УДК 517.957

Нелинейная система типа «реакция-диффузия»[1]

В. В. Тихомиров (Москва, Россия)
zedum@cs.msu.ru

В работе исследовано влияние диффузии на устойчивость системы «реакция-диффузия» Колмогорова–Фишера.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, система, устойчивость, диффузия.

Nonlinear reaction-diffusion system[1]

V. V. Tikhomirov (Moscow, Russia)
zedum@cs.msu.ru

This work examines the influence of diffusion on the stability of the Kolmogorov-Fisher reaction-diffusion system.

Keywords: nonlinear differential equation, system, stability, diffusion.

Введение. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$u_t = f(u,v) + d_1 \triangle u, \quad v_t = g(u,v) + d_2 \triangle v, \tag{1}$$

где $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$, $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$; $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ — коэффициенты диффузии; $\triangle$ — оператор Лапласа.

Функции u и v удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

на границе Γ ограниченной замкнутой области Ω и начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v(0,y) = 0. \tag{3}$$

Ради определенности будем предполагать, что область Ω является квадратом: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Вектор-функция $F = \{f(u,v), g(u,v)\}$ определяет реакцию компонентов системы (1)–(3), которая описывается динамической системой

$$\frac{dV(t)}{dt} = F(V(t)), \quad V(t) = \{f, g\}.$$

Матрица $\mathrm{diag}(d_1, d_2)$ описывает диффузионные потоки, возникающие в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Решения системы (1)–(3) будем рассматривать в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$ (слабые решения).

Основные результаты

Для исследования поведения решений системы (1)–(3) при $t \to +\infty$ воспользуемся энергетическим (вариационным) методом [1–3]. Введем (вариационную) функцию времени

$$S(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2)dx\,dy, \tag{4}$$

которая играет роль энергии системы.

Вычислим производную функции (4) с учетом (1)–(3). В результате получим

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (u_x u_{xt} + v_x v_{xt} + u_y u_{yt} + v_y v_{yt})dx\,dy. \tag{5}$$

Формулу (5) можно представить в виде

$$S'(t) = S_1'(t) + S_2'(t),$$

где

$$S_1'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u_x(d_1 u_{xx})_x + u_x(f_u u_x + f_v v_x) + \\ + v_x(d_2 v_{xx})_x + v_x(g_u u_x + g_v v_x)]dx\,dy, \tag{6}$$

$$S_2'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 [u_y(d_1 u_{yy})_y + u_y(f_u u_y + f_v v_y) + \\ + v_y(d_2 v_{yy})_y + v_y(g_u u_y + g_v v_y)]dx\,dy. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$d = \min(d_1, d_2), \quad m = \max_{u,v}(|f_u| + |f_v| + |g_u|, \, |g_v| + |f_v| + |g_u|). \qquad (8)$$

Подробно исследуем интеграл (6). После интегрирования по частям, с учетом краевых условий, запишем (6) в виде

$$S_1'(t) = -\int_0^1 \int_0^1 (d_1 u_{xx}^2 + d_2 v_{xx}^2) dx\, dy +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 (f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + (f_u + g_u) u_x v_x) dx\, dy. \qquad (9)$$

Тогда в силу обозначений (8) имеем

$$S_1'(t) \leq -d \int_0^1 \int_0^1 (u_{xx} + v_{xx}) dx\, dy + m \int_0^1 \int_0^1 (u_x^2 + v_x^2) dx\, dy. \qquad (10)$$

Так как $u_x(0) = 0$, $u_x(1) = 0$, то выполняется неравенство Фридрихса

$$\int_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx, \quad \int_0^1 v_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 v_x^2 dx. \qquad (11)$$

Используя (9), (10) и (11), получим

$$E_1'(t) \leq (m - d\pi^2) E_1(t).$$

Если $d > m/\pi^2$, то $E'(t) < 0$. Поскольку $E(t) \geq 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = 0$, и поэтому $u_x(x, y, t) \to 0$ и $v_x(x, y, t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рассуждая аналогично в отношении интеграла (7), убеждаемся в справедливости неравенства

$$E_2'(t) \leq (m - d\pi^2) E_2(t),$$

и следовательно, $u_y(x, y, t) \to 0$ и $v_y(x, y, t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если $d > m/\pi^2$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t) = 0$, и поэтому все частные производные u_x, v_x, u_y, v_y стремятся к нулю при $t \to +\infty$, а само решение выходит на константу.*

Замечание. Ясно, что полученный результат распространяется на системы с произвольным числом уравнений и неизвестных функций. Полученный результат не всегда удается использовать в конкретных случаях, так как вычисление постоянной m зависит от априорных знаний о решении $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ и его производных.

Таким образом, предложенный метод [4] позволяет сохранить устойчивость системы при достаточно больших коэффициентах диффузии. Эту устойчивость принято называть *пространственно-диффузионной устойчивостью*, даже в случае неустойчивой системы (при $d = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.

[2] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Москва : Наука, 1977. 736 с.

[3] *Братусь А. С., Дрожжин С. В., Якушкина Т. С.* Математические модели эволюции и динамика репликаторных систем. Москва : ЛЕНАНД, 2022. 264 с.

[4] *Иновенков И. Н., Нефедов В. В., Тихомиров В. В.* Компьютерное моделирование динамики населения городского образования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 300–309.