УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

Многочлены Эрмита–Паде для тригонометрических рядов[1]

А. П. Старовойтов, Т. М. Оснач, Е. П. Кечко
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, osnach@gsu.by, ekechko@gmail.com

Для конечного набора тригонометрических рядов определяются многочлены и аппроксимации Эрмита–Паде. Устанавливается критерий существования и единственности таких многочленов, описывается их явный вид.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде, тригонометрические ряды.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Hermite – Padé polynomials for trigonometric series [1]

A. P. Starovoitov, T. M. Osnath, E. P. Kechko (Gomel, Belarus)
svoitov@gsu.by, osnach@gsu.by, ekechko@gmail.com

We defined Hermite – Padé polynomials and approximations for a finite set of trigonometric series. We established criterion of the existence and uniqueness of these polynomials, and their explicit form was described.

Keywords: Hermite–Padé approximations, trigonometric serial.

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus.

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx \right), \quad j = 1, 2, \dots, k \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ – это сумма $m = m_1 + \dots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и рассмотрим тригонометрический аналог задачи Эрмита–Паде (см. [1, гл. 4, §1, задача A]):

Для набора тригонометрических рядов (1) *найти отличный от нуля тригонометрический многочлен* $Q_m^t(x) = Q_{n,\overrightarrow{m}}^t(x; \mathbf{f^t})$, $\deg Q_m^t \leqslant m$

и тригонометрические многочлены $P_j^t(x) = P^t_{n_j,n,\overrightarrow{m}}(x;\mathbf{f^t})$, $\deg P_j^t \leqslant n_j$, $n_j = n+m-m_j$, *чтобы для* $j=1,2,\dots,k$

$$R_j^t(x;\mathbf{f^t})) := Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$

$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \left(\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx\right), \ \ j=1,2,\dots,k, \qquad (2)$$

где $\tilde{a}_l^j$, $\tilde{b}_l^j$ *и коэффициенты* $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ *– действительные числа.*

Очевидно, что многочлены $Q_m^t(x)$, $P_j^t(x)$ условиями (2) определяются не однозначно, а с точностью до числового множителя. На самом деле неединственность может быть и более существенной.

Определение 1. *Будем говорить, что задача имеет единственное решение, если для любых двух решений* $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ *и* $(\bar{\bar{Q}}_m^t, \bar{\bar{P}}^t)$ *задачи найдется такое число* λ, *что* $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda\bar{\bar{Q}}_m^t, \lambda\bar{\bar{P}}^t)$.

Определение 2. *Если пара* (Q_m^t, P^t), *где* $P^t = (P_1^t, \dots, P_k^t)$, *является решением задачи, то многочлены* $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, $\dots$, $P_k^t(x)$ *и рациональные дроби*

$$\pi_j^t(x;\mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, \ \ j=1,2,\dots,k,$$

будем называть соответственно тригонометрическими многочленами Эрмита–Паде и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита–Паде для мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$ *и системы* $\mathbf{f^t}$.

Если задача имеет единственное решение, то тригонометрические аппроксимации Эрмита–Паде $\left\{\pi_j^t(x;\mathbf{f^t})\right\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. Достаточное условие единственности решения задачи в случае $k=1$ найдено в работе [2]. При выполнении этого условия в [2] получены явные детерминантные формулы для многочленов $Q_m^t(x)$, $P_1^t(x)$, аналогичные известным формулам Г. Фробениуса (см. [3]) для многочленов Паде степенного ряда. Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий, при которых поставленная задача имеет единственное решение.

Запишем ряды (1) и полиномы $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \ \ j=1,2,\dots,k;$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx}, \ \ P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, \ \ j=1,2,\dots,k,$$

где $u_p, v_p^j \in \mathbb{C}$, $c_0^j = \dfrac{a_0^j}{2}$, $c_l^j = \dfrac{a_l^j - ib_l^j}{2}$, $c_{-l}^j = \bar{c}_l^j$, $j = 1, 2, \dots, k$; $l = 1, 2, \dots$. Тогда равенства (2) примут вид

$$R_j^t(x; \mathbf{f^t}) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \left(\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx} \right), \ \ j = 1, 2, \dots, k.$$

Определим матрицы и определители, элементы которых являются коэффициентами тригонометрических рядов $f_j^t(x)$. Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j = \left(c_{l+m}^j \ c_{l+m-1}^j \dots c_{l+1}^j \ c_l^j \ c_{l-1}^j \dots c_{l-m+1}^j \ c_{l-m}^j \right), \ j = 1, 2, \dots, k,$$

