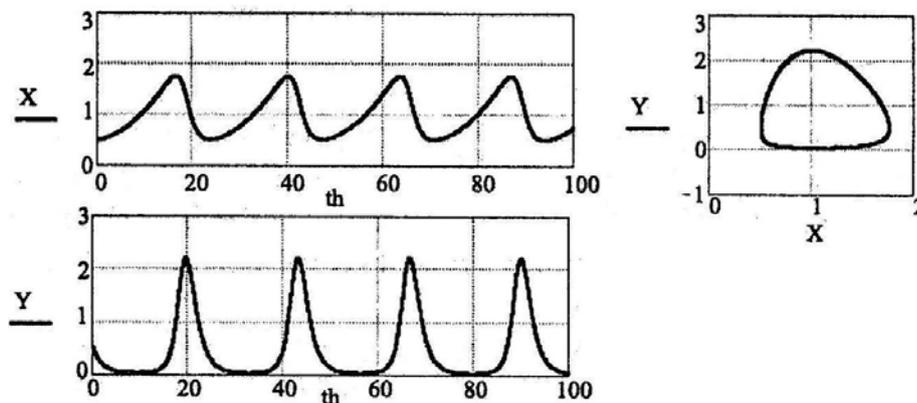


Рис. 1. Результаты расчета по программе, приведенной выше.

### Автоколебательные химические реакции

Как уже упоминалось, самая известная из реакций – реакция Белоусова-Жаботинского (БЖ), которую в 1951 году открыл Б.П. Белоусов. А.М. Жаботинский продолжил эти исследования, положив начало целому классу автоколебательных химических реакций. При протекании реакции в ней периодически (примерно раз в секунду) происходит изменение цвета раствора, в котором идет реакция окисления малоновой кислоты  $C_3H_4O_4$  смесью  $KBrO_2$  и  $Ce(SO_4)_2$ . Изменение цвета раствора происходит за счет образования в растворе ионов  $Ce^{4+}$ . При добавлении к раствору железа-фенантролина цвет меняется от синего к красному и снова к синему. Эта реакция хорошо изучена и с точки зрения теории колебаний.

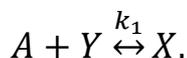
Она сложнее описанной выше реакции Лотки, поскольку в ней взаимодействуют, по крайней мере, три вещества и возможно существование автоколебательных режимов (незатухающих колебаний).<sup>1</sup>

Первая модель автоколебательной реакции БЖ была предложена Жаботинским и Корзухиным (см., например, [2] из списка дополнительной литературы) и содержала три динамических переменных:

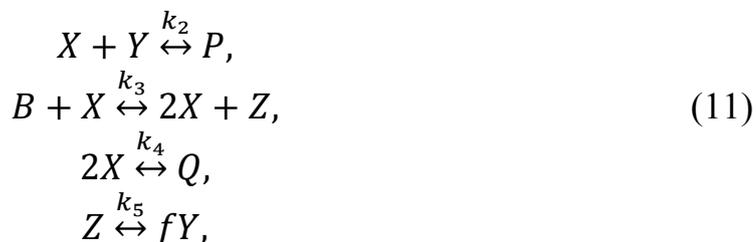
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= k_1 x_1 (c - x_2) - k_0 x_1 x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= k_1 x_1 (c - x_2) - k_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{aligned}$$

где  $x_2 = [Ce(IV)]$ ,  $[Ce(III)] + [Ce(IV)] = C$ ,  $x_1$  – концентрация катализатора,  $x_3 = [Br^-]$ . Предполагалось, что после реакции  $x_1 + x_2$  ионы  $Br^-$  полностью регенерируются.

Позднее Филд и Нойес предложили простой набор уравнений с использованием комбинаций из 10 реакций (см., например, [3] из списка дополнительной литературы):



<sup>1</sup> История открытия реакции ВЗ и во многом трагическая судьба ее автора – Бориса Павловича Белоусова – подробно описана в замечательной книге С.Э. Шноля «Герои, злодеи, конформисты российской науки». 2ое изд. М.: КРОН-ПРЕСС, 2001, 875 с.



где  $X$  - бромистая кислота  $HBrO_2$ ;  $Y$  - бромид  $Br^-$ ;  $Z$  - церий (IV)  $CeIV$ ;  $A = B$  - бромат-ион  $BrO_3^-$ .

При условии, что все реакции в схеме (11) считать необратимыми, то соответствующие уравнения для концентраций имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= k_1Ay - k_2xy + k_3Bx - 2k_4x^2, \\
 \frac{dy}{dt} &= -k_1Ay - k_2xy + fk_5z, \\
 \frac{dz}{dt} &= k_3Bx - k_5z.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

На рис. 2 из книги [3] дополнительного списка литературы приведено поведение предельного цикла в плоскости координат концентраций  $Br^-$  и  $HBrO_2$  (а); поведение предельного цикла в плоскости координат концентраций  $Br^-$  и  $Ce[IV]$  (б).

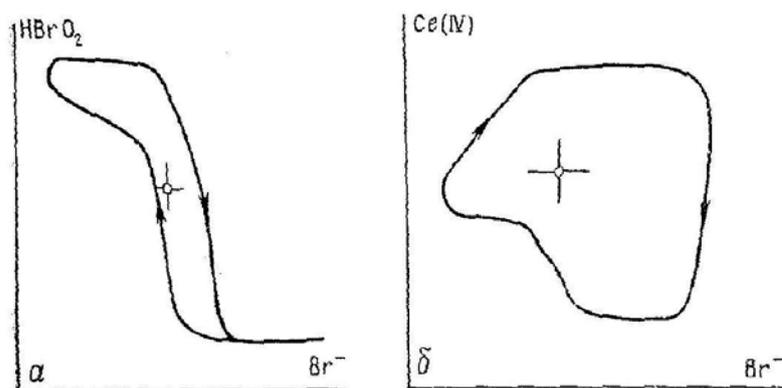


Рис. 2. Поведение предельного цикла системы (12).

### Автоволновые процессы в химических реакциях

В химических активных средах существуют стационарные периодические волны, характеристики которых в установившихся режимах не зависят от начальных и граничных условий и линейных размеров системы (последние определяют только возможность возникновения того или иного волнового режима). Их часто называют автоволнами по аналогии с автоколебаниями в сосредоточенных системах.

Можно дать такое определение автоволн.

Автоволны – самоподдерживающиеся волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики (период, длину волны, амплитуду и форму) постоянными за счет распределенного в среде источника энергии. В активной среде в каждой точке пространства запасена скрытая энергия и набегающая волна служит сигналом к ее высвобождению. Энергия,

которую переносит волна, ничтожно мала по сравнению с выделяющейся на расстояние в длину волны. Наглядным примером автоволны является волна распространения пламени в среде с восстановлением исходного состояния (волна пламени, бегущая по запальному шнуру или сухой степи). Впервые задачу о распространении фронта горения была решена известными физиками Я.Б. Зельдовичем и Д.А. Франк-Каменецким еще в 1938 году. Они теоретически показали, что в однородной по своим свойствам среде фронт горения движется без изменения формы и с постоянной скоростью, которая определяется только параметрами самой среды и не зависит от начальных условий.

В биологии самый известный пример автоволн – это нервные импульсы, которые бегут по нервным волокнам.

Перечислим некоторые общие свойства автоволн (АВ).

1. АВ – сильно нелинейная волна, форма профиля, амплитуда и скорость которой не зависят от начальных условий возбуждения, а зависят от свойств среды.

2. До и после прохождения АВ среда находится в состоянии покоя, т.е. автоволна локализована в пространстве (движущаяся структура).

3. Две АВ при столкновении уничтожают друг друга (пожар тушат пожаром).

4. Если к активной среде один раз приложить внешнее воздействие, то можно создать бесконечно долго живущий источник, периодически испускающий волны возбуждения (ведущий центр – источник концентрических волн, ревербератор – спиральная волна).

5. Если среда неоднородна, то возможны процессы размножения источников, которые приводят к автоволновому хаосу.

В таблице 1 дано сравнение обычных волн и автоволн.

Таблица 1.

<b>Свойство</b>	<b>Волны</b>	<b>Автоволны</b>
Сохранение энергии	+	-
Сохранение амплитуды и формы	-	+
Интерференция	+	-
Анигиляция	-	+
Отражение	+	-
Дифракция	+	+

Остановимся отдельно на аксиоматических моделях активных сред, которые основаны на том, что процесс возникновения и распространения в среде обладает рядом четко выраженных свойств. Такие модели были предложены и изучены применительно к ткани сердечной мышцы в 1946 году американским математиком Норбертом Винером, которого называют отцом кибернетики, и мексиканским физиологом Артуром Розенблютом.

Под активной (возбудимой) средой в аксиоматической модели понимают некоторое множество элементов, обладающих следующими свойствами:

1. Каждый элемент такого множества может находиться в одном из трех состояний: покой, возбуждение и рефрактерность (после возбуждения и пребывания в этом состоянии элемент переходит в состоянии рефрактерности; в течение рефрактерного периода элемент не реагирует на какие-либо воздействия, а после его окончания возвращается в состояние покоя).

2. По прошествии времени возбуждения элемент переходит на определенное время (время рефрактерности) в рефрактерное состояние, а затем возвращается в состояние покоя.

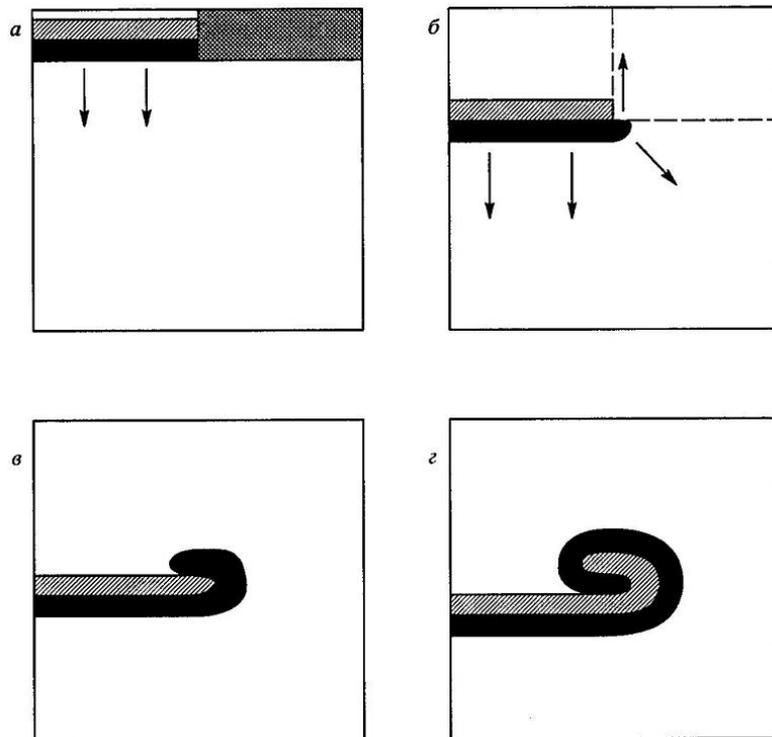
3. По множеству находящихся в покое элементов возбуждение от каждого возбужденного элемента распространяется с некоторой определенной скоростью.

4. Возможен самопроизвольный переход элемента в возбужденное состояние по прошествии некоторого времени (период спонтанной активности элемента), пока элемент не был возбужден.

В рамках этой модели были обнаружены два интересных феномена – возбуждение спиральных волн – ревербераторов – и концентрических волн – ведущих центров.

Рассмотрим качественно возникновение этих феноменов.

Пусть по участку двумерной активной среды периодически распространяется волна возбуждения. Допустим, что некоторая часть среды оказалась невосприимчивой к возбуждению в тот момент, когда по ней пробегает очередная волна возбуждения (рис. 3, а).



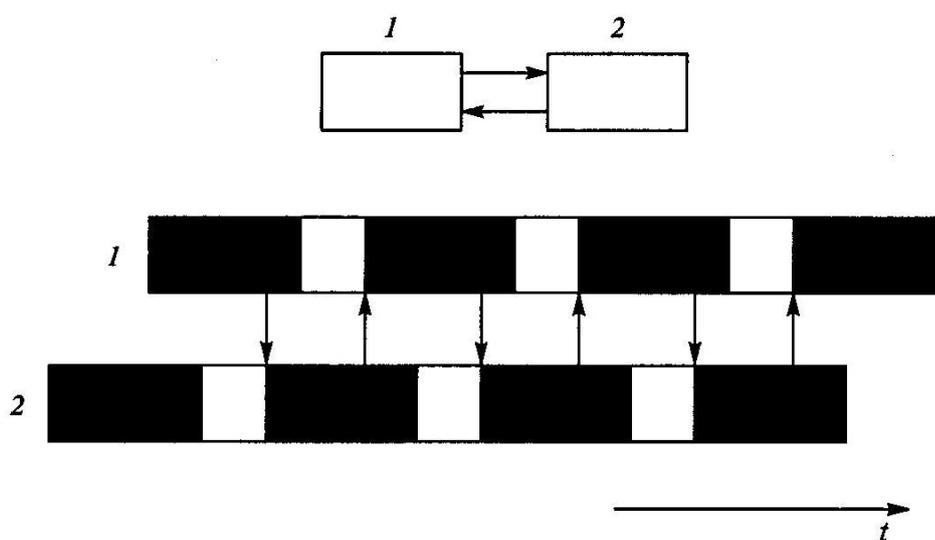
**Рис. 3.** Последовательность этапов возникновения ревербератора [2], [3] (из списка основной литературы), [5], [6] (из дополнительного списка). Волна возбуждения распространяется сверху вниз; черным показана возбужденная среда, штриховкой – среда в состоянии рефрактерности, сеткой – заторможенный участок среды, который становится возбуждимым (3б) в тот момент, когда мимо него проходит волна возбуждения.

Пусть теперь именно в тот момент, когда волна возбуждения огибает заторможенную область, та выходит из заторможенного состояния. Очевидно, что волна возбуждения начнет распространяться в вышедшую из торможения область (рис. 3, б). Если размеры этой области велики, волна возбуждения, пройдя по ней, обогнет рефрактерный участок и будет периодически огибать его (рис. 3, в-е). Возникшая спиральная волна получила название ревербератора. Исследования показали, что ревербераторы через некоторое время либо исчезают, либо порождают новые ревербераторы. Когда ревербераторов появляется больше, чем исчезает, в среде развивается лавинный процесс неупорядоченной активности.

Другой феномен, который был предсказан в рамках аксиоматической модели, – ведущий центр (ВЦ). Он представляет собой периодически действующий источник концентрически распространяющихся волн.

Предположим, что имеются всего два связанных между собой возбуждимых элемента (рис. 4).

