УДК 517.9

Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве[1]

А. Д. Пьянков (Екатеринбург, Россия)
sascha.pyankow@mail.ru

В работе найдено точное по порядку неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве. С помощью этого неравенства, как следствие, получено альтернативное доказательство неравенства Никольского разных метрик для норм тригонометрического полинома в пространствах Орлича.

Ключевые слова: неравенство разных метрик, норма Люксембурга, тригонометрический полином.

Inequality of different metrics for discrete Luxembourg norms in a finite-dimensional space[1]

A. D. Pyankov (Yekaterinburg, Russia)
sascha.pyankow@mail.ru

The paper found an order-exact inequality of different metrics for discrete Luxembourg norms in a finite-dimensional space. Using this inequality, as a consequence, an alternative proof of the Nikolsky inequality of different metrics for the norms of a trigonometric polynomial in Orlicz spaces is obtained.

Keywords: inequality of different metrics, Luxembourg norm, trigonometric polynomial.

С. М. Никольским в [1, 2] было получено точное по порядку неравенство разных метрик в пространствах Лебега L^p, L^q $(1 \leqslant p < q \leqslant +\infty)$ для целых функций экспоненциального типа $g_{\nu_1,\ldots,\nu_n}(z_1,\ldots,z_n)$ конечных типов $\nu_1,\ldots,\nu_n$ по каждой переменной $z_1,\ldots,z_n$ соответственно. Рассуждения, использованные в ходе доказательства такого неравенства переносятся с пространства целых функций на пространство тригонометрических полиномов соответствующих степеней от n переменных. Приведём здесь теорему для пространства тригонометрических полиномов.

Теорема (С. М. Никольский). *Для любого тригонометрического полинома $T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}$ порядков $\nu_1,\ldots,\nu_n$ от переменных $x_1,\ldots,x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ справедливо следующее неравенство для его норм в пространствах*

$L^p([0,2\pi]^n), L^q([0,2\pi]^n)$ *при* $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$:

$$\|T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\|_q \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \nu_k\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_{\nu_1,\ldots,\nu_n}\|_p.$$

Неравенство Никольского разных метрик обобщалось с пространств Лебега на нормы более общего вида вплоть до симметричных пространств. Неравенство для симметричных пространств целых функций экспоненциального типа доказано М. З. Берколайко и В. И. Овчинниковым в работе [3], для полиномов от одной переменной – В. А. Родиным в [4], для полиномов от нескольких переменных – Г. А. Акишевым в [5].

Функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ будем называть *N-функцией*, если она выпуклая, положительная при $x \neq 0$, чётная, имеет непрерывную строго возрастающую производную p и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Пусть φ – N-функция с производной p. Функция

$$\bar{\varphi}(x) = \int_0^{|x|} p^{-1}(t)\, dt,\ x \in \mathbb{R},$$

будет являться N-функцией [6, гл. 1, § 1] и называется *дополнительной* или *сопряженной* функцией к функции φ.

Говорят, что N-функция φ *удовлетворяет* Δ_2*-условию*, если

$$\exists x_0 \geqslant 0, C > 0\ \forall x \geqslant x_0 \quad \varphi(2x) \leqslant C\varphi(x).$$

Пусть φ_1, φ_2 – возрастающие функции. Будем говорить, что функция φ_1 *растёт не быстрее* функции φ_2 (и обозначать $\varphi_1 \preccurlyeq \varphi_2$), если

$$\exists x_0 \geqslant 0, k > 0\ \forall x \geqslant x_0 \quad \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(kx).$$

Пусть φ – N-функция, $L^{\varphi}_{2\pi}$ – построенное по ней пространство Орлича [6, гл. 2, § 9] 2π-периодических функций. Для $f \in L^{\varphi}_{2\pi}$ выражение

$$\|f\|_{(\varphi)} = \inf\left\{k > 0 : \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{f(x)}{k}\right) dx \leqslant 1\right\}$$

называется *нормой Люксембурга* функции f в пространстве $L^{\varphi}_{2\pi}$.

Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ – вектор из $\mathbb{R}^m$, φ – N-функция. Определим для параметра $h > 0$ *дискретную норму Люксембурга* (норму Люксембурга вектора a) следующим образом:

$$\|a\|_{(\varphi)}^h = \inf\left\{k > 0 : h \cdot \sum_{i=1}^{m} \varphi\left(\frac{a_i}{k}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Основной результат настоящей работы представляет собой следующее утверждение.

Теорема 1. *Для пары N-функций φ_1, φ_2 таких, что $\varphi_1' \preccurlyeq \varphi_2'$ и для любого вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ справедливо неравенство разных метрик для норм Люксембурга*:

$$\|a\|_{(\varphi_2)}^h \leqslant C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}\left(\frac{C_2}{h}\right)}{\varphi_2^{-1}\left(\frac{C_2}{h}\right)} \cdot \|a\|_{(\varphi_1)}^h.$$

где числа $C_1, C_2 > 0$ не зависят от a и h.

В качестве следствия этой теоремы может быть получено неравенство Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Орлича.

Теорема 2. *Для любого тригонометрического полинома T_n порядка не выше n $(n \in \mathbb{N})$ и пары удовлетворяющих Δ_2-условию N-функций φ_1, φ_2 таких, что $\varphi_1' \preccurlyeq \varphi_2'$ справедливо следующее точное по порядку неравенство норм в пространствах Орлича*:

$$\|T_n\|_{(\varphi_2)} \leqslant C_1 \cdot \frac{\varphi_1^{-1}(C_2 n)}{\varphi_2^{-1}(C_2 n)} \cdot \|T_n\|_{(\varphi_1)},$$

где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

[2] *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1977. 456 с.

[3] *Берколайко М. З., Овчинников В. И.* Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах // Труды математического института АН СССР. 1983. Т. 161. С. 3–17.

[4] *Родин В. А.* Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Труды 7-й зимней школы. Дрогобыч : 1974. Москва, 1976. С. 133–139.

[5] *Акишев Г. А.* О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства // Математический журнал. 2014. Т. 14, № 4 (54). С. 46–71.

[6] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 271 с.