УДК 517.55/57

Неравенства Харди–Литтлвуда для классов Харди–Лоренца[1]

В. Г. Кротов, М. М. Логиновская (Минск, Беларусь)
krotov@bsu.by, mary.loginovskaya@gmail.com

Приводится усиление оценок Харди–Литтлвуда для аналитических функций в единичном круге, состоящее в том, что H^p-квазинормы в правых частях этих неравенств заменяются на слабые $H^{p,\infty}$-квазинормы. Такое усиление возможно провести в рамках некоторой абстрактной схемы, не связанной со свойствами аналитичности, гармоничности и т.п. Приведены конкретные примеры применения этой схемы для единичного шара B^n в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ и для действительного полупространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Ключевые слова: неравенства Харди–Литтлвуда, пространства типа Харди, пространства Харди–Лоренца.

Hardy–Littlewood inequalities for Hardy–Lorentz classes[1]

V. G. Krotov, M. M. Loginovskaya (Minsk, Belarus)
krotov@bsu.by, mary.loginovskaya@gmail.com

A strengthening of the Hardy–Littlewood estimates for analytic functions in the unit disk is given, which consists in replacing the H^p-quasinorms on the right-hand sides of these inequalities with weak $H^{p,\infty}$-quasinorms. Such strengthening can be carried out within the framework of some abstract scheme that is not related to the properties of analyticity, harmonicity, etc. Specific examples of the application of this scheme for the unit ball B^n in the multidimensional complex space $\mathbb{C}^n$ and for the real half-space $\mathbb{R}^{n+1}_+$ are given.

Keywords: Hardy–Littlewood inequalities, Hardy-type spaces, Hardy–Lorentz spaces.

0.1 Основные определения и обозначения

Пусть (X,μ) — множество с σ-конечной мерой μ, $L^0(X)$ — множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на X.

Для $0<p<\infty$ обозначим $L^p(X)$ — подмножество $L^0(X)$, состоящее из функций для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{1/p},$$

Для $0 < p, r \leq \infty$ обозначим $L^{p,r}(X)$ пространства Лоренца (см., например, [1, § 1.4.2]) с квазинормой

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \dfrac{dt}{t}\right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f на X:

$$f^*(t) := \inf\{s > 0 : \mu(\{|f| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

При фиксированном p и возрастании r квазинорма (1) убывает, а класс $L^{p,r}(X)$ расширяется. При $r = \infty$ квазинорма (1) совпадает с

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X)} := \sup_{\lambda>0} \lambda[\mu(\{|f| > \lambda\})]^{1/p}, \quad p > 0.$$

Пусть X — хаусдорфово пространство, топология которого порождена квазиметрикой d, т.е. задана функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяющая всем аксиомам метрики, только неравенство треугольника заменяется более слабым условием: существует такое число $K_1 \geq 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq K_1[d(x, z) + d(z, y)].$$

Пусть на X задана также σ-конечная борелевская мера, причем мера каждого шара

$$B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \ t > 0,$$

конечна и положительна.

Произведение

$$\mathbf{X} := \mathbf{X} \times \mathbf{I}, \quad \text{где} \quad \mathbf{I} = (\mathbf{0}, \mathbf{t_0}), \ \mathbf{0} < \mathbf{t_0} \leq +\infty,$$

снабдим стандартной мерой-произведением $\mu \times m_1$, где m_1 — одномерная мера Лебега на I.

Рассмотрим «некасательные» области

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \mathbf{t}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

подхода к точкам $x \in X$ «границы» $\mathbf{X}$ и соответствующую максимальную функцию

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X,$$

для любой функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$.

Введем обозначение $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ для множества всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$, для которых максимальная функция $\mathcal{N}u$ конечна μ-почти всюду. Далее для $p, r > 0$ введем классы $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, состоящие из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}.$$

При $r = p$ будем писать $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ вместо $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$.