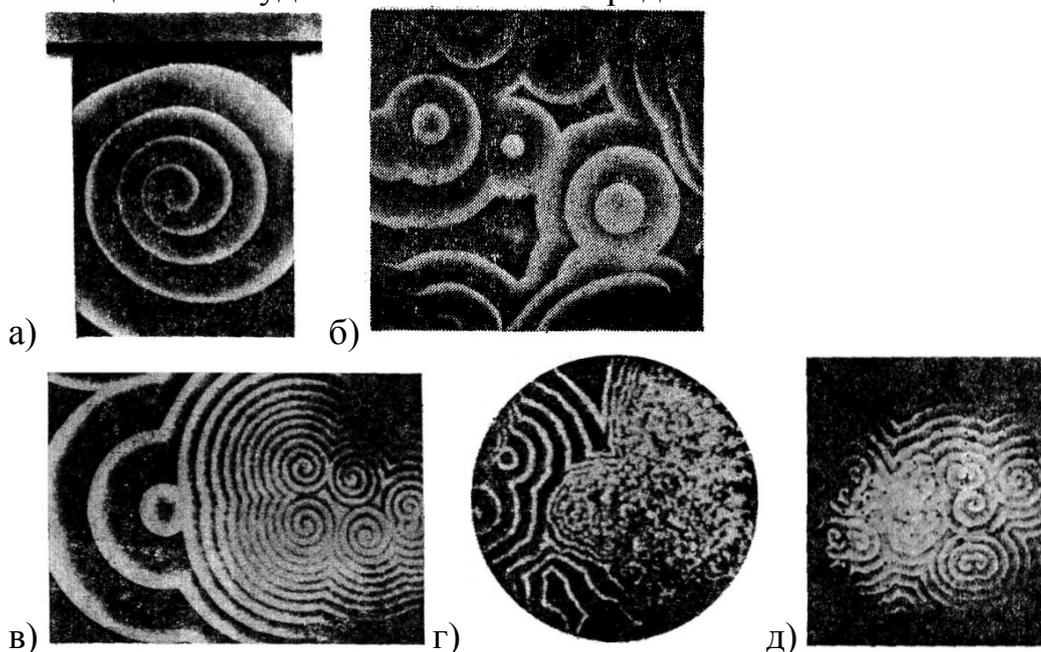
Каждый из них может перейти из состояния покоя в возбужденное состояние, а затем – в состояние рефрактерности. Таким образом, элемент может совершить всего один цикл колебаний. В том случае, когда элементов два и длительность возбужденного состояния больше длительности периода рефрактерности, а колебания сдвинуты по фазе, элементы будут поочередно запускать друг друга (рис. 4).



**Рис. 4.** Иллюстрация процесса перезапуска в системе, состоящей из двух возбуждимых элементов. Темная область соответствует состоянию возбуждения, белая – рефрактерности.

Если к моменту окончания периода рефрактерности первого элемента второй находится в возбужденном состоянии, то он возбуждает первый элемент. После этого они меняются ролями, и перезапуск повторяется еще раз и т.д. Иными словами пара элементов становится автоволновым источником, от которого по среде могут распространяться концентрические волны возбуждения.

На фотографиях (рис. 5) приведены некоторые феномены, возникающие в возбудимой химической среде.



**Рис. 5.** Различные феномены, возникающие в возбудимой химической среде.

- а) ревербератор;
- б) ведущие центры;
- в) ревербераторы разрушают ведущие центры;
- г) хаос;
- д) фибрилляции в химической возбудимой среде.

Фибрилляция – процесс образования и размножения ревербераторов, в результате чего вся система оказывается заполненной обрывками спиральных волн (рис. 5, г).

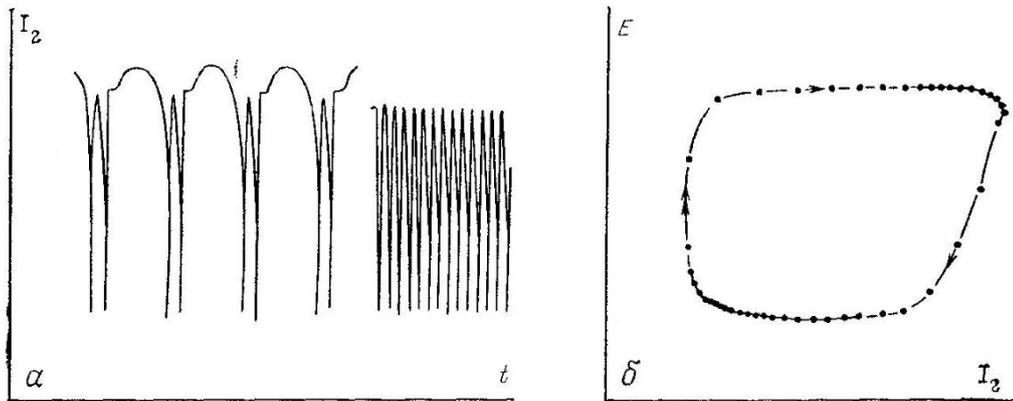
### Периодические йодные часы (реакция Бриггса-Раушера)

Будем следовать далее в изложении книги [3] из дополнительного списка литературы.

Реакция, открытая Бриггсом и Раушером в 1973 году, была названа йодными часами. В состав реакционной системы входят

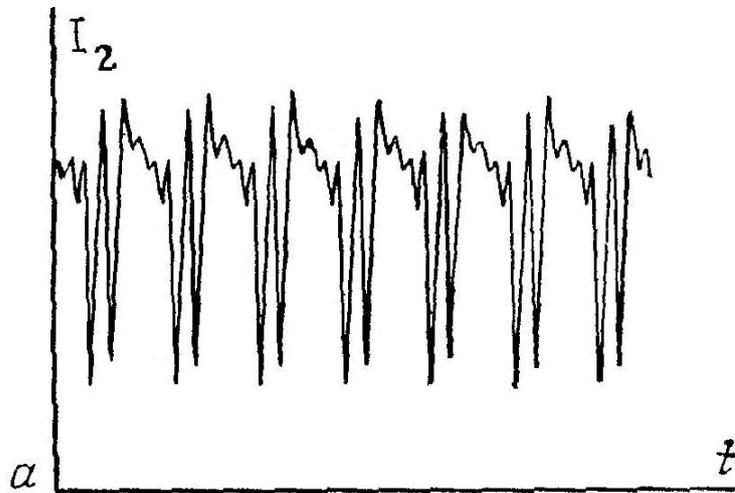
Йодат калия $KIO_3$	Малоновая кислота
Пероксид водорода $H_2O_2$	$CH_2(COOH)_2$
Хлорная кислота $HClO_4$	Сульфат марганца $MnSO_4$
(или серная кислота)	Крахмал.

В процессе реакции периодически изменяются концентрация йода  $I_2$  и йодид-ионов  $I^-$ , что приводит к изменению окраски раствора. Математическое моделирование показало, что система уравнений, описывающих реакцию, демонстрирует простые и сложные колебания и имеет предельный цикл (рис. 6).



**Рис. 6.** а) Простые и сложные колебания концентрации  $I_2$  в реакции Бриггса-Раушера; б) предельный цикл на плоскости электрические колебания -  $I_2$ .

На рис. 7 приведена экспериментальная зависимость колебаний концентрации  $I_2$  во времени.



**Рис. 7.** Колебания концентрации  $I_2$  во времени.

### Теоретическое задание

1. По приведенной в описании к работе программе проведите расчет графиков колебаний и фазового портрета для модели Лотки при

разных значениях  $M$  и  $K$ . Определите, как значения  $M$  и  $K$  влияют на вид колебаний.

2. Удовлетворительное описание реакции Белоусова-Жаботинского можно получить по упрощенной схеме, предложенной Хадсоном, которая в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений для изменения концентраций  $(x, y, z)$  трех веществ приведена в [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x + y + 0,1z, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma \{-4(x + x^3 + z) + th[100(1 - 16x + 4z)]\}. \end{aligned}$$

Воспользуйтесь программой на языке MathCAD, приведенной ниже [1] для частного случая  $\alpha = 0,1$  и  $\gamma = 10$ .

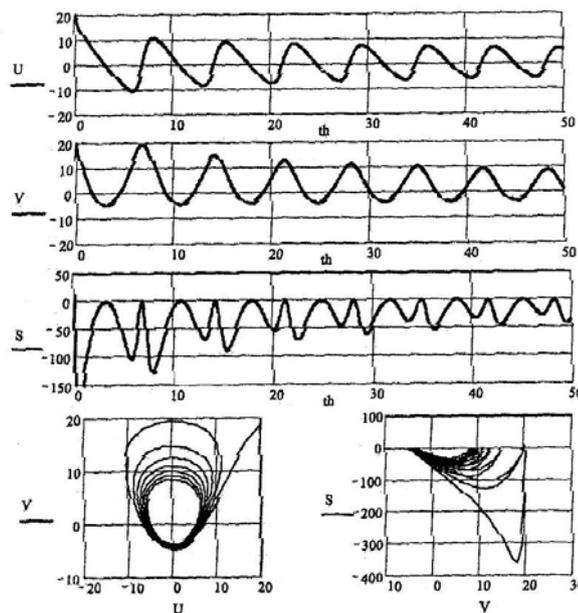
$$ORIGIN := 1 \quad \alpha = 0,1 \quad \gamma = 10$$

$$\begin{aligned} F(t, x) &:= \begin{bmatrix} \alpha \cdot x_1 + x_2 + 0,1 \cdot x_3 \\ \gamma \cdot [-4 \cdot [x_1 + (x_1)^2 + x_3] + \tanh[100 \cdot (1 - 16 \cdot x_1 + 4 \cdot x_3)]] \end{bmatrix} \quad x \\ &:= \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$ORIGIN := 0$$

$$X := rkfixed(x, 0.50, 1001, F) \quad th := X^{(0)} \quad U := X^{(1)} \quad V := X^{(2)} \quad S := X^{(3)}$$

Получите зависимости  $U = f(t)$ ,  $V = \varphi(t)$ ,  $S = \psi(t)$  и проекции фазового портрета на плоскости  $(V, U)$  и  $(S, V)$  при разных значениях  $\alpha$  и  $\gamma$ . Определите, как значения этих параметров влияют на вид колебаний.



**Рис. 8.** Результаты расчета по приведенной выше программе [1].

## **Экспериментальное задание (было подготовлено Б.П. Безручко и А.В. Красковым)**

Приготовление растворов для наблюдения колебаний, волн стационарных структур в химическом реакторе достаточно трудоемко и требует определенного навыка. Это связано с большой критичностью реакции к точности задания параметров системы – концентрации реагентов и их количественные соотношения. Поэтому для выполнения работы следует пользоваться уже подготовленными растворами, находящимися в 3 цилиндриках (мензурки по 100 мл). Реакторами в работе являются чашки Петри. В них помещают порции растворов и быстро перемешивают стеклянной палочкой, если проводится наблюдение колебаний в однородной среде, или, наоборот, обеспечивают относительное пространственное разделение компонент при исследовании неоднородной системы. Для фиксации волновых процессов слой жидкости должен быть достаточно тонким (порядка 1-2 мм). Растворы следует помещать в реактор в определенном порядке, в соответствии с номерами на цилиндриках. Сначала I и III, а затем раствор перекиси водорода (III).

**Необходимые предосторожности:** Не допускайте разбрызгивания растворов. При попадании растворов на кожу смойте их водой. Старайтесь держать реактор подальше от лица. Не вынимайте реакторы и сосуды с растворами из поддона.

1) Добейтесь однородных колебаний в растворе с перемешиванием и оцените с помощью секундомера их период.

2) Пронаблюдайте и опишите явления в тонком слое раствора на дне чашки Петри. Выделите типы пространственных структур.

3) С помощью двух чашек Петри разного диаметра, поставив одну в другую, сделайте кольцевой резонатор. Пронаблюдайте и опишите движение цветовых фронтов.

### **Контрольные вопросы**

1. Объясните, почему в кинетической теории переходят от символической записи химической реакции к дифференциальным уравнениям для концентрации реагентов. Продемонстрируйте это на примере реакции Лотки.

2. Покажите на примере реакции Лотки, как в случае малых возмущений реагентов получается линейное уравнение «химического маятника».

3. Прокомментируйте Ваш численный расчет уравнений Лотки.

4. Прокомментируйте Ваш численный расчет на основе модели Хадсона как упрощенной модели Белоусова-Жаботинского.

5. Что такое возбудимая среда в рамках аксиоматической модели Винера-Розенблюта?

6. Объясните возникновение ревербератора в рамках аксиоматической модели.

7. Объясните возникновение ведущего центра в рамках аксиоматической модели.

8. Расскажите о порядке проведения эксперимента.

### Основная литература

1. *В.И. Каганов* Колебания и волны в природе и технике. Компьютеризированный курс: Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия. Телеком, 2008, 336 с.

2. *Д.И. Трубецков* Введение в синергетику. Хаос и структуры. 3-е издание. (Серия Синергетика: от прошлого к будущему) М.: ЛКИ, 2010, §5.

3. *Д.И. Трубецков, Е.С. Мчедлова, Л.В. Красичков* Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Издательство физико-математической литературы, 2002, Главы 6 и 8, 200 с.

### Дополнительная литература

[1] *О.Н. Темкин* Гомогенный металлокомплексный катализ. Кинетические аспекты. М.: ИКЦ «Академкнига», 2008, Глава 6 Нелинейные эффекты (критические явления) в динамике гомогенных химических реакций, с. 630-758.

[2] *А.М. Жаботинский, Х. Отмер, Р. Филд и др.* Колебания и бегущие волны в химических системах: пер. с англ. / Под ред. Р.Филда, М. Бургер. М.: Мир, 1988, 720 с.

[3] *Д. Гарел, О. Гарел* Колебательные химические реакции: пер. с английского – М.: Мир, 1986, 148 с. (Часть I, 3.2, 3.3; часть III, 3.2.)

[4] *А.М. Жаботинский* Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974, 179 с.

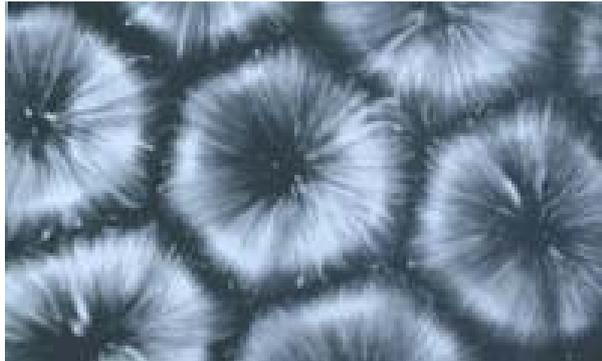
[5] *В.И. Кринский, А.С. Михайлов* Автоволны. М.: Знание, 1984, 64 с.

[6] *С.В. Фомин, М.Б. Баркенблит* Математические проблемы в биологии. М.: Наука, 1973, 200 с.

[7] *С.В. Поршнев* Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCAD. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия. Телеком, 2002, 252 с. (есть издание 2004 года).

Ссылки [1], [2] и [4] из дополнительного списка рекомендуются тем, кто хочет детально изучить колебательные, автоволновые процессы и образование структур в химических системах или заняться самостоятельными исследованиями в этой области.

## СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ ЖИДКОСТИ И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР



Целью данной работы является изучение пространственных периодических структур, возникающих в результате термоконвекции в горизонтальном слое жидкости (ячеек Бенара). В ходе выполнения работы предполагается ознакомление студентов с качественным и аналитическим описанием физических процессов, отвечающих за появление конвективных структур, а также выполнение эксперимента по изучению свойств данного явления при различных условиях.

## 1. Введение

Конвекция в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, является одним из ключевых экспериментов, в котором наиболее ярко проявляется феномен самоорганизации структур в неравновесных средах [1], [3].

