

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 18

Саратов

Издательство Саратовского университета

2016

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43
М34

Математика. Механика : сб. науч. тр. – Саратов : Изд-во Сарат.
М34 ун-та, 2016. – Вып. 18. – 160 с. : ил.

Сборник содержит статьи сотрудников и аспирантов механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского. Представлены исследования по алгебре, геометрии, дискретной математике, математическому анализу, спектральной теории операторов, теории приближений, математической экономике, биомеханике, механике деформируемого твёрдого тела, оптимальному управлению движением космического аппарата, механике жидкости и газа и их приложениям.

Для научных работников, аспирантов и специалистов в области математики и механики.

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я :

Г. В. Хромова, доктор физ.-мат. наук (отв. редактор),
Ю. А. Блинков, доктор физ.-мат. наук (зам. отв. редактора),
Д. В. Прохоров, доктор физ.-мат. наук,
А. П. Хромов, доктор физ.-мат. наук,
Г. Н. Белосточный, доктор техн. наук,
Ю. В. Матвеева, канд. физ.-мат. наук (отв. секретарь)

УДК [51+531]
ББК (22.1+22.2)я43

Работа издана в авторской редакции

УДК 519.853

В. В. Абрамова, С. И. Дудов

О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ КОМПАКТА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

Рассматривается конечномерная задача о вложении заданного компакта в наименьшее (по включению) нижнее лебегово множество выпуклой функции. Средствами выпуклого анализа установлен критерий решения задачи. Показано, если функция является максимумом от конечного числа аффинных функций, то задача сводится к задаче линейного программирования.

1. Пусть D – ограниченное замкнутое множество из конечномерного действительного пространства \mathbb{R}^p , а $f(x)$ – выпуклая конечная на \mathbb{R}^p функция. Требуется вложить множество D в нижнее лебегово множество $G(\alpha) = \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \leq \alpha\}$ с наименьшим значением α за счет его смещения, то есть решить задачу

$$\begin{cases} \alpha \longrightarrow \min_{(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{p+1}}, \\ D - x \subset G(\alpha). \end{cases} \quad (1)$$

Задача такого вида возникает при расчете параметров проектируемых устройств [1]. Для корректности и нетривиальности задачи будем предполагать, что множество $G(\alpha^*)$, где $\alpha^* = \min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$, ограничено и

$$G(\alpha^*) -^* D = \{z : z + D \subset G(\alpha^*)\} = \emptyset.$$

Легко видеть, что задача (1) эквивалентна минимаксной задаче

$$\varphi(x) \equiv \max_{y \in D} f(y - x) \longrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (2)$$

При этом если $\varphi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x)$, то пара $(\varphi(x^*), x^*)$ является решением задачи (1).

Нетрудно сделать вывод, что при сделанных предположениях решение задачи (2) существует. Заметим также, задача (2) является обобщением задачи о чебышевском центре множества (случай, когда $f(x)$ – некоторая норма на \mathbb{R}^p).

Цель работы – получить критерий решения задачи (2) и показать, что в случае, когда функция $f(x)$ является максимумом от конечного числа аффинных функций, задача сводится к задаче линейного программирования.

2. Перечислим некоторые очевидные свойства функции $\varphi(x)$, вытекающие из условий, налагаемых на $f(x)$. А именно $\varphi(x)$ является:

- 1) выпуклой конечной функцией;
- 2) строго выпуклой на \mathbb{R}^p , то есть для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$, $\alpha \in (0, 1)$: $\varphi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2)$, если функция $f(x)$ – строго выпукла на \mathbb{R}^p ;
- 3) сильно выпуклой на \mathbb{R}^p , то есть для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$, $\alpha \in [0, 1]$: $\varphi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha\varphi(x_1) + (1 - \alpha)\varphi(x_2) - \frac{\alpha}{2}\alpha(1 - \alpha)\|x_1 - x_2\|^2$, если функция $f(x)$ сильно выпукла на \mathbb{R}^p . Здесь $\alpha > 0$ – параметр сильной выпуклости функции $f(x)$;
- 4) строго квазивыпуклой на \mathbb{R}^p , то есть для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$, $\alpha \in (0, 1)$: $\varphi(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \max\{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}$, если функция $f(x)$ строго квазивыпукла на \mathbb{R}^p ;

Отметим, что в случае 4) (и тем более в случаях 2) и 3)) задача (2), очевидно, имеет единственное решение.