При конкретном выборе тройки (X, d, μ) классы $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ являются расширениями классических пространств Харди (см. п. 0.3).

0.2 Усиление неравенств Харди–Литтлвуда

Введем обозначение

$$M_p(t, u) := \left(\int\limits_X |u(y,t)|^p \, d\mu(y) \right)^{1/p}$$

Теорема. *Пусть $0 < p < q \le \infty$ и мера μ удовлетворяет условию*

$$\mu(B(x,t)) \ge K_2 t^n, \quad x \in X, \ t \in I,$$

при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x,t)| \le C_1 t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad x \in X, \ t \in I, \tag{2}$$

где $C_1 = C_1(K_2, p)$,

$$M_q(t,u) \le C_2 t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad t \in I, \tag{3}$$

где $C_2 = C_2(K_2, p, q)$.

В [2] приведены неравенства, аналогичные (2) и (3), но с $\|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}$ вместо $\|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}$ в правых частях.

В [2] имеется также неравенство

$$\left(\int\limits_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} M_q(t,u) \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \le C \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \tag{4}$$

где $l \ge p$ и $r = p$ (C — некоторая постоянная). В связи с этим отметим, что при $r \in (p, \infty]$ неравенство (4) теряет силу для каждого $l \ge p$.

0.3 Примеры

Пусть $X = S \subset \mathbb{C}^n$ — единичная сфера, $n \geq 1$, $I = (0,1)$, $\mu = \sigma$ — поверхностная мера Лебега на S

$$d(\zeta,\eta) = |1 - \langle\zeta,\eta\rangle|, \quad \langle\zeta,\xi\rangle := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \overline{\xi}_j$$

неизотропная квазиметрика на S, тогда класс Харди $H^p(B^n)$ [3, п. 5.6] голоморфных функций в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ содержится в $\mathcal{H}^p(S \times (0,1))$, если отождествить $B^n \setminus \{0\}$ и $S \times (0,1)$ с помощью отображения $S \times (0,1) \ni (\zeta,t) \leftrightarrow (1-t)\zeta \in B^n \setminus \{0\}$.

В одномерном случае $n = 1$ неравенства (2) и (3) для аналитических функций в единичном круге восходят к Г.Харди и Дж.Литтлвуду [4, теорема 2], а при любом $n \geq 1$ были доказаны в [5] для функций из $H^p(B^n)$ и с $\|\cdot\|_{H^p(B^n)}$ в правых частях.

Рассмотрим теперь действительный случай $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $I = (0,\infty)$, μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$ — евклидова метрика. Тогда множество гармонических функций из $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ совпадает с классом Харди $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ [6].

Неравенства, подобные (2) и (3), доказывались в [7] для абстрактных интегралов Пуассона функций из L^p, $p > 1$, а также при $p > 0$ для функций, у которых некоторая степень $k \leq p$ субгармонична. Здесь также слабые квазинормы $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ не рассматривались

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Grafakos L.* Classical Fourier Analysis, Third Edition, Graduate Texts in Math., No. 249. New York : Springer, 2014. 638 с.

[2] *Катковская И. Н., Кротов В. Г.* Интерполяционная теорема Марцинкевича и касательное граничное поведение функций из классов типа Харди // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 66. XVI Международная Казанская школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Сборник трудов. Казань : КФУ, 2023. С. 128–131.

[3] *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М. : Мир, 1984. 455 с.

[4] *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A convergence criterion for Fourier series // Math. Zeit. 1932. V. 28, № 1. С. 612–634.

[5] *Mitchell J., Hahn K. T.* Representation of linear functionals in H^p spaces over bounded symmetric domains in $\mathbb{C}^n$ // J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 568, № 2. С. 379–396.

[6] *Fefferman C., Stein E. M.* H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V. 129, № 3–4. С. 137–193.

[7] *Flett T. M.* On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions // Proc. London Math. Soc. 1970. V. 20, № 4. С. 749–768.