Экспериментальное изучение термоконвекции началось с опытов французского ученого Анри Бенара (H. Benard), проведенных им в 1900 году. В своих экспериментах Бенар использовал спермацет или кашалотовый воск (жидкость, заполняющую головные полости кашалота). Тонкий (до 0,5 мм) слой спермацета наливался на стальной лист и равномерно подогревался снизу. В ходе эксперимента Бенар наблюдал возникновение регулярных пространственно периодических ячеек (рис. 1). Именно после опытов Бенара любые ячейки конвекции часто именуют ячейками Бенара.

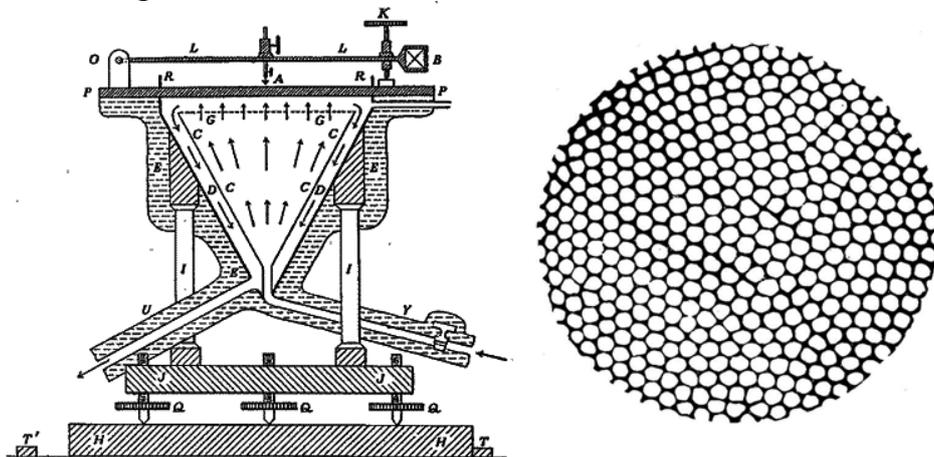


Рис. 1: Установка, созданная А. Бенаром для наблюдения термоконвективных потоков, и конвективные ячейки в спермацете (одна из первых фотографий, сделанных Бенаром)

Правильные шестиугольные ячейки, заполняющие всю поверхность подогреваемого слоя жидкости, поражают воображение любого исследователя, задумывающегося над тем, как из случайных начальных возмущений формируется регулярная структура в протяженной системе. Конвективные ячейки обнаружены на Солнце, в мантии Земли, в атмосфере и океане.

Одной из первых теоретических работ по изучению пространственной периодичности, возникающей при конвекции в слое, подогреваемом снизу была статья Рэля, опубликованная в 1916 году. Он объяснил появление ячеек неустойчивостью, причина которой - действие архимедовой силы на нагретую, и значит более легкую жидкость, находящуюся снизу у подогреваемой поверхности (термогравитационная конвекция). Рэлей рассчитал пространственный период наиболее

неустойчивых возмущений, который оказался близок к периоду структуры, наблюдавшейся в экспериментах Бенара. Как выяснилось впоследствии [2], это совпадение оказалось в определенной мере случайным, а за неустойчивость в опытах Бенара были ответственна не архимедова сила, а сила поверхностного натяжения (капиллярная конвекция).



Рис. 2: Анри Бенар в своей лаборатории, 1930-е годы

Для конвективных структур, наблюдающихся в природе и возникающих в различных технологических процессах, соотношение между термокапиллярными и термогравитационными силами может изменяться в очень широких пределах. Например, в случае конвекции в океане, когда характерный масштаб движения составляет метры или десятки метров, капиллярными эффектами можно пренебречь. В некоторых случаях можно заведомо пренебречь влиянием силы тяжести. Так, в последнее время выращивание кристаллов из расплава предполагалось проводить в условиях невесомости на космических аппаратах, находящихся на околоземной орбите. В этих условиях сила тяжести отсутствует и конвекция определяется исключительно поверхностным натяжением.

Какая же структура может реализоваться при тех или иных условиях? Отметим, что даже корректный расчет наиболее неустойчивого масштаба возмущений  $k_0$  не гарантирует еще возможности правильного предсказания структуры конвективных ячеек в протяженном горизонтальном слое. Под пространственно протяженным слоем понимается такая система, характерные горизонтальные размеры которой значительно больше, чем длина волны неустойчивых возмущений. Очевидно, что в кюветах, размеры которых сравнимы с длиной волны неустойчивых возмущений, конвективные движения могут быть

представлены как суперпозиция резонаторных мод. В пространственно протяженных системах, если спектр волновых чисел достаточно плотный, может, в принципе, как результат нелинейного взаимодействия возникнуть любая суперпозиция мод с волновыми векторами  $\bar{k}, |\bar{k}| = k_0$ . Из таких мод с одинаковыми по модулю волновыми векторами  $\bar{k}$  можно получить роликовую конвекцию (одна мода), квадратные ячейки (две моды с взаимно перпендикулярными волновыми векторами), шестигранные конвективные ячейки (три моды с волновыми векторами, развернутыми под углом  $120^\circ$ ).

В предлагаемой лабораторной работе динамика конвективных структур изучается на основе ряда качественных экспериментов. Варьируя параметры, можно исследовать как термогравитационную конвекцию, когда определяющей является сила тяжести (по современной терминологии это конвекция Рэля - Бенара), так и термокапиллярную конвекцию, которую называют конвекцией Бенара - Марангони. В ходе работы предусмотрена возможность введения контролируемых начальных возмущений. Это позволяет изучать, например, устойчивость конвективных структур с наперед заданными свойствами симметрии.

## 2. Физические механизмы возникновения конвекции

Рассмотрим горизонтальный слой жидкости толщиной  $d$ , температуры верхней и нижней границ которого поддерживаются постоянными и равны  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно. В стационарном случае сила тяжести  $\rho\vec{g}$  уравнивается избытком давления, и конвекция отсутствует. В системе реализуется режим теплопроводности, и температура зависит линейно от вертикальной координаты  $z$ :

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)z/d. \quad (1)$$

При некоторой величине  $\Delta T = T_2 - T_1$  такое состояние станет неустойчивым. При выполнении определенного условия - условия возбуждения - в жидкости появляются и нарастают флуктуационные течения, которые приводят к перемешиванию жидкости и установлению в ней стационарного движения, т.е. реализации режима конвекции.

Рассмотрим элемент жидкости (см. рис. 3), находящийся у дна. Если в результате случайной флуктуации он сместится вверх, то вокруг него будет менее теплая и, следовательно, более плотная жидкость. Появится пропорциональная разности плотностей выталкивающая сила, которая обуславливает движение элемента жидкости к верхней границе слоя. Аналогично, элемент жидкости вблизи верхней границы, случайно смещенный вниз, окажется окруженным более теплым слоем жидкости и начнет тонуть.

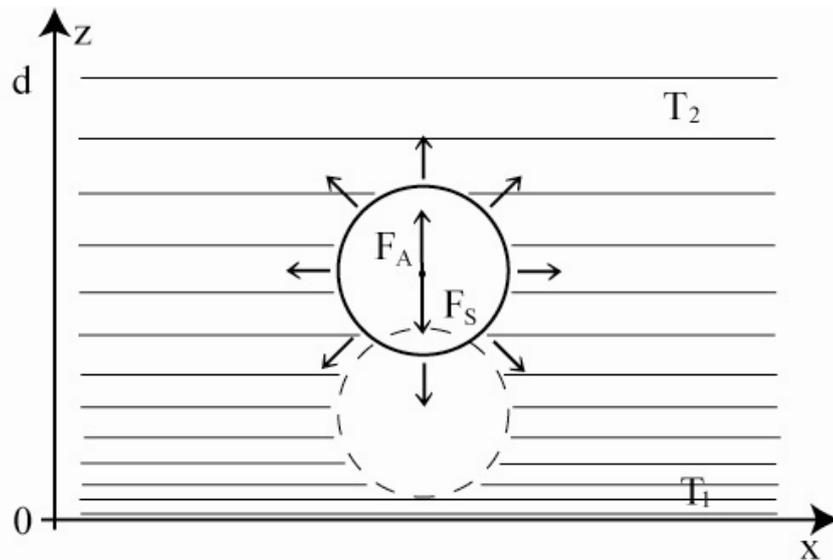


Рис. 3: К объяснению термогравитационной конвекции

Очевидно, что чем больше вязкость, тем медленнее движется элемент жидкости, а чем больше теплопроводность, тем быстрее он остывает. Понятно поэтому, что конвекция возникает, когда эффекты плавучести доминируют над вязким трением и теплопроводностью. Оценим влияние всех этих факторов. Представим, что элемент жидкости имеет характерный размер  $L$ , тогда силу Архимеда действующую на этот элемент жидкости можно оценить как:

$$F_A \sim \beta T' \rho L^3 g,$$

где  $g$  - ускорение свободного падения,  $\beta = (dV/dT)/V$  - температурный коэффициент объемного расширения,  $T'$  - разность температур элемента и окружающей жидкости. Так как  $\beta > 0$ , то неустойчивость (возникновение конвективного движения), возможна только если более холодные слои находятся выше более горячих, т.е., если нагрев происходит снизу. Если бы нагрев производился сверху, то сила плавучести, наоборот, возвращала бы более нагретый элемент, случайно опустившийся вниз, обратно в верхние, более теплые области, то есть, равновесие было бы устойчивым. (Исключение составляет так называемая термоэлектрическая конвекция [6], но в рамках данной работы она не рассматривается).

Из условия равенства силы Архимеда силе Стокса  $F_s$  (силе вязкого трения, действующей на элемент со стороны окружающей жидкости) можно найти скорость всплытия  $V$ :

$$F_s \sim \rho \nu L V, V \sim \beta T' \rho L^2 g, \quad (2)$$

где  $\nu = \eta/\rho$  -- кинематическая вязкость жидкости. ( $\eta$  -- динамическая вязкость,  $\rho$  - плотность жидкости).

Имея скорость всплытия, можно оценить время всплытия  $\tau$ :

$$\tau \sim d/V \sim \nu d / (\beta T' \rho L^2 g)$$

Очевидно, что для возникновения конвекции необходимо, чтобы время всплытия  $\tau$  было меньше или много меньше времени выравнивания температуры  $\tau_T$  между выделенным элементом и всей жидкостью. Время  $\tau_T$  может быть оценено из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -k \Delta T' \quad (3)$$

следующим образом:  $\tau_T : L^2/k$ , где  $k$  - это температуропроводность среды.

Отсюда условие  $\tau_T \gg \tau$  может быть записано как  $\nu d / (\beta T' \rho L^2 g) = L^2/k$  или:

$$\frac{\beta T' \rho L^4 g}{\nu k d} \gg 1. \quad (4)$$

Это - *необходимое* условие возникновения свободной конвекции под действием силы Архимеда, т.е., термогравитационной конвекции (условие Буссинеска).

Для удобства примем, что пульсации температуры  $T' : T_1 - T_2$ , а характерный размер возмущений  $L$  порядка толщины слоя жидкости  $d$ . Тогда из условия (4) можно получить безразмерный параметр, называемым числом Рэлея  $Ra$ , который характеризует термогравитационную конвекцию:

$$Ra = \frac{g \beta (T_1 - T_2) d^3}{\nu k}. \quad (5)$$

Это число показывает отношение подъемной силы (создающей неустойчивость) к силам диссипации. Чем выше разность температур, изменение плотности с температурой и чем меньше вязкость и температуропроводность, тем интенсивнее конвекция.

Теория Рэлея объяснила основную массу экспериментальных фактов, известных к концу 1930-х годов. Однако, она продемонстрировала некоторое количественное расхождение с результатами опытов Бенара. В частности, разность температур  $T_2 - T_1$ , которая требовалась для возникновения конвекции, отличалась почти в 100 раз. Итальянский физик Карло Марангони, наблюдая за окрашиванием горячих поверхностей, обратил внимание, что на вертикальной свободной поверхности жидкости, так же, как и на горизонтальной, возникают упорядоченные потоки движения, подобные ячейкам Бенара. На вертикальной поверхности

действовала уже не сила Архимеда, а сила поверхностного натяжения жидкости. Точно так же, в экспериментах Бенара использовался, что было особенно важно, тонкий слой жидкости, и основную роль в конвекции в этом случае играли капиллярные силы. Такие структуры стали называть ячейками Бенара - Марангони.

Для рассмотрения термокапиллярной конвекции можно использовать рассуждения, аналогичные приведенным выше для гравитационной конвекции. Для большинства жидкостей коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  уменьшается с ростом температуры:

$$\sigma = \sigma_0(T_0) - \alpha(T - T_0). \quad (6)$$

Если на поверхности слоя жидкости в результате флуктуации возникает пятно с большей температурой и, следовательно, с меньшим поверхностным натяжением, то оно из-за действия капиллярных сил будет растекаться. Из-за действия вязкости в силу неразрывности жидкости растекающееся пятно на поверхности приведет в движение находящийся ниже слой жидкости и будет приводить к подъему следующих элементов нагретой жидкости из глубины (см. рис. 4). Подчеркнем, что такой подъем возможен, если только есть взаимодействие между слоями жидкости. Поэтому для возникновения термокапиллярной конвекции наличие отличной от нуля вязкости жидкости принципиально.

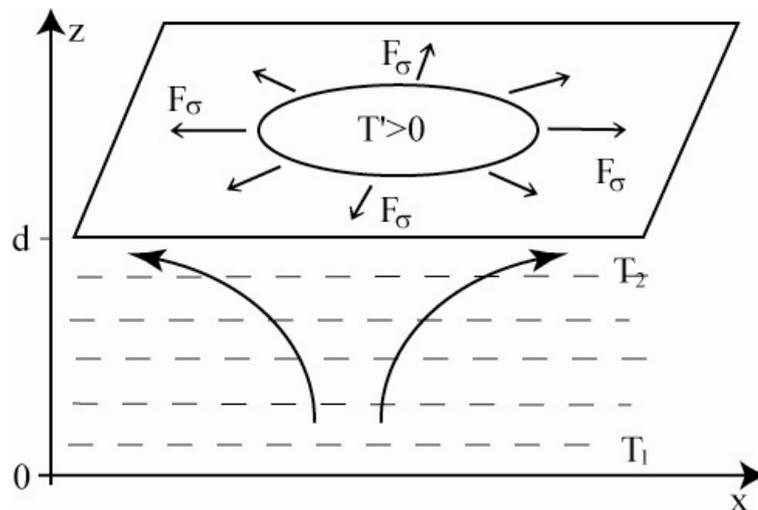


Рис. 4: К объяснению термокапиллярной конвекции

Если более теплая жидкость, находящаяся у дна поднимается быстрее, чем успеет остыть из-за конечной теплопроводности, то флуктуации не затухнут и возникнет конвекция. Оценить время подъема элемента жидкости можно точно так же, как и в случае термогравитационной конвекции. Вместо силы Архимеда в условии

неустойчивости будет фигурировать сила, обусловленная зависимостью поверхностного натяжения от температуры:

$$F_{\sigma} \sim \alpha T' L. \quad (7)$$

Термокапиллярная конвекция характеризуется безразмерным числом, которое носит название число Марангони и может быть записано в виде:

$$Ma = \frac{\alpha(T_1 - T_2)d}{\rho k \nu}. \quad (8)$$

Физический смысл числа  $Ma$  такой же, как и числа Рэлея. Оно показывает, во сколько раз сила, создающая неустойчивость (т.е., сила поверхностного натяжения) превышает диссипативную силу.