Обозначим через $\bar{A}, \text{int}A, \text{co}A$ соответственно замыкание, внутренность, выпуклую оболочку множества, $\partial f(x)$ – субдифференциал функции $f(x)$ в точке x , $Q^\varphi(x) = \{z \in D : \varphi(x) = f(z - x)\}$, $B(x, r) = \{y : \|x - y\| \leq r\}$, $0_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Теорема 1. 1. Для того чтобы точка x^* была точкой минимума функции $\varphi(x)$ на \mathbb{R}^p , необходимо и достаточно, чтобы

$$0_p \in \text{co}\{\partial f(z - x) : x \in Q^\varphi(x^*)\}. \quad (3)$$

2. Если существует $\delta > 0$ такое, что

$$B(0_p, \delta) \subset \text{co}\{\partial f(z - x) : x \in Q^\varphi(x^*)\}, \quad (4)$$

то

$$\varphi(x) \geq \varphi(x^*) + \delta\|x - x^*\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p. \quad (5)$$

Доказательство. 1) Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям известной в выпуклом анализе теоремы о формуле субдифференциала для функции супремума по параметру (см., например, [2, гл. 2, §3] или [3, §1.17]). В соответствии с этим фактом субдифференциал выпуклой функции $\varphi(x)$ можно выразить формулой:

$$\partial\varphi(x) = \bar{co}\{\partial f(z - x) : x \in Q^\varphi(z)\}. \quad (6)$$

Замкнутость множества $\{\partial f(z - x) : x \in Q^\varphi(z)\}$ очевидным образом следует из замкнутости множества $Q^\varphi(z)$ и свойств субдифференциала. Поэтому знак замыкания в правой части (6) можно снять. Для завершения доказательства справедливости утверждения 1) теоремы осталось заметить, что, как известно (например, [2, гл. 4, §2]),

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \varphi(x) \Leftrightarrow 0_p \in \partial\varphi(x^*).$$

2) Из вышесказанного вытекает, что включение (4) означает $B(0_p, \delta) \subset \partial\varphi(x^*)$. Поэтому в силу определения субдифференциала имеем

$$\varphi(x) - \varphi(x^*) \geq \langle v, x - x^* \rangle, \forall v \in B(0_p, \delta), x \in \mathbb{R}^p.$$

Отсюда при $x \neq x^*$, положив $v = \delta(x - x^*)/\|x - x^*\|$, получаем (5).

3. При разработке метода приближенного решения задачи (2) авторы предполагают использовать базовый случай, когда $f(x)$ является функцией максимума от аффинных функций:

$$f(x) = \max_{i=\overline{1,m}} \{\langle A_i, x \rangle + b_i\}, \quad A_i \in \mathbb{R}^p, b_i \in \mathbb{R}.$$

В этом случае задача (2) принимает вид

$$\varphi(x) \equiv \max_{i=\overline{1,m}} \{c_i + b_i - \langle A_i, x \rangle\} \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (7)$$

где $c_i = \max_{y \in D} \langle A_i, y \rangle$.

Теперь, используя известный прием ([4, с. 244]), нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 2. *Задача (7) эквивалентна задаче линейного программирования*

$$\begin{cases} z \rightarrow \min_{\tilde{x}=(x,z) \in \mathbb{R}^{p+1}}, \\ z - c_i - b_i + \langle A_i, x \rangle \geq 0; \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \quad (8)$$

Причем если $\tilde{x}^* = (x^*, z^*)$ – решение задачи (8), то x^* – решение задачи (7). И наоборот, если x^* – решение задачи (7), то $\tilde{x}^* = (x^*, z^*)$, где $z^* = \max_{i=1,m} \{c_i + b_i - \langle A_i, x^* \rangle\}$, будет решением задачи (8).