а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) = \left(e^{-imx} \ e^{-i(m-1)x} \dots e^{-ix} \ 1 \ e^{ix} \dots e^{i(m-1)x} \ e^{imx} \right).$$

Для $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\overrightarrow{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \cdots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \cdots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \cdots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \overrightarrow{m}; x) := \det \left[F_+^k \ \dots \ F_+^2 \ F_+^1 \ E_m^t(x) \ F_-^1 \ F_-^2 \ \dots \ F_-^k \right]^T.$$

Если $m_j = 0$, то считаем, что определитель $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ не содержит блок-матриц $F_\pm^j$. Через $H_{n,\overrightarrow{m}}^t$ обозначим матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \overrightarrow{m}; x)$ после удаления в нём

$(m+1)$-ой строки $E^t_m(x)$. Если в $D(n,\overrightarrow{m};x)$ строку $E^t_m(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}^j_l$, получим новый определитель, который обозначим $d^j_l(n,\overrightarrow{m})$.

Определение 3. *Индекс $(n,\overrightarrow{m}) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$, $\overrightarrow{m} \neq (0,\dots,0)$ будем называть слабо нормальным для системы $\mathbf{f^t}$, если $H^t_{n,\overrightarrow{m}}$ является матрицей полного ранга, т.е. $rank\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$.*

Теорема. *Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $(n,\overrightarrow{m})$, $\overrightarrow{m} \neq (0,\dots,0)$ и системы $\mathbf{f^t}$ задача $\mathbf{A^t}$ имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n,\overrightarrow{m})$ был слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, т.е. $rank\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$.*

Если $rank\, H^t_{n,\overrightarrow{m}} = 2m$, то при подходящем выборе нормирующего множителя для решений задачи справедливы представления:

$$Q^t_m(x) = D(n,\overrightarrow{m};x)\,,$$

$$P^t_j(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d^j_p(n,\overrightarrow{m})e^{ipx}\,,$$

$$R^t_j(x;\mathbf{f^t}) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \left(\, d^j_p(n,\overrightarrow{m})e^{ipx} + d^j_{-p}(n,\overrightarrow{m})e^{-ipx}\,\right),\;\; j=1,2,\dots,k.$$

В теореме предполагается, что мультииндекс $\overrightarrow{m}$ является ненулевым. В случае, если $\overrightarrow{m}=(0,\dots,0)$, то решение задачи очевидно: с точностью до числового множителя $Q^t_m(x)\equiv 1$, а многочлен $P^t_j(x)$ совпадает с n-ой частной суммой тригонометрического ряда $f^t_j(x)$.

Отметим также, что если мультииндекс $(n,\overrightarrow{m})$ является слабо нормальным для $\mathbf{f^t}$, то многочлены $Q^t_m(x), P^t_1(x),\dots,P^t_k(x)$ являются тригонометрическими многочленами с вещественными коэффициентами. Действительно, по предположению коэффициенты рядов (1) являются действительными числами. Поэтому справедливы равенства: $c^j_{-p}=\overline{c}^j_p$, $j=1,2,\dots,k$; $p=1,2,\dots$. В этом случае

$$\overline{D(n,\overrightarrow{m};x)} = D(n,\overrightarrow{m};x),\;\; \overline{d^j_p(n,\overrightarrow{m})} = d^j_{-p}(n,\overrightarrow{m}).$$

Чтобы убедиться в этом достаточно поменять местами равноотстоящие от краёв строки и столбцы соответствующих определителей.

Из представления для $Q^t_m(x)$ следует, что m_j определяет число коэффициентов ряда $f^t_j(x)$, которые учитываются при построении многочлена $Q^t_m(x)$. В частности, если $m_j=0$, то $D(n,\overrightarrow{m};x)$ не содержит блоки $F^j_\pm$ и при построении многочлена $Q^t_m(x)$ тригонометрический ряд $f^t_j(x)$ не учитывается. Например, если $\overrightarrow{m}=(m_1,0,\dots,0)$, то $m=m_1$ и тогда при нахождении $Q^t_m(x)$ учитываются только коэффициенты ряда $f^t_1(x)$. В этом случае представление для $Q_m^t(x)$ в теореме совпадает с формулой, которая получена в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М. : Наука, 1988. 256 с.

[2] *Лабыч Ю. А., Старовойтов А. П.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 7. С. 107–130.

[3] *Бейкер мл. Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения М. : Мир, 1986. 502 с.