Оценим теперь, когда в конвекции доминируют эффекты, связанные с зависимостью поверхностного натяжения от температуры, а когда - от силы плавучести. Для этого подсчитаем отношение  $Ma/Ra$ :

$$\frac{Ma}{Ra} = \frac{\alpha}{\rho \beta g d^2}. \quad (9)$$

Очевидно, что если  $g \rightarrow 0$  (это соответствует экспериментам, которые проводятся на космическом корабле в условиях невесомости), или  $d \rightarrow 0$  (это соответствует экспериментам с очень тонкими слоями жидкости), то капиллярные эффекты преобладают. Важно отметить, что условие (6) не включает ни вязкость, ни теплопроводность жидкости и, изменяя лишь глубину слоя, можно перейти от одного типа конвекции к другому.

### 3. Уравнения модели. Достаточное условие неустойчивости

Важным в задаче о конвекции в плоском слое жидкости является тот факт, что для записи её в приближении Буссинеска с двумя свободными недеформируемыми границами слоя возможно получить точное аналитическое решение уравнений гидродинамики. Уравнения Навье-Стокса, переноса тепла, и непрерывности имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} p' + \nu \Delta \bar{V} + g \beta T' \bar{\gamma}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{V} \nabla T' = k \Delta T', \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0. \quad (12)$$

Здесь  $\bar{V}$  - поле скоростей в жидкости,  $T'$  - пульсации на фоне линейного профиля температуры, описываемого формулой (1), а  $p'$  - отклонение давления от гидростатического  $p_0$ ,  $\nabla p_0 = \rho_0 \bar{y} g$  ( $\bar{y}$  - единичный вектор, направленный вертикально вверх).

Приближение Буссинеска означает здесь, что поле скорости, отвечающее уравнению (10) и поле температуры, описываемое уравнением (11), связаны лишь из-за того, что принимается во внимание зависимость плотности от температуры, приводящие к возникновению силы Архимеда. Именно поэтому возникают силы плавучести, которые описываются последним членом в правой части уравнения (10). Известно, что вязкость  $\nu$  и температуропроводность  $k$  зависят от температуры  $T$ , к тому же плотность жидкости зависит не только от температуры, но и от давления, однако всеми этими зависимостями при написании системы уравнений, описывающей движение в слое, подогреваемом снизу, в приближении, которое называется приближением Буссинеска, пренебрегают.

Сформулируем теперь граничные условия. Нижняя граница слоя предполагается твердой, поэтому при  $z = 0$  для скорости вязкой жидкости имеем:

$$\bar{V}(x, y, 0) = 0. \quad (13)$$

Если нижняя граница контактирует с нагревателем, имеющим постоянную мощность, то приближенно можно считать, что тепловой поток постоянный и условие для температуры на нижней границе имеет вид:

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

На верхней, свободной границе, необходимо принять во внимание силы, связанные с поверхностным натяжением. Если коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  неоднороден, то возникает поверхностная сила  $\bar{f} = \nabla \sigma$ . Граничное условие на свободной поверхности с учетом этих сил записывается следующим образом:

$$\nu \rho_0 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) n_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (15)$$

Здесь  $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$  - тензор вязких напряжений, а  $\bar{n}$  - единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к свободной границе. Будем считать, что свободная граница не деформируемая. Тогда вертикальная компонента скорости на этой поверхности равна нулю:

$$V_z = 0. \quad (16)$$

С учетом этого условия (15) сводятся к виду:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \nu\rho_0 \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \quad (17)$$

Дифференцируя первое условие по  $x$ , а второе по  $y$  и пользуясь уравнением непрерывности, получим:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right). \quad (18)$$

Если считать, что  $\sigma$  - линейно зависит от температуры, то на свободной границе пульсации температуры вертикальной скорости будут связаны следующим образом:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (19)$$

Еще одно условие для поля температуры вытекает из закона теплопередачи на свободной поверхности. Предполагается, что плотность теплового потока со свободной поверхности пропорциональна возмущениям температуры:

$$k \frac{\partial T'}{\partial z} = a_s T'. \quad (20)$$

Коэффициент теплоотдачи  $a_s$ , для свободной поверхности, контактирующей с воздухом (в воздухе тоже, вообще говоря, есть конвекция), не определен, поэтому обычно, задача об устойчивости решается для набора параметров  $b = a_s d / k$ . Случай  $b = 0$  соответствует постоянству теплового потока,  $b \rightarrow \infty$  - постоянной температуре верхней границы. Отметим, что если граница  $z = d$  изотермическая, то термокапиллярная неустойчивость отсутствует.

Таким образом, задача о термоконвекции в слое жидкости описывается уравнениями (10) – (12) с граничными условиями (13), (14), (19), (20).

Теперь для нахождения достаточных условий возникновения неустойчивостей (нарастания малых возмущений) уравнения (10) - (12) линеаризуются в безразмерных переменных и исследуется неустойчивость этой задачи по отношению к возмущениям типа:

$$\{V_z, T'\} \sim \{v(z), \theta(z)\} e^{\gamma + k_z z + k_x x + k_y y}. \quad (21)$$

В связи с тем, что все направления плоскости  $(x, y)$  равноправны, можно положить  $k_y = 0$ , и тогда для определения инкрементов нарастания возмущений (собственных чисел  $\gamma$ ) и вертикальной структуры полей скорости и температуры (собственных функций  $v$  и  $\theta$ ) получаем следующие уравнения:

$$-\gamma(v'' - k_x^2 v) = (v'''' - 2k_x^2 v'' + k_x^4 v) - Ra k_x^2 \theta, \quad (22)$$

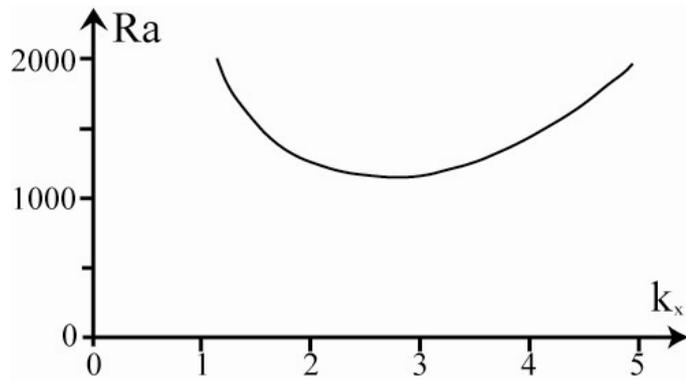
$$-\gamma P \theta = (\theta'' - k_x^2 \theta) \quad (23)$$

с граничными условиями:

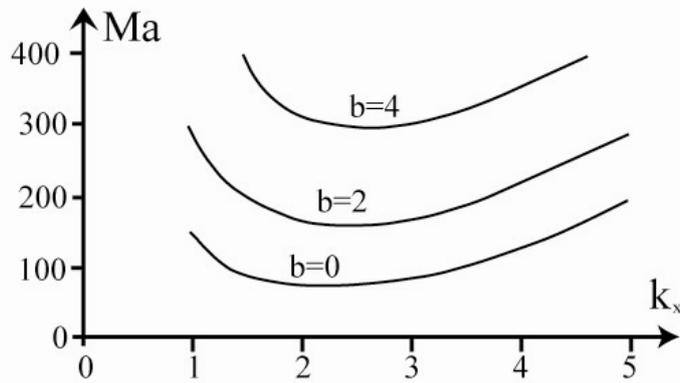
$$z = 0: v = 0, v' = 0, \theta = 0$$

$$z = 1: v = 0, v'' = -Ma\theta, \theta' = 0$$

Решение этой краевой задачи на отыскание собственных значений и собственных функции проводилось во многих работах. На рисунке 5 приводятся нейтральные кривые - линии на плоскостях  $(Ra, k_x)$  при  $Ma = 0, b \rightarrow \infty$  (см. рис. 5а) и на плоскости  $(Ma, k_x)$  при  $Ra = 0$  (см. рис. 5б), отделяющие области существования устойчивых ( $\gamma < 0$ ) и неустойчивых ( $\gamma > 0$ ) режимов. На рис. 6 качественно представлены функции тока для возмущений в слое жидкости. Как в случае преобладания капиллярных сил, так и сил плавучести, они качественно одинаковы. Очевидно, что в том месте, где жидкость всплывает, на поверхности будут более теплые области, чем там, где она тонет.



a)



b)

Рис. 5: Области устойчивых и неустойчивых режимов для значений числа Рэлея (a) и числа Марангони (b)

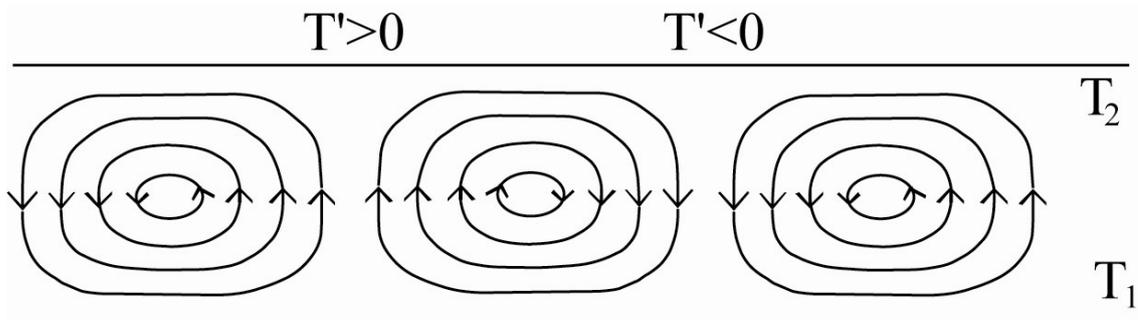


Рис. 6: Потoki возмущений (линии тока) в слое жидкости

Как видно на рис. 5a, с увеличением числа  $Ra$  при  $Ma = 0$  сначала становятся неустойчивыми возмущения с волновыми числами  $k_x = 2.7$ , а при  $Ra = 0$  и увеличении числа  $\beta a$  - возмущения с  $k_x = 2$ .

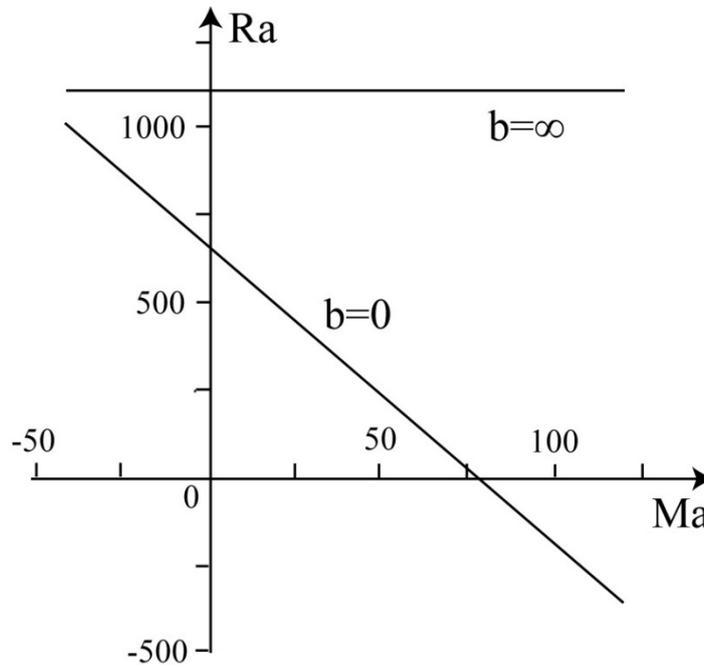


Рис. 7: Граница устойчивости возмущений в координатах  $(Ra, Ma)$

На рис. 7 представлена граница устойчивости в координатах  $(Ra, Ma)$ . Область неустойчивости расположена над кривой, которую приближенно можно записать следующим образом:

$$\frac{Ra}{Ra_{кр}} + \frac{Ma}{Ma_{кр}} = 1.$$

а точки пересечения координат  $Ra = Ra_{кр} = 669$  и  $Ma = Ma_{кр} = 79$ . Критическое значение  $k_x$  вдоль кривой практически не меняется и остается равным  $k_x \sim 2$ . Первый квадрант плоскости  $(Ra > 0, Ma > 0)$  соответствует "нормальной жидкости" ( $a > 0, b > 0$ ), подогреваемой снизу. Как и следовало ожидать, в этом случае термокапиллярный эффект приводит к уменьшению разности температур, при которой возникает неустойчивость.

#### 4. Виды конвективных структур

В этом разделе обсуждается вопрос о том, какая структура реализуется в системе, когда неустойчивостью обладают моды с различными  $\bar{k}$ . Очевидно, что задача достаточно просто решается, если конвекция реализуется в кювете, размеры которой сравнимы с длиной волны неустойчивых возмущений. В этом случае граничные условия на боковых стенках определяют спектр мод, которые могут возбуждаться. Если размеры кюветы значительно больше длины волны неустойчивых возмущений, то ситуация здесь сложнее: в силу азимутальной симметрии, неустойчивостью обладают моды с волновыми векторами  $\bar{k}$ , имеющими

произвольную ориентацию в плоскости  $(x, y)$ . Какая же конвективная структура возникает, если в начальный момент существуют случайные возмущения?

Для ответа на этот вопрос необходимо учитывать нелинейное взаимодействие мод с различной ориентацией  $\vec{k}$ , а также наличие в системе дополнительных шумов (которые всегда в той или иной форме присутствуют в эксперименте).

На рис. 8 приведены линии уровня для полей скорости и температуры, которые и определяют, какая структура будет наблюдаться в эксперименте. Вид линий уровня 8a соответствует конвективным потокам в виде длинных роликов, 8b - четырехугольным ячейкам, а 8c - шестиугольным.  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}_3|$ . Последний вариант реализуется в эксперименте наиболее часто, так как структура трех волновых векторов, направленных под углами  $120^\circ$ , является наиболее устойчивой.

Точный теоретический анализ устойчивости тех или иных структур может быть проведен с помощью метода медленно меняющихся амплитуд для полей  $V_z, T'$  путем поиска собственных векторов  $\vec{k}$ , которые будут минимизировать решение. В отсутствие шумов реализуется та структура, которая даст наиболее глубокий минимум (наиболее устойчивое решение). В случае с шумами решение может иметь локальные минимумы в пространстве для различных структур, и будет наблюдаться переход от одной структуры к другой.