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брэйтон Р. К., Хэттел Г. Д., Санджованни–Винчензелли А. Л. Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // Труды Ин-та по электротехнике и радиоэлектронике. 1981. Т. 69, № 10. С. 180–215.
2. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980.
3. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М. : Физмалит, 2004.
4. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1967.

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко, М. А. Кузнецова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Спектральные задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания (см. [1]). В данной статье выведены асимптотические формулы для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде из трёх ребер с потенциалом из класса L^2 . Полученный результат может быть использован для решения обратных задач, состоящих в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Отметим, что обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля на графе исследовались, например, в работе [2], однако многие важные вопросы в этой области до сих пор остаются открытыми.

Рассмотрим граф-звезду Γ с тремя рёбрами. Введём параметризацию таким образом, что длины рёбер равны π , $x_j \in [0, \pi]$, внутренней вершине соответствует $x_j = \pi$, внешним — $x_j = 0$, $j = \overline{1, 3}$.

На графе Γ может быть задана функция $y = [y_i]_{i=1}^3$, её компоненты $y_i \in W_2^2[0, \pi]$. Пусть H — множество таких функций y , удовлетворяющих условиям склейки

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0;$$

$$y_1'(\pi) + y_2'(\pi) + y_3'(\pi) = 0;$$

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = y_3(\pi).$$

На множестве функций H зададим дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля $Ly = [L_j y_j]_{j=1}^3$,

$$L_j y_j = -\frac{d^2 y_j}{dx_j^2} + q_j y_j, \quad j = \overline{1, 3},$$

где q_j — комплекснозначные функции из $L^2[0, \pi]$.

Пусть функции $S_j(x, \lambda)$ являются решениями задачи Коши

$$-y_j''(x) + q_j(x)y_j(x) = \lambda y_j(x), \quad y_j(0) = 0, \quad y_j(\pi) = 1, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Оператор L имеет счётное множество собственных значений, которые совпадают с нулями характеристической функции:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) := S_1'(\pi, \lambda)S_2(\pi, \lambda)S_3(\pi, \lambda) + S_1(\pi, \lambda)S_2'(\pi, \lambda)S_3(\pi, \lambda) + \\ + S_1(\pi, \lambda)S_2(\pi, \lambda)S_3'(\pi, \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Функция $\Delta(\lambda)$ аналитична во всей \mathbb{C} .

Пусть $\omega_j = \int_0^\pi q_j(t) dt$, \mathcal{D} определяется по формуле

$$\mathcal{D} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2} + \frac{(\omega_1 - \omega_3)^2}{2} + \frac{(\omega_2 - \omega_3)^2}{2}.$$

Условимся, что $\alpha = \sqrt{\mathcal{D}}$ — такой квадратный корень, что $\operatorname{Re} \alpha > 0$, либо $\operatorname{Re} \alpha = 0$, $\operatorname{Im} \alpha \geq 0$.

Теорема 1. *Собственные значения оператора L можно обозначить как $\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)}$, $\lambda_k^{(3)}$, $k \in \mathbb{N}$ (с учётом кратностей), таким образом, что справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned} \rho_k^{(1)} &= k - \frac{1}{2} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3}{6\pi k} + \frac{\varkappa_k^{(1)}}{k}, \quad \{\varkappa_k^{(1)}\} \in l^2, \\ \rho_k^{(2)} &= k + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \alpha}{6\pi k} + \frac{\varkappa_k^{(2)}}{k}, \quad \{\varkappa_k^{(2)}\} \in l^2, \\ \rho_k^{(3)} &= k + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \alpha}{6\pi k} + \frac{\varkappa_k^{(3)}}{k}, \quad \{\varkappa_k^{(3)}\} \in l^2, \end{aligned}$$

где $\rho_k^{(j)} = \sqrt{\lambda_k^{(j)}}$, $j = \overline{1, 3}$.