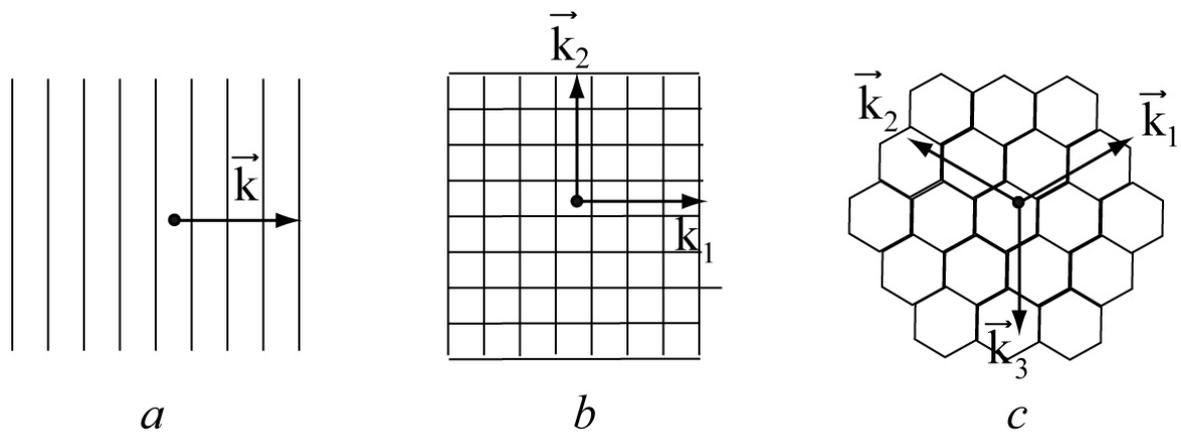


Рис. 8: Линии уровня полей в системе без шумов

На рис. 9 показаны линии уровня для полей в случае появления некоторых нарушений. В результате несовершенство структуры может проявляться, например, в том, что слегка искривлены оси роликов и четырехугольников (см. рис. 9a, b) или у шестиугольников стороны несколько разной длины (рис. 9c). Однако топологически структуры на рисунках 8a, b, c и на рисунках 9a, b, c эквивалентны - переход между ними может быть осуществлен лишь неравномерным сжатием или растяжением линий уровня.

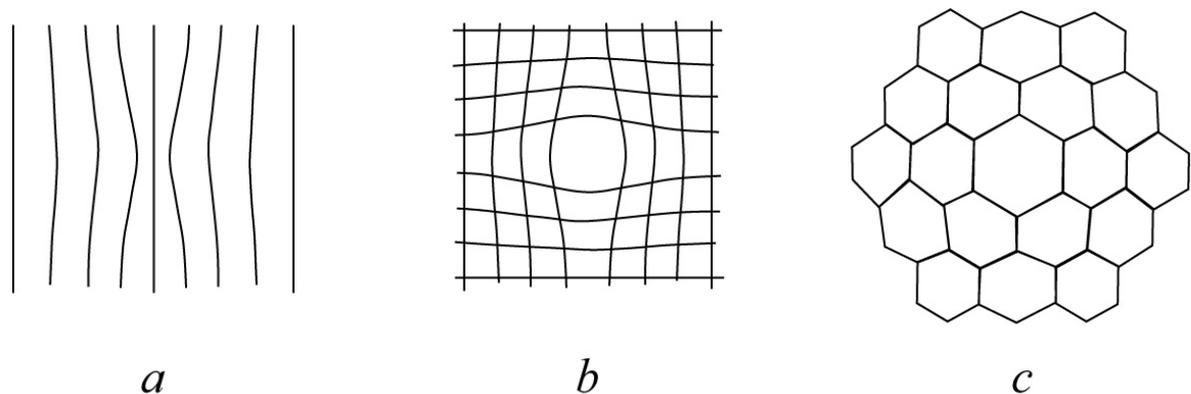


Рис. 9: Дефекты искажения ячеек без изменения вида структуры

Различные виды близких, но уже топологически не эквивалентных структур показаны на рис. 10. Хотя линии уровня на рис. 8 и рис. 10 достаточно похожи почти всюду, переходы между соответствующими структурами не могут быть получены лишь растяжением или сжатием координат. Так, структура на рис. 10а это ролики с одним точечным дефектом, расположенным в начале координат. Структура, изображенная на рис. 10с, соответствует двум точечным топологическим дефектам, принадлежащим двум модам с волновыми числами  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$ . В литературе такое нарушение порядка в правильной шестигранной решетке называется пенто-гепто дефектом. В физических экспериментах дефекты есть практически всегда (совершенная структура, по-видимому, может существовать лишь в исключительных случаях). Количество дефектов, вообще говоря, зависит от многих причин: начальных условий, интенсивности шумов, коэффициентов нелинейного взаимодействия мод и т.д. Дефекты можно классифицировать по топологическим свойствам. Это могут быть пенто-гепто дефекты, дефект типа розетки (рис. 10d), коридора (рис. 10e) и т.д. Как выяснено в численных и физических экспериментах, дефекты могут взаимодействовать - аннигилировать, если у них противоположные топологические заряды, или образовывать устойчиво существующую пару, как это происходит при формировании пенто-гепто дефекта.

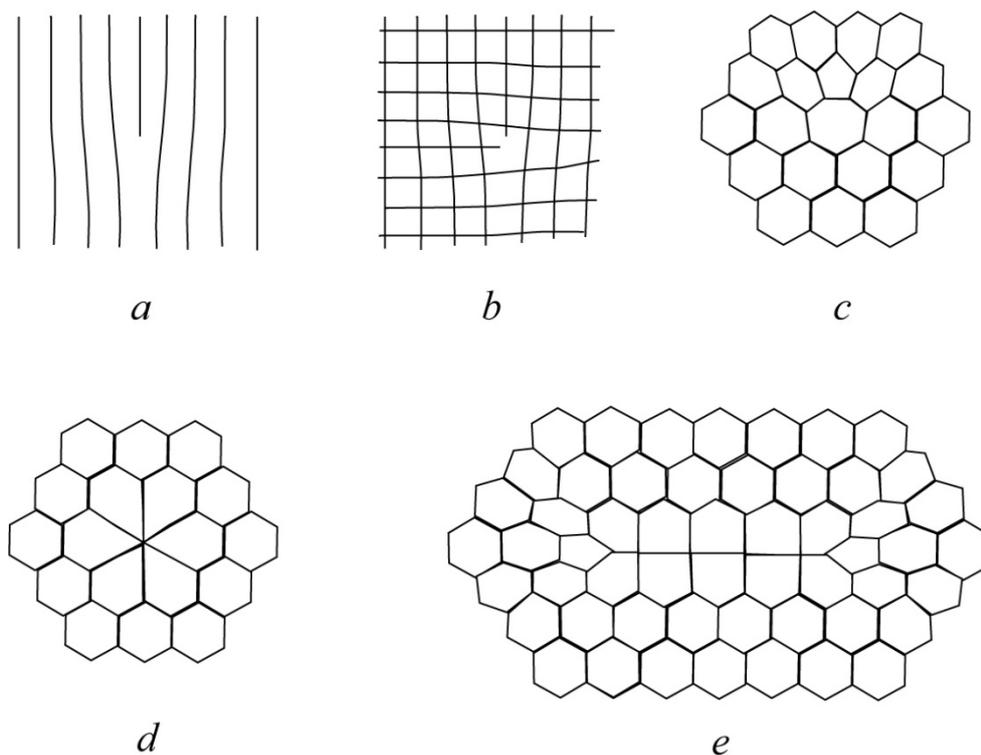


Рис. 10: Дефекты с различными топологическими свойствами

С ростом надкритичности количество дефектов в конвективных структурах увеличивается и пространственный беспорядок в ряде случаев можно представлять как хаотическую динамику дефектов.

Как же можно наблюдать конвективные структуры и динамику отдельных дефектов в физическом эксперименте? Очевидно, что получить информацию о полях скорости и температуры, возникающих в слое жидкости при конвекции, с помощью датчиков достаточно сложно, однако, благодаря тому, что можно визуализировать течение, характеристики структур исследуются достаточно подробно.

## 5. Эксперимент

Схема эксперимента представлена на рис. 11. Конвекция реализуется в круглой кювете 1, дно которой подогревается электроплиткой 2. Кювета заполняется силиконовым маслом. Свойства масел, которые могут быть использованы в этой работе, приведены в приложении 1. Питание электроплитки может осуществляться как переменным напряжением 220 V (режим быстрого нагрева), так и через понижающий трансформатор, дающий напряжение 36 V. При нагреве дна кюветы в слое жидкости возникает вертикальный градиент температуры, который можно оценить с помощью дифференциальной термопары 3 медь - константан. Напряжение, возникающее из-за разности температур двух спаев 4 и 5 измеряется с помощью вольтметра постоянного тока 6. В условиях, при которых

проводится эксперимент, можно считать, что термо Э.Д.С. пропорциональна разности температур горячего и холодного спаев, а один градус соответствует приблизительно 40 mV. При критической разности температур верхней и нижней границ в слое возникает конвективная неустойчивость. Для визуализации конвективных структур в эксперименте применяется алюминиевая пудра.

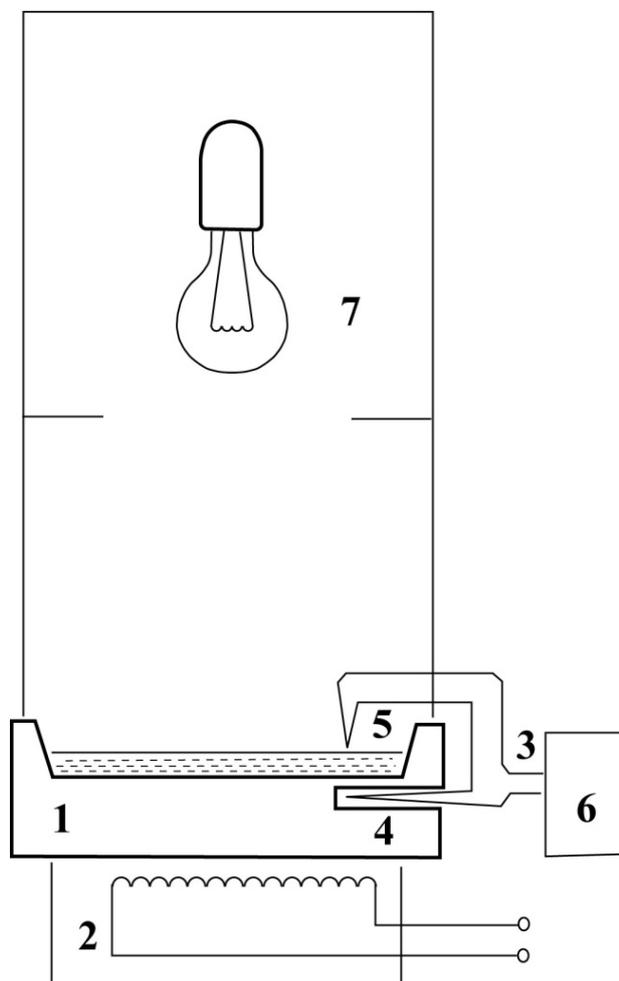


Рис. 11: Схема экспериментальной установки

В эксперименте предусмотрена возможность наблюдения конвекции при введении контролируемых пространственно периодических начальных возмущений. Для этого используется лампа накаливания 7 (см. рис. 11) и набор экранов с отверстиями. Экран помещается на небольшом расстоянии от поверхности силиконового масла. На небольшое время (1-1.5 мин) включается лампа накаливания. Через отверстия в экране происходит нагрев поверхности и создаются пространственно-периодические возмущения температуры и скорости. После того, как лампа выключена, а экран убран, из этих возмущений развивается конвективная неустойчивость.

## Экспериментальное задание

1. Пронаблюдайте возникновение конвекции при нагреве жидкости в кювете. Наиболее рационально проводить эксперимент со слоем жидкости 2-4 мм. С помощью кисточки аккуратно перемешайте алюминиевую пудру в масле для получения максимально однородной среды. Включите нагреватель и с помощью термопары фиксируйте разность температур между поверхностью силиконового масла и дном кюветы, при которой режим теплопроводности сменяется конвекцией.

2. Используя набор колец, наблюдайте зависимость структуры конвекции от соотношения между размером подогреваемой области и длиной волны неустойчивых возмущений. Зарисуйте структуры мод. По движению частиц пудры реконструируйте поле скорости в конвективных ячейках.

3. В конвективной структуре, возникающей из случайных возмущений, выделите различные топологические дефекты и проведите наблюдение за эволюцией одного из них.

4. Сравните эволюцию конвективных структур, возникающих из случайных возмущений и из регулярных пространственно-периодических начальных возмущений, продуцируемых внешним световым излучением. Для этого нужно использовать экраны с отверстиями, расположенными периодически в пространстве, и лампу накаливания.

Для эффективного влияния искусственно вводимых возмущений на систему их период должен быть близок к периоду собственных структур (пространственный резонанс). Добиться этого можно, изменяя глубину слоя жидкости. Также в данном задании следует уменьшить температуру нагревателя (плитки), для того, чтобы теплового излучения лампы накаливания было достаточно для введения возмущений.

Проделайте эксперимент для двух видов экранов и сравните время жизни структур в виде правильных четырехугольников и гексагонов.

5. Для условий вашего эксперимента рассчитайте капиллярную длину  $L_k$ . Под капиллярной длиной понимают характерную глубину слоя жидкости, при которой число Рэлея равно числу Марангони.

6. Рассчитайте значения чисел Рэлея и Марангони для условий вашего эксперимента (формулы (5) и (8)). Найдите их соотношение. Какой тип конвекции реализовался в проведенных вами опытах - термогравитационный или термокапиллярный?

## Контрольные вопросы

1. Какие основные силы обуславливают появление конвекции?
2. Каково необходимое условие неустойчивости для конвекции Рэлея?

3. Каково необходимое условие неустойчивости для конвекции Марангони?
4. Что такое приближение Буссинеска?
5. Как получить достаточное условие возникновения конвекции?
6. В какие случаях возможно учитывать только один тип конвекции?
7. Чем определяется размер конвективных ячеек? Чем определяется форма структур?
8. Как объясняется появление дефектов в структуре конвективных потоков? Какие бывают виды дефектов?

## Приложение

В данной лабораторной работе эксперименты проводятся с силиконовыми маслами (олигодиметилсилоксанами) ПМС-5, ПМС-100 и ПМС-200. Здесь приведены специально измеренные в лаборатории термохимии Нижегородского университета все необходимые характеристики веществ, с которыми проводятся эксперименты.

Зависимость плотности  $\rho_0$  [г/см<sup>3</sup>] олигодиметилсилоксанов от температуры.

Т, К	ПМС-5	ПМС-100	ПМС-200
288	0.917	0.972	0.974
293	0.913	0.968	0.970
298	0.908	0.963	0.966
303	0.903	0.958	0.961
308	0.899	0.954	0.957
313	0.895	0.950	0.953
318	0.889	0.946	0.948
328	0.881	0.938	0.941

Зависимость динамической вязкости  $\eta$  [г/(см × сек)]–10<sup>2</sup> олигодиметилсилоксанов от температуры.

Т, К	ПМС-5	ПМС-100	ПМС-200
288	4.95	111	217.7
293	4.63	98.5	195.4
298	4.16	88.6	175.8
303	3.78	80.0	159.6
308	3.49	73.1	144.4
313	3.26	66.2	131.9
318	3.04	60.2	120.1
328	2.65	50.8	101.1

Зависимость поверхностного натяжения  $\sigma$  [дин/см]  
олигодиметилсилоксанов от температуры.

T, K	ПМС-5	ПМС-100	ПМС-200
288	18.0	20.5	20.7
293	17.5	20.1	20.3
298	17.2	19.7	19.9
303	16.4	19.3	19.5
308	16.2	18.9	19.1
313	15.9	18.5	18.7
318	15.4	18.1	18.4
328	14.7	17.5	17.7

Зависимость температуропроводности  $k$  [см<sup>2</sup>/сек]  
олигодиметилсилоксанов от температуры.

T, K	ПМС-5	ПМС-100	ПМС-200
288	0.001101	0.001106	0.001131
293	0.001094	0.001102	0.001125
298	0.001088	0.001098	0.001120
303	0.001082	0.001094	0.001115
308	0.001076	0.001090	0.001108
313	0.001069	0.001085	0.001102
318	0.001063	0.001079	0.001096
328	0.001051	0.001068	0.001083

### Список литературы

- [1] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392с.
- [3] Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004, глава 5 «Диссипативные структуры в гидродинамических системах.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том.5 Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [5] Сазонтов А.Г. К проблеме отбора конвективных структур в жидкости с зависимостью вязкости от температуры.// Изв. АН СССР, сер. ФАО, 1980, т.166, № 5. с. 463-472.
- [6] Эйдельман Е.Д. Возбуждение электрической неустойчивости нагреванием. // Успехи физ. наук. 1995. Т. 165, № 11. С. 1279-1295

## ПРОСТРАНСТВЕННО–ВРЕМЕННЫЕ СТРУКТУРЫ РЯБИ ФАРАДЕЯ

Данная глава пособия представляет собой описание к лабораторной работе «Пространственно–временные структуры ряби Фарадея», входящей в состав практикума «Волны, структуры, самоорганизация» Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. Цель данной лабораторной работы состоит в теоретическом и экспериментальном изучении явления самоорганизации, заключающемся в формировании структур на поверхности слоя жидкости, колеблющегося в вертикальном направлении – параметрическом возбуждении капиллярных волн.

В описании содержатся: (1) краткий обзор научных работ (как экспериментальных, так и теоретических), посвященных изучению параметрически возбуждаемой капиллярной ряби на поверхности жидкости, (2) основные уравнения, описывающие динамику жидкости, (3) методика проведения эксперимента, (4) задания для численного расчета; (5) экспериментальное задание, (6) контрольные вопросы.

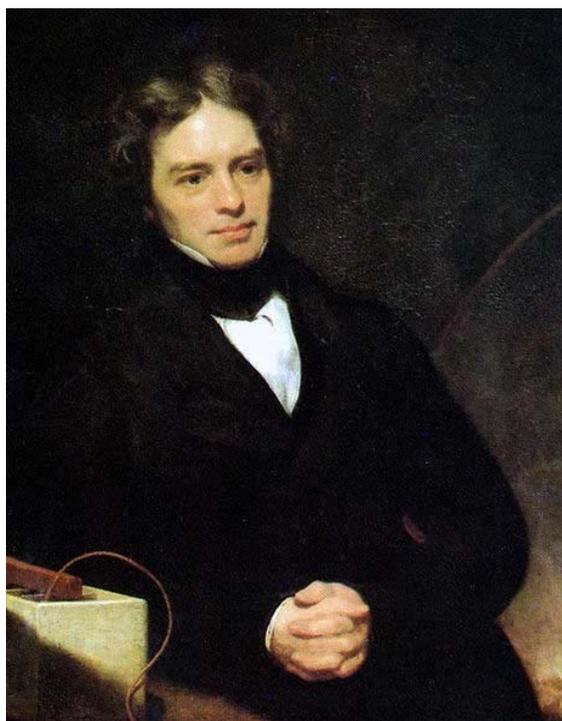


Рис. 4: Майкл Фарадей. Художник Томас Филипс. 1842 год

## Введение

Работы Майкла Фарадея по параметрическому возбуждению капиллярной ряби, возникающей на поверхности жидкого слоя, колеблющегося в вертикальном направлении, видимо являются одними из первых экспериментов по наблюдению самоорганизации в динамических системах [1]. Действительно, как писал Фарадей: «Если поместить ртуть на вибрирующую оловянную тарелку, то получается очень красивая картина в отраженных солнечных лучах» [2]. Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным белком). В своих экспериментах он использовал кюветы различной формы (круглой, квадратной, прямоугольной) и выяснил, что практически всегда рябь образует квадратную решетку, которая слегка деформируется у границы кюветы. Фарадей исследовал и процесс возникновения структуры. Он показал, что пространственная структура капиллярной ряби не зависит ни от граничных и начальных условий, ни от сорта жидкости.

Простота и наглядность данной физической системы, демонстрирующей достаточно сложные явления образования структур, пространственно-временного хаоса, сделали ее одной из базовых моделей области научных исследований о самоорганизации, целью которых является выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения пространственных структур, наблюдающихся в системах различной природы – физических, химических, биологических и т.д. Как следствие, параметрическое возбуждение структуры на поверхности тонкого слоя жидкости в настоящее время является одним из наиболее изученных, как экспериментально, так и теоретически, эффектов самоорганизации в системах физической природы. Это, в первую очередь, связано с простотой реализации в эксперименте ряби Фарадея и отсутствием необходимости в каких-либо дополнительных устройствах для визуализации структур, возникающих при возбуждении ряби.

Когда слой жидкости со свободной верхней границей совершает вертикальные колебания, на его поверхности наблюдается возбуждение поверхностных капиллярных волн, так называемой ряби Фарадея, динамика которых зависит от управляющих параметров этой системы (вязкости, поверхностного натяжения и плотности жидкости) и параметров внешнего воздействия. Последнее сводится к введению осциллирующей добавки к ускорению свободного падения

$$g = g_0(1 + \beta \cos \Omega t), \quad (1)$$

где  $g_0 = 9.8 \text{ м/сек}^2$ ,  $\Omega$  – частота внешнего воздействия и  $\beta$  – нормированная амплитуда внешнего воздействия.

В настоящей лабораторной работе предстоит изучить свойства параметрически возбуждаемой капиллярной ряби: кювета с жидкостью прикреплена к мембране низкочастотного динамика, на который подается переменное напряжение с генератора низкой частоты. В зависимости от управляющих параметров системы (амплитуды и частоты внешнего воздействия, свойств жидкости) на поверхности жидкости могут образовываться как регулярные структуры квадратной формы, так и беспорядочно меняющиеся во времени и пространстве волны. Необходимо провести ряд измерений и сопоставить их результаты с теоретическими данными.

## 1 Теоретическая часть, необходимая для выполнения работы

### 1.1 Уравнения движения жидкости

#### 1.1.1 Закон сохранения вещества в жидкости

Рассмотрим некоторый объем  $V_0$  в пространстве, заполненном жидкостью с плотностью  $\rho$ . Масса жидкости, заключенной в этом объеме, будет

$$m = \int_{V_0} \rho dV.$$

Через малый элемент  $d\vec{S}$  поверхности  $S$  за интервал времени  $dt$  протекает жидкость массы  $\rho \vec{v} d\vec{S} dt$ , где  $\vec{v}$  – скорость движения жидкости, а вектор  $d\vec{S}$  имеет абсолютную величину  $|d\vec{S}|$ , равную площади элемента поверхности, и направление внешней нормали к этому элементу. Тогда, если жидкость вытекает из рассматриваемого объема  $V_0$  через элемент  $d\vec{S}$ , то  $\rho \vec{v} d\vec{S} dt > 0$ , и, наоборот, когда втекает  $\rho \vec{v} d\vec{S} dt < 0$ . Суммарное изменение массы жидкости внутри объема  $V_0$  за время  $dt$  будет

$$dm = \oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} \times dt,$$

или, с другой стороны,

$$dm = -d \left( \int_{V_0} \rho dV \right).$$

Тогда можно записать

$$\oint_S \rho \vec{v} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV, \quad (2)$$

Учитывая теорему Остроградского-Гаусса, связывающую объемный и поверхностный интеграл,

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{r})) dV = \int_S d\vec{S} \vec{F}(\vec{r}), \quad (3)$$

уравнение (2) можно переписать в виде

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (4)$$

Поскольку уравнение (4) выполняется для произвольного объема  $V_0$ , то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением непрерывности. Так как далее полагается, что жидкость является несжимаемой (т.е.  $\rho = \text{const}$ ), то уравнение (5) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (6)$$

### 1.1.2 Уравнение Эйлера

Запишем теперь для объема жидкости  $V_0$  закон движения:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (7)$$

Импульс объема жидкости, заключенной в этом объеме, составляет

$$\vec{p} = \int_{V_0} \rho \vec{v} dV, \quad (8)$$

а сила, действующая на этот объем, складывается из сил давления и гравитационных сил. Силы вязкости жидкости в данном случае не рассматриваются. Подобную модель жидкости без сил вязкости Ричард Фейнман называл «сухой» жидкостью (ее называют также идеальной) [3]. Сила, действующая на выделенный объем  $V_0$ , обусловленная силами давления со стороны окружающей жидкости, равна интегралу

$$\vec{F} = -\oint_S p d\vec{S},$$

взятому по поверхности рассматриваемого объема  $V_0$ . Используя теорему о градиенте, преобразуем этот интеграл в интеграл по объему:

$$-\oint_S p d\vec{S} = -\int_{V_0} \text{grad } p dV. \quad (9)$$

С другой стороны на объем  $V_0$  действует сила тяжести

$$\vec{F}_g = \int_{V_0} \rho \vec{g} dV. \quad (10)$$

Тогда, исходя из закона сохранения импульса (7) и соотношений (8), (9), (10), нетрудно получить уравнение

$$\int_{V_0} \left( \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad } p - \rho \vec{g} \right) dV = 0, \quad (11)$$

которое должно выполняться для произвольного объема жидкости  $V_0$ . Тогда

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\text{grad } p}{\rho} + \vec{g}. \quad (12)$$

Заметим, что в (12) в левой части стоит полная производная  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , которую можно представить в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}. \quad (13)$$

При этом формула (12) примет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\text{grad } p}{\rho} + \vec{g}. \quad (14)$$

Это и есть уравнение движения жидкости, полученное впервые Л.Эйлером в 1755 году [4]. Оно называется уравнением Эйлера и является одним из основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости.

## 1.2 Дисперсионное уравнение

Учитывая, что поле скоростей является безвихревым векторным полем (в силу несжимаемости жидкости  $\text{div } \vec{v} = 0$ ), можно ввести в рассмотрение потенциал поля скоростей  $\varphi$  таким образом, чтобы  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ . С учетом векторного соотношения  $\text{div grad } u = \nabla^2 u$  уравнение (6) примет вид

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Слагаемое  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$  можно записать как

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\vec{v}, \text{rot } \vec{v}]. \quad (16)$$

Тогда, учитывая (15), из уравнений (14), (16) можно получить уравнение Бернулли

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}, \quad (17)$$

где  $U = gz$  – потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле силы тяжести;  $z$  – вертикальная координата, причем точка  $z = 0$  находится на невозмущенной поверхности жидкости. Учитывая, что на поверхность жидкости действует только атмосферное давление  $p_0$ , можно переписать уравнение (17) в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p-p_0}{\rho} + gz = 0. \quad (18)$$

Соотношения (15) и (18), дополненные уравнением

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-H} = 0, \quad (19)$$

которое представляет собой условие на дне жидкости, используются для получения дисперсионного уравнения гравитационно-капиллярных волн.

Известно, что если поверхность раздела двух сред искривлена, то, из-за действия сил поверхностного натяжения, давление вблизи этой поверхности подчиняется закону Лапласа:

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}, \quad (20)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  – значения давления в различных средах вблизи границы раздела,  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $R$  – радиус кривизны поверхности раздела.

Будем рассматривать случай, когда профиль поверхности зависит только от одной пространственной координаты и времени. В этом случае поверхность жидкости описывается уравнением  $\xi = \xi(x, t)$ . Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

получим

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Здесь  $p$  и  $p_0$  – соответственно, давление внутри жидкости и атмосферное давление. Знак «минус» соответствует тому, что кривизна поверхности отрицательна. Тогда с учетом (21) линеаризованное уравнение Бернулли (18) для поверхности жидкости будет иметь вид

$$\rho g \xi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (23)$$

и дифференцируя уравнение (22) по  $t$ , можно записать

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (24)$$

Полагая теперь, что  $\varphi(x, z, t) = \bar{\varphi}(z) e^{j(\omega t - kx)}$ , перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - k^2 \bar{\varphi} = 0. \quad (25)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\varphi(x, z, t) = A_1 e^{kz} e^{j(\omega t - kx)} + A_2 e^{-kz} e^{j(\omega t - kx)}. \quad (26)$$

Подставляя теперь (26) в (24), с учетом (19), можно получить дисперсионную характеристику:

$$\omega^2 = \left( kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \text{th}(kH). \quad (27)$$

В том случае, когда в соотношении (27) преобладает слагаемое  $kg$ :

$$kg \gg \frac{\sigma k^3}{\rho}, \quad (28)$$

говорят о «гравитационных волнах», если же преобладает слагаемое, связанное с действием сил поверхностного натяжения

$$kg = \frac{\sigma k^3}{\rho}, \quad (29)$$

употребляется термин «капиллярные волны». Если же оба слагаемых в дисперсионном соотношении (27) одного порядка, то такие волны называются гравитационно-капиллярными волнами.

### 1.3 Порог возникновения ряби Фарадея

Будем рассматривать теперь случай, когда кювета колеблется вертикально с частотой  $\Omega$ . В системе отсчета, связанной с кюветой, можно считать, что периодически изменяется величина ускорения свободного падения  $g$  (1). Представим потенциал поля скоростей поверхностных волн в виде суммы пространственных гармоник с волновыми числами  $k_n$ :

$$\varphi = \sum_n \varphi_{k_n} e^{k_n x}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (24), с учетом (1), для каждой пространственной гармоники получаем уравнение Матъе [5]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \left( \frac{\sigma k^3}{\rho} + gk + \beta g \cos(\Omega t) \right) \varphi_n = 0. \quad (31)$$

Для капиллярных волн можно пренебречь слагаемым  $gk$  и записать уравнение Матъе в классическом виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 + \mu \cos(\Omega t)) \varphi_n = 0, \quad (32)$$

где

$$\omega_0 = \left( \frac{\sigma k^3}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (33)$$

– частота капиллярных волн,  $\mu = \frac{\beta g \rho}{k^3}$ . Следовательно, в данном случае имеет место параметрическое возбуждение ряби Фарадея, и временные частоты поверхностных волн, которые могут реализовываться при параметрическом возбуждении, будут находиться с частотой внешнего воздействия в соотношении  $\omega = \frac{n\Omega}{2}$ , где  $n$  – целое число.

В реальной жидкости всегда есть потери, обусловленные вязким трением. Если учесть вязкость, то неустойчивость возникает только в том случае, если амплитуда внешнего воздействия превышает некоторый порог  $\beta > \beta_{cr}$ . Для бесконечно глубокой жидкости

$$\beta_{cr} = \frac{4\Omega \nu k_0}{g}, \quad (34)$$

где

$$k_0 = \sqrt[3]{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \frac{\rho}{\sigma}}, \quad (35)$$

$\nu$  – кинематическая вязкость жидкости, связанная с динамической вязкостью  $\eta$  соотношением  $\nu = \eta/\rho$ . Учет конечной глубины жидкости приводит к увеличению значения  $\beta_{cr}$ , так как возрастают потери, связанные с трением о дно. Стоит особо обратить внимание, что приведенные здесь значения  $\beta_{cr}$  соответствуют основному резонансу ( $n = 1, \omega = \Omega/2$ ).