Схема доказательства. Положим $\rho = \sqrt{\lambda}$, $\tau = \operatorname{Im} \rho$, $\operatorname{Re} \rho > 0$, либо $\operatorname{Re} \rho = 0$, $\tau \geq 0$. Используя стандартные асимптотические формулы

$$\rho S_j(x, \lambda) = \sin \rho x + O(e^{|\tau|x} \rho^{-1}), \quad S_j'(x, \lambda) = \cos \rho x + O(e^{|\tau|x} \rho^{-1}),$$

формулу (1) и теорему Руше, получаем следующие соотношения:

$$\rho_k^{(1)} = k - \frac{1}{2} + O(k^{-1}), \quad \rho_k^{(2)} = k + O(k^{-1}), \quad \rho_k^{(3)} = k + O(k^{-1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Уточним полученные оценки. Методом, аналогичным описанному в [3, с. 11–12], можно вывести следующие асимптотические формулы:

$$S_j(x, \lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho^2} \sin \rho t q_j(t) dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \quad (2)$$

$$S'_j(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x \frac{\cos \rho(x-t)}{\rho} \sin \rho t q_j(t) dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right). \quad (3)$$

Подставим в (1) оценки (2), (3) при $\rho_k^{(1)} = k - \frac{1}{2} + \varepsilon_k^{(1)}$, $\rho_k^{(2)} = k + \varepsilon_k^{(2)}$, $\rho_k^{(3)} = k + \varepsilon_k^{(3)}$, $\varepsilon_k^{(j)} = O(k^{-1})$. Тогда

$$-3\pi\varepsilon_k^{(1)} + \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \nu_k^{(1)}}{2k} = 0,$$

$$3(\pi\varepsilon_k^{(s)})^2 - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \mu_k^{(s)}}{k} \pi\varepsilon_k^{(s)} + \frac{\omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_3 + \omega_2\omega_3 + \nu_k^{(s)}}{4k^2} = 0, \quad s = \overline{2, 3}, \quad (4)$$

где $\{\mu_k^{(s)}\}, \{\nu_k^{(j)}\} \in l^2$, $s = \overline{2, 3}$, $j = \overline{1, 3}$. Для $\rho_k^{(1)}$ сразу получаем нужную оценку. Дискриминантом второго уравнения будет $\mathcal{D} + \theta_k^{(s)}$, $\{\theta_k^{(s)}\} \in l^2$. С помощью разложения Тейлора извлечём корень из дискриминанта: $\pm\alpha + O(\theta_k^{(s)})$, $\mathcal{D} \neq 0$. Тогда

$$\varepsilon_k^{(2)} = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \pm \alpha}{6\pi k} + \frac{\varkappa_k^{(2)}}{k}, \quad \varepsilon_k^{(3)} = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \pm \alpha}{6\pi k} + \frac{\varkappa_k^{(3)}}{k}.$$

С помощью теоремы Руше можно доказать, что в $\varepsilon_k^{(2)}$ и $\varepsilon_k^{(3)}$ слагаемое α берётся с разными знаками.

Случай $\mathcal{D} = 0$ рассматривается отдельно с использованием приёма перенормировки: вычтем из q_j число $\frac{b}{\pi}$, $b = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, взамен собственные значения сдвинутся на $\frac{b}{\pi}$. Пусть $\lambda_k^{(2)} - \frac{b}{\pi} = (\tilde{\rho}_k)^2$, тогда из уравнения, аналогичного (4), будет следовать, что $\tilde{\rho}_k = k + \frac{\tilde{\nu}_k}{k}$, $\{\tilde{\nu}_k\} \in l^2$.

С разложением Тейлора это даёт, что $\rho_k^{(2)} = k + \frac{b + \eta_k^{(2)}}{2\pi k}$, $\{\eta_k^{(2)}\} \in l^2$, и оценки теоремы верны независимо от \mathcal{D} .

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 15-01-04864 и № 16-01-00015).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kuchment P.* Graph models for waves in thin structures // *Waves in Random Media.* 2002. Vol. 12, № 4. P. 1–24.
2. *Юрко В. А.* О восстановлении операторов Штурма–Лиувилля на графах // *Мат. заметки.* 2006. Т. 79, № 4. С. 619–630.
3. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.

УДК 501.1

Д. А. Бредихин

О КЛАССАХ ПОЛУРЕШЕТОЧНО И РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППОИДОВ ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Алгеброй отношений называют упорядоченную пару (Φ, Ω) , где Φ – множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1]. Одной из основных задач теории алгебр отношений является изучение многообразий и квазимногообразий, порожденных различными их классами [2–5].

Операции над отношениями могут быть заданы с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Важным классом логических операций является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой* [4,5] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [6]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Отношение теоретико-множественного включения \subset является стабильным относительно диофантовых операций, следовательно, всякая алгебра отношений (Φ, Ω) с диофантовыми операциями может быть рассмотрена как упорядоченная (Φ, Ω, \subset) этим отношением.

Алгебра отношений с одной бинарной операцией образует группоид бинарных отношений. Мотивацию рассмотрения группоидов бинарных отношений и ряд результатов в этом направлении можно найти в работах [7–10].

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – многообразии, порожденные классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

Сосредоточим внимание на следующей бинарной диофантовой операции над отношениями, определяемой следующим образом: для всяких бинарных отношений ρ и σ , определенных на множестве U , положим

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in U \times U : (\exists u, v)(x, u) \in \rho \wedge (u, v) \in \sigma\}.$$

Наряду с указанной операцией мы также рассмотрим теоретико-множественные операции пересечения \cap и объединения \cup отношений. Заметим, что алгебры отношений вида $(\Phi, *, \cap)$ и $(\Phi, *, \cap, \cup)$ могут быть рассмотрены соответственно как полурешеточно и решеточно упорядоченные группоиды бинарных отношений.

Основные полученные результаты формулируются в следующих теоремах, в которых найдены базисы тождеств многообразий, порожденных соответствующими классами группоидов бинарных отношений.

Теорема 1. *Алгебра (A, \cdot, \wedge) типа $(2, 2)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \cap\}$ тогда и только тогда, когда (A, \wedge) – полурешетка и выполняются тождества*

$$\begin{aligned} (x^2y)y &= x^2y \quad (1), & (xy)^2 &= xy \quad (2), & x^2y^2 &= y^2x^2 \quad (3), \\ (x^2y)z &= (x^2z)y \quad (4), & (x^2y^2)z &= x^2(y^2z) \quad (5), & x^2 \wedge y^2 &= x^2y^2 \quad (6), \\ (x \wedge y)z \wedge xz &= (x \wedge y)z \quad (7), & x(y \wedge z) \wedge xy &= x(y \wedge z) \quad (8). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Алгебра (A, \cdot, \vee, \wedge) типа $(2, 2, 2)$ принадлежит многообразию $Var\{*, \cup, \cap\}$ тогда и только тогда, когда (A, \vee, \wedge) – дистрибутивная решетка, выполняются тождества (1) – (6) и тождества*

$$x(y \vee z) = xy \vee xz, \quad (x \vee y)z = xz \vee yz.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. Vol. 4. P. 73–89.
2. Jónsson B. Varieties of relation algebras // Algebra Univers. 1982. Vol. 54. P. 273–299.
3. Andreka H., Bredikhin D. A. The equational theory of union-free algebras of relations // Algebra Univers. 1994. Vol. 33. P. 516–532.
4. Бредихин Д. А. О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
5. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
6. Böner F., Pöschel F. R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.
7. Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. Vol. 44. P. 87–92.

8. Бредихин Д. А. О многообразиях группоидов отношений // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 1, ч. 1. С. 93–98.

9. Бредихин Д. А. О многообразиях группоидов отношений с диофантовыми операциями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 28–34.

10. Bredikhin D. A. On Varieties of Groupoids of Relations with Operation of Binary Cylindrification // Algebra Univers. 2015. Vol. 73. P. 73–89.

УДК 514.76

А. В. Букушева

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ДОПУСТИМОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

На распределении контактного метрического многообразия определяется допустимая симплектическая структура Ω . Находятся условия, при которых полный лифт \vec{v}^c допустимого векторного поля \vec{v} является инфинитезимальным автоморфизмом формы Ω .

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$, с заданной на нем контактной метрической структурой $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$, где φ — тензор типа $(1,1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой. При этом выполняются равенства

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \vec{\xi}, \eta(\vec{\xi}) = 1, \quad (1)$$

$$g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}), \quad (2)$$

$$d\eta(\vec{x}, \vec{y}) = \Phi(\vec{x}, \vec{y}), \quad (3)$$

где $\Phi(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y}) - g(\varphi\vec{x}, \vec{y})$ — фундаментальная форма структуры, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$, $\Gamma(TM)$ — модуль векторных полей на многообразии M .

Многообразие, наделенное контактной метрической структурой, называется контактным метрическим многообразием. Гладкое распределение $D = \ker \eta$ называется распределением контактной метрической структуры.

Из равенств (1)–(3) следует, что $\varphi(\vec{\xi}) = 0$, $\eta \circ \varphi = 0$, $\eta(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{\xi})$, $g(\varphi\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$.

Внутренней линейной связностью ∇ [1] на многообразии с контактной структурой называется отображение $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,
- 2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = f\nabla_{\vec{x}}\vec{y} + (\vec{x}f)\vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D).

В адаптированных координатах коэффициенты Γ_{ab}^c внутренней связности ∇ определяются равенством $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c\vec{e}_c$. Из равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'}\vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, следует формула преобразования для коэффициентов связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'}A_b^{b'}A_c^c\Gamma_{a'b'}^c + A_c^c\vec{e}_aA_b^{c'}$.

Пусть $P : TM \rightarrow D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$. Тензорное поле $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$, где $Q = 1 - P$, называется тензором кривизны Схоутена [1]. Будем называть распределение D распределением нулевой кривизны, если тензор Схоутена обращается в нуль.

На распределении D контактного метрического многообразия M формы [1,2] $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ определяют поле кобазисов, сопряженное к полю базисов $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a})$. Имеет место разложение $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u})$, $HD = Span(\vec{\varepsilon}_a)$.

Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c}, \quad (4)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{ad}^c\partial_{n+c}, \quad (5)$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c}. \quad (6)$$

Определим на распределении допустимую структуру Ω , полагая $\Omega = g_{ab}\Theta^{n+a}\wedge dx^b$. Продолженная почти контактная метрическая структура (см. [2]) представляет собой систему $(\tilde{D}, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$, где $G(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y})$, $G(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = G(\vec{x}^v, \vec{y}^h) = G(\vec{x}^h, \vec{u}) = G(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0$, $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$.

Имеет место

Теорема 1. *Если распределение D контактной метрической структуры является распределением нулевой кривизны, то Ω — симплектическая форма.*

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} 3d\Omega(\vec{\varepsilon}_A, \vec{\varepsilon}_B, \vec{\varepsilon}_C) &= \vec{\varepsilon}_A\Omega(\vec{\varepsilon}_B, \vec{\varepsilon}_C) + \vec{\varepsilon}_B\Omega(\vec{\varepsilon}_C, \vec{\varepsilon}_A) + \vec{\varepsilon}_C\Omega(\vec{\varepsilon}_A, \vec{\varepsilon}_B) - \\ &- \Omega([\vec{\varepsilon}_A, \vec{\varepsilon}_B], \vec{\varepsilon}_C) - \Omega([\vec{\varepsilon}_B, \vec{\varepsilon}_C], \vec{\varepsilon}_A) - \Omega([\vec{\varepsilon}_C, \vec{\varepsilon