Именно этот первый резонанс реализуется в большинстве экспериментов с капиллярными волнами. В то же время, теоретически возможно возбуждение ряби Фарадея на частотах  $\omega = n\Omega/2, n > 1$ . Почему в физическом эксперименте реализуется именно первый резонанс, легко понять, учитывая, что при резонансах более высокого порядка затухание капиллярных волн увеличивается. Потери возрастают пропорционально  $k^2$ , как следствие, в экспериментах порог неустойчивости для волн с частотами  $\omega = n\Omega/2, n > 1$  оказывается не превышен.

## 2 Экспериментальная установка и методика проведения эксперимента

В данной лабораторной работе для возбуждения вертикальных колебаний в слое жидкости используется вибростенд, созданный в Нижегородском университете. Вибростенд состоит из мощного низкочастотного динамика, к мембране которого приклеена кювета. На динамик подается напряжение с генератора низкочастотных синусоидальных колебаний.

**Внимание: при переключении пределов изменения напряжения следует следить за тем, чтобы ручка плавного изменения была выведена на ноль!**

Параметрами являются глубина слоя жидкости, вязкость (в учебном эксперименте они являются постоянными), амплитуда и частота внешнего воздействия (диапазон изменения амплитуды составляет  $0 \div 7$  В, а частоты –  $40 \div 120$  Гц). Исследуемой в работе жидкостью является силиконовое масло (ПМС-5), характеристики которого приведены в таблице 1. Перед выполнением работы необходимо убедиться, что поверхность жидкости в кювете горизонтальна. В противном случае капиллярная рябь будет неравномерно распределена по поверхности, и мы увидим неоднородную в пространстве картину структур. Если кювета расположена негоризонтально, её следует отъюстировать с помощью регулировочных винтов при включенном генераторе внешнего воздействия.

Таблица 1: Свойства различных жидкостей

Жидкость	$\rho$ , [г/см <sup>3</sup> ] плотность	$\eta$ , [г/(см·сек)]* 10 <sup>2</sup> динамическая вязкость	$\sigma$ , [дин/см] поверхностное натяжение
Силиконовое масло ПМС-5	0.913	4.63	17.5
Глицерин	1.26	1490	64.7
Вода	1.0	0.89	72.86
Этиловый спирт	0.8	1.1	22.8
Бензол	0.88	0.6	29.0
Азотная кислота	1.4	0.54	59.4



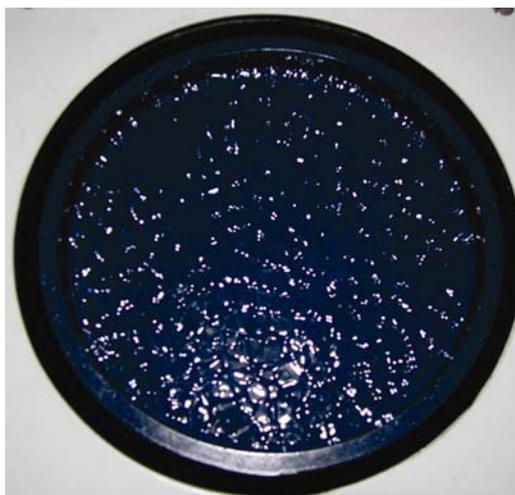


Рис. 5: Фотографии типичных структур поверхности жидкости при возбуждении капиллярных волн при экспериментальном исследовании на экспериментальной установке. Различные фотографии соответствуют различным увеличивающимся амплитудам переменного напряжения на генераторе. Частота сигнала поддерживалась постоянной

Для определения дисперсионной характеристики используется следующая методика. Изменяя частоту внешнего воздействия, следует измерять число периодов пространственной структуры, возникающей в кювете, приходящихся на определенную длину (например, 2–3 см). Тогда можно без труда определить длину стоячей волны и, соответственно, длину волны и волновое число  $k$  в зависимости от частоты внешнего воздействия. При сопоставлении результатов измерений с теоретической зависимостью (27), следует помнить о параметрическом характере возбуждения капиллярной ряби.

Для сравнения порога параметрической генерации с экспериментальными данными необходимо определить величину ускорения в  $\text{м/с}^2$ . Так как при ускорении близком к  $g_0$  (ускорению силы тяжести) предметы, находящиеся на вибрирующей поверхности начинают подпрыгивать, то, измеряя напряжение, при котором проволока, помещенная на края кюветы, начинает звенеть, следует градуировать показания вольтметра в  $\text{м/с}^2$ . Градуировочный коэффициент зависит от частоты генератора, поэтому градуировку вольтметра следует проводить для каждого значения частоты, на которой проводится определение порога параметрического возбуждения капиллярной ряби. Следует считать, что порог возбуждения превышен, если рябь можно разглядеть на части поверхности жидкости. Понятно, что идеально съюстировать кювету невозможно, а следовательно, существует область жидкости, для которой условие возбуждения начинает выполняться для меньшей амплитуды

внешнего воздействия. Когда капиллярная рябь покрывает всю поверхность жидкости, значение амплитуды внешнего воздействия существенно превышает порог параметрической генерации.

Типичные результаты экспериментального исследования на установке, используемой при выполнении лабораторной работы, показаны на рис. 3, на котором приведены фотографии структуры поверхности жидкости при возбуждении ряби Фарадея с увеличением амплитуды внешнего воздействия (амплитуды переменного напряжения генератора низкочастотных колебаний). Видна типичная картина эволюции ряби Фарадея при изменении амплитуды внешнего параметрического воздействия.

### 3 Задания к теоретическому расчету

1. Рассчитайте и постройте в виде графика в координатах  $(k, \omega)$  дисперсионную характеристику волн на поверхности жидкости. Параметры жидкости возьмите для случая силиконового масла (ПМС-5), характеристики которого приведены в таблице 1, используемого в экспериментальной установке.
2. Определите, анализируя дисперсионную характеристику (27), а также условия (28) и (29), в каком диапазоне длин волн и частот будут наблюдаться гравитационные, а в каком – капиллярные волны. Где волны необходимо рассматривать как гравитационно-капиллярные?
3. Основываясь на дисперсионном уравнении (27) и предположении, что  $H/\lambda \ll 1$  покажите, что для капиллярных волн выражение для фазовой скорости  $v_{ph} = \omega/k$  имеет следующий вид:

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$$

4. Основываясь на дисперсионном уравнении (27) и предположении, что  $H/\lambda \gg 1$  найдите для капиллярных волн выражение для групповой скорости  $v_g = d\omega/dk$ . Постройте зависимости фазовой и групповой скорости для жидкости, указанной преподавателем (см. данные в таблице 1), а также для силиконового масла (ПМС-5), характеристики которого также приведены в таблице 1. Определите параметры, при которых фазовая скорость капиллярных волн меньше групповой и, наоборот, больше. Для расчета можете воспользоваться программой для среды MathCAD:

$$VFK(\sigma, \rho, \lambda) := \left( \frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} + \frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi}{\rho \cdot \lambda} \right)^{0.5}$$

$$VGK(\sigma, \rho, \lambda) := \frac{0.5}{\left[ g \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \right) + \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \right)^3 \right]^{0.5}} \cdot \left[ g + 3 \cdot \frac{\sigma}{\rho} \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \right)^2 \right]$$

$g := 9.81$                        $\sigma := \dots$                        $\rho := \dots$

5. Рассчитайте аналитически, пользуясь результатами раздела 1.3, порог возникновения ряби Фарадея для жидкости, указанной преподавателем, а также для силиконового масла (ПМС-5).

#### 4 Задания к практическому исследованию

1. Откалибровать шкалу вольтметра в единицах ускорения. Построить зависимость нормировочного множителя от частоты сигнала генератора.
2. При включенном генераторе внешнего воздействия с помощью регулировочных винтов отъюстировать кювету с жидкостью.
3. Определить дисперсионную зависимость  $\omega = \omega(k)$ . Для этого необходимо определить размер структуры, возникающей в кювете при различных значениях частоты внешнего воздействия. Частоту внешнего воздействия изменять в пределах от 40 до 120 Гц с интервалом 5 Гц. Построить полученную зависимость в координатах  $\omega$  и  $k$  и сравнить ее с теоретической.
4. Снять экспериментальную зависимость порога возбуждения капиллярной ряби от частоты внешнего воздействия и сравнить полученную кривую с теоретической.
5. Пронаблюдать возникновение пространственно-временного хаоса на поверхности жидкости с изменением амплитуды внешнего воздействия при различных значениях частоты. Схематически изобразить карту режимов на плоскости управляющих параметров «амплитуда – частота внешнего воздействия».
6. Зарисовать (или сфотографировать) характерные пространственные структуры, возникающие на поверхности жидкости в различных областях карты режимов.

#### 5 Контрольные вопросы

1. Опишите основные явления, которые наблюдаются при параметрическом возбуждении капиллярной ряби.
2. Выведите уравнение непрерывности для жидкости. Как оно будет выглядеть в случае несжимаемой жидкости?
3. Назовите основные допущения, используемые при выводе уравнения Эйлера.
4. Запишите дисперсионное уравнение для гравитационно-капиллярных

- волн на мелкой воде. Опишите методику получения дисперсионного уравнения из гидродинамических уравнений.
5. Какой тип поверхностных волн (гравитационные или капиллярные волны) реализуется при наблюдении ряби Фарадея? Ответ обоснуйте.
  6. Какие частоты поверхностных волн могут реализовываться в жидкости без вязкого трения при периодическом внешнем воздействии с частотой  $\Omega$ ? Что изменится для случая вязкой жидкости?
  7. Объясните, почему при небольшом превышении значения амплитуды внешнего воздействия порога возбуждения, капиллярная рябь занимает небольшую область поверхности жидкости.
  8. С чем связано установление той или иной конкретной структуры на поверхности жидкости.
  9. Опишите методику проведения эксперимента.

### **А Для тех, кому интересно формообразование структур при параметрическом возбуждении капиллярных волн на поверхности жидкости**

Обсудим некоторые результаты натуральных и численных экспериментов по исследованию ряби Фарадея. Исследователями были обнаружены различные динамические режимы, а так же различные сценарии перехода от одних режимов к другим при изменении управляющих параметров системы, например, амплитуды внешнего воздействия или вязкости жидкости.

Большинство наблюдаемых явлений при параметрически возбуждаемой капиллярной ряби на поверхности жидкости могут быть условно классифицированы следующим образом.

#### **А.1 Усложнение динамики структур на поверхности слоя жидкости при изменении амплитуды внешнего воздействия**

Рассмотрим этот вопрос на примере экспериментов А.Б. Езерского, М.И. Рабиновича и др. [6]. В их экспериментах использовалось силиконовое масло с параметрами: плотность  $\rho = 0.9 \text{ г/см}^3$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 23 \text{ дин/см}$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu = 0.04 \text{ см}^2/\text{сек}$ . Рябь Фарадея возбуждалась на поверхности слоя масла толщиной 1 см, нанесенного на вибрирующую кювету с диаметром 18 см. При частоте внешнего воздействия 140 Гц возбуждались капиллярные волны с частотой 70 Гц, что свидетельствует о параметрической природе ряби Фарадея.

С превышением величины амплитуды внешнего воздействия некоторого порогового значения  $\beta_{cr} \approx 4.2$  в центре кюветы возникала рябь

Фарадея, которая в отраженном свете представляется в виде сетки с квадратными ячейками. При  $\beta > 5$  фарадеевская рябь заполняет всю поверхность слоя. На поверхности жидкости начинает появляться модуляция контраста изображения первичной ячеистой структуры, которая имеет вид полос, вытянутых вдоль сетки. При этом наблюдается эффект, когда почти одномерная модуляция вдоль одного направления могла самопроизвольно смениться модуляцией по другому направлению. Частота смены ориентации увеличивается с ростом  $\beta$ . С дальнейшим ростом ( $\beta > 8 \div 9$ ) модуляция становится все в большей степени неоднородной и неупорядоченной. В системе наблюдается развитый пространственно-временной хаос. А для  $\beta > 11.5$  наблюдается отрыв капель от поверхности слоя жидкости.

## А.2 Сложная перестройка поверхностной структуры и перемежаемость между различными режимами при изменении двух управляющих параметров (двухпараметрическое исследование)

В случае двухпараметрического анализа, то есть исследования различных режимов колебаний на поверхности жидкости при изменении двух управляющих параметров, существует возможность выделить на плоскости этих управляющих параметров области с различными режимами и определить сценарии перехода от одних режимов к другим. Приведем результаты такого анализа из работ Дж.Голлуба и А.Кудролли [7, 8], полученные при изменении амплитуды и частоты внешнего воздействия для силиконового масла с кинематической вязкостью  $1.0 \text{ см}^2/\text{сек}$ . На рис. 4 приведена карта режимов, снятая экспериментально.

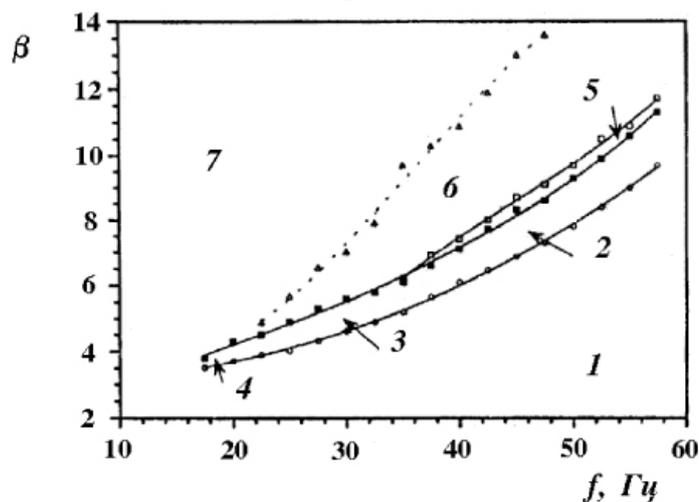


Рис. 6: Карта режимов параметрически возбуждаемых капиллярных волн [7]. Здесь цифрами обозначены области различных режимов: 1 – невозбужденная поверхность, 2 – «длинные валики», 3 – «короткие валики», 4 – шестиугольные структуры, 5 – модуляция амплитуды волн, 6 – перемежаемость, 7 – пространственно-временной хаос

Для небольшой амплитуды внешнего воздействия наблюдается спокойная поверхность жидкости. Линия, отмеченная кружками, – это линия порога неустойчивости. При превышении величины амплитуды внешнего воздействия этого порога на поверхности жидкости возникает капиллярная рябь. В случае небольшой надкритичности структуры на поверхности регулярны и представляют собой либо короткие или длинные валики (рис. 6, 1), либо квадратные ячейки (рис. 6, 2) или шестиугольные «сотовые» структуры (рис. 6, 3). Дальнейший рост  $\beta$  приводит к поперечной модуляции амплитуды волн; на поверхности образуется структура с двумя фокусами на границе кюветы, причем валики подходят к границе строго перпендикулярно (рис. 6, 1, см. вставку).



Рис. 5: Структура поверхности жидкости для режима перемежаемости. (из [7]) Видно, что амплитуда волн в области с хаотической динамикой, существенно больше, чем в области регулярных структур

Далее, с ростом  $\beta$  в системе наблюдается режим перемежаемости (см. рис. 5), когда одновременно с областями регулярной динамики (правильных валиков) наблюдаются области хаотической модуляции капиллярных волн (темные области на фотографии).

На рис. 7 демонстрируется переход к пространственно-временному хаосу через разрушение шестигранных структур с увеличением амплитуды внешнего воздействия. Из рисунка видно, что переход к хаосу связан с динамикой дефектов упорядоченной пространственной структуры. При небольшом  $\beta$  (рис. 7, 1) структура ячеек на поверхности лишь немного искажается возникающими дефектами. Рост интенсивности внешнего воздействия приводит к стабилизации структуры на поверхности

(как видно из рис. 7,2, на поверхности наблюдается четкая и регулярная структура ряби). Дальнейший рост  $\beta$  ведет к разрушению упорядоченности в расположении ячеек (рис. 7, 3), имеющиеся дефекты в решетке перемещаются по поверхности, причем с ростом  $\beta$  их число увеличивается и в итоге система переходит к пространственно-временному хаосу (рис. 7, 4).

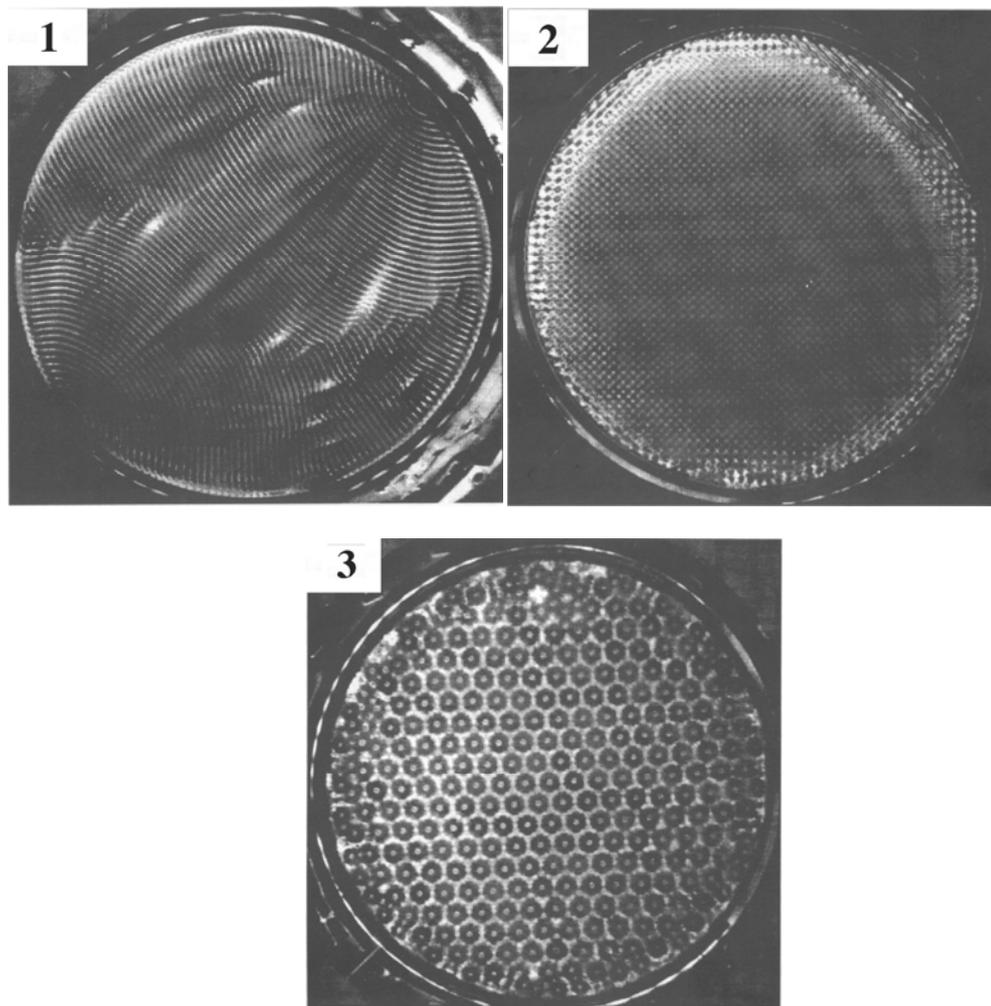


Рис. 6: Примеры различных структур, формирующихся на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении капиллярных волн (из [8]). 1 – «длинные валики», 2 – квадратная решетка, 3 – шестиугольные структуры

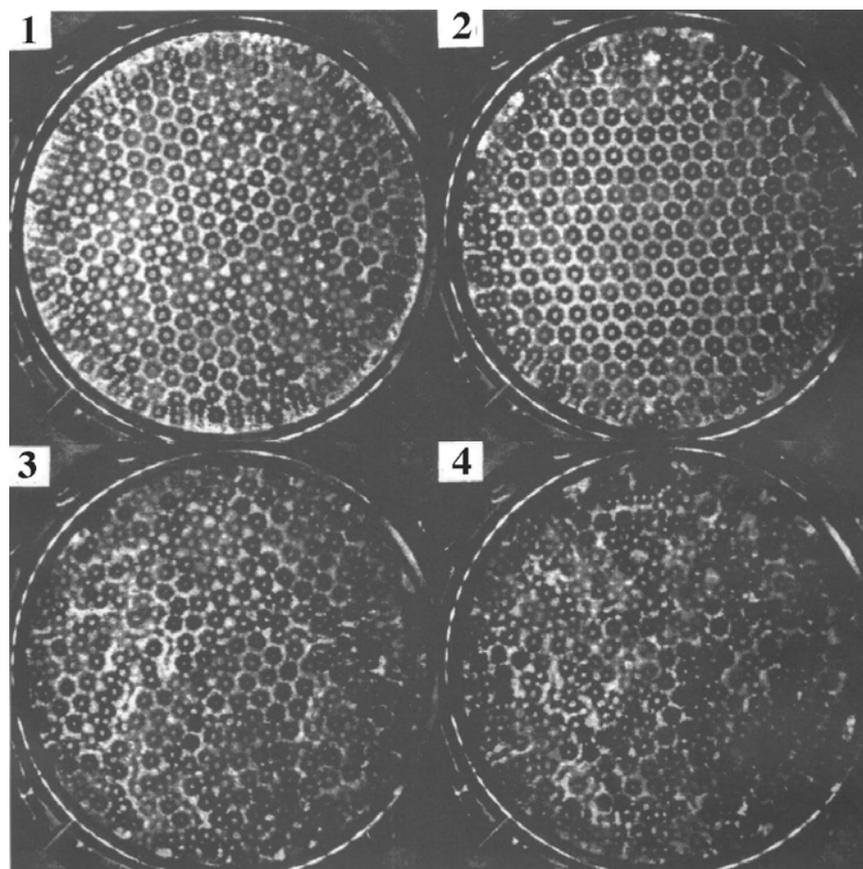


Рис. 7: Переход к пространственно-временному хаосу с увеличением амплитуды внешнего воздействия через разрушение «сотовой» структуры на поверхности жидкости (из [8])

Отметим, что вышеописанная карта режимов не универсальна, и при других значениях параметров, получающиеся структуры и границы областей будут отличаться от вышеописанных.

### **А.3 Формирование многомасштабной пространственной структуры с симметрией высокого порядка при двухчастотном внешнем воздействии**

В случае двухчастотного внешнего воздействия осциллирующая добавка к ускорению свободного падения запишется в виде:  $r\sin(m\Omega t) + (1 - r)\sin(n\Omega t + \phi)$ . При фиксированном  $m/n$  основными управляющими параметрами, от которых будет зависеть поведение капиллярной ряби на поверхности жидкости, являются величины  $r$  и  $\phi$ . Как показали эксперименты с очень вязкой жидкостью, возникающая на поверхности жидкости структура подобна линейным и круговым структурам в конвекции Рэлея–Бенара около порога неустойчивости. Эксперименты В.Эдвардса и С.Фауве [9, 10] для случая  $m/n = 4/5$  показали, что

поверхностные волны колеблются на частоте  $4\Omega$ , если доминирует компонента внешней силы с этой частотой ( $r > 0.5$ ), и на частоте  $5/2\Omega$ , если  $r < 0.5$ .

Кроме того, в более узких областях параметров  $r, \phi$  были найдены более сложные пространственные структуры с высоким порядком симметрии: квадратные и шестиугольные ячейки, квазикристаллические структуры.

Обсудим последнее явление более подробно, для чего рассмотрим профиль поверхности жидкости  $\xi(x, y, t)$ . Как известно (см. следующий раздел), вид ряби Фарадея определяется числом пар стоячих волн  $\ell$ , образующих структуру, при этом угол между волновыми векторами волновых пакетов будет  $2\pi/\ell$ .  $\ell = 1$  соответствует роликам;  $\ell = 2$  – квадратным ячейкам и  $\ell = 3$  – шестиугольным структурам. Однако, при  $\ell > 3$  не существует трансляционной симметрии, то есть нет пространственных периодов  $\Lambda_x$  и  $\Lambda_y$ , таких, что  $\xi(x + \Lambda_x, y + \Lambda_y) = \xi(x, y)$ . Таким образом, при  $\ell = 4$  отклонение поверхности  $\xi$  при  $t = 0$  и  $y = 0$  будет задаваться выражением вида

$$\xi = A_1 \cos(kx) + A_2 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \phi\right).$$

Это сумма пространственных гармоник с несоизмеримыми частотами  $k$  и  $k/\sqrt{2}$ , то есть пространственная периодичность отсутствует. Подобные структуры со свойствами симметрии вращения называются квазикристаллами. Они не обладают ближним порядком, характерным для структур с трансляционной симметрией, но зато имеют дальний порядок. Фотография такой квазикристаллической структуры, полученной в натурном эксперименте Дж.Голлуба и А.Кудролли, приведена на рис. 8. Видно, что на поверхности наблюдается сложная, обладающая симметрией вращения высокого порядка, картина.

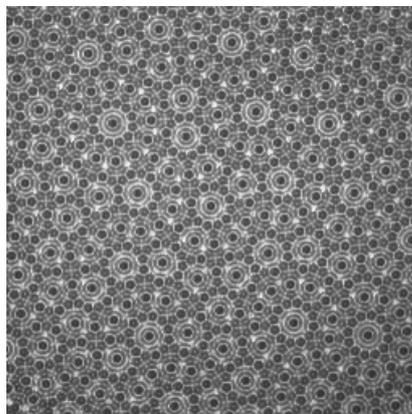


Рис. 8: Рябь Фарадея при двухчастотном внешнем воздействии

## А.4 Формирование вращающихся спиральных структур

Формирование структур в виде спиральных волн наблюдается в распределенных системах самой различной природы, например, при возникновении в сердце аритмии, в химически возбудимой среде, в биологических системах [5]. Подобная картина может наблюдаться и в эксперименте [11] по параметрическому возбуждению капиллярной ряби со специально выбранными параметрами эксперимента, а именно в кювете с большим отношением диаметра к высоте слоя жидкости ( $\sim 30$ ). При этом вязкость жидкости должна быть достаточно большой.

Как показал натурный эксперимент (С.В.Кияшко и др. [11]), в области параметров, соответствующих стационарным круговым волнам, путем введения возмущения (дислокаций) в «правильную» картину на поверхности жидкости, удается сформировать вращающийся спиральный вихрь. Известно [5], что решение для спиральных волн в двухмерной среде в полярных координатах  $\theta$  и  $r$  записывается в виде

$$\vec{u} = \vec{F}(N\theta - \omega t, r),$$

где  $N$  – число элементарных волн вращающихся вместе, или, как его называют, топологический заряд спиральной волны. В рассматриваемом случае топологический заряд волны определяется числом дислокаций  $n$ . В эксперименте  $N$  всегда равно  $n$ .

Численное моделирование с помощью феноменологической модели, основанной на уравнении Гинзбурга-Ландау (см. подробнее раздел 1.4), также продемонстрировало подобную картину. Рис. 9 иллюстрирует формирование вихря с топологическим зарядом  $N = 2$ . Каждый из кадров иллюстрирует состояние системы в момент времени  $t_i = t_0 + \Delta t \cdot (i - 1)$ , где  $i$  – номер кадра. Обратите внимание, что на начальном этапе (рис. 9, 1) структура содержит две дислокации. Отметим интересный момент, связанный с динамикой дислокаций. Одна из них всегда быстро разрушается на стенке кюветы, а другая медленно движется к центру (рис. 9, 2), где окончательно формируется вихрь (рис. 9, 3,4). Аналогичная ситуация реализуется и при большем числе дислокаций.

Для тех, кто хочет познакомиться с вопросами формообразования структур в системах различной природы более глубоко, можно порекомендовать книгу [12].

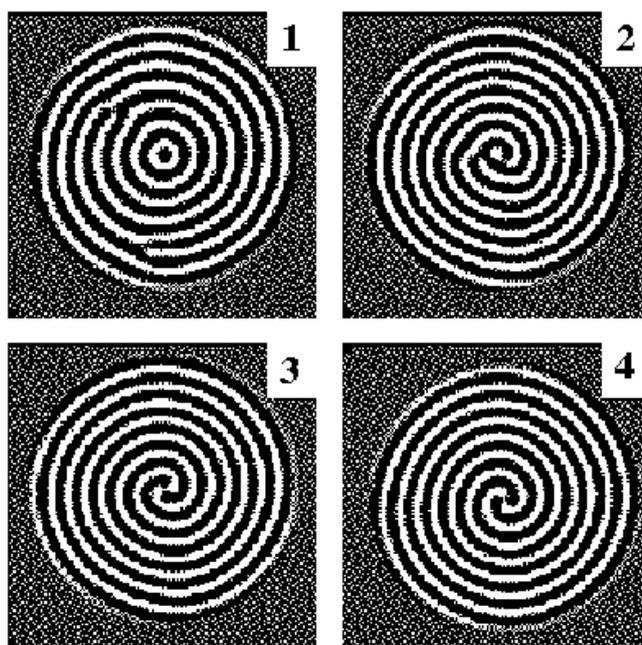


Рис. 9: Спиральные волны с топологическим зарядом  $N = 2$  (по результатам численного эксперимента [10])

### Список литературы

1. *M.Faraday*, Philos.Trans.R.Soc., London, 121 (1831) 319
2. Introduction to Faraday's Diary, ed by T.Martin, London: G.Bell, 1932
3. *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*, Фейнмановские лекции по физике. Том 7. Физика сплошных сред. М.: Мир. 1977
4. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1988
5. *М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков*, Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
6. *А.Б.Езерский, М.И.Рабинович, В.П.Реутов, И.М.Старобинец* ЖЭТФ, **91** (2070) 1986
7. *A.Kudrolli, J.P.Gollub*, Phys.Rev.E., **54** (R1052) 1996
8. *A.Kudrolli, J.P.Gollub*, Physica D, **97** (133) 1996
9. *W.S.Edwards, S.Fauve*, Phys.Rev.E, **47** (123) 1993
10. *W.S.Edwards, S.Fauve*, J.Fluid Mech., **278** (123) 1994
11. *S.V.Kiyashko, L.N.Korzinov, M.I.Rabinovich, L.S.Tsimring*, Phys.Rev.E, **54** (5037) 1996
12. *М.И. Рабинович, А.Б. Езерский* Динамическая теория формообразования. М.: Янус-К, 1998, 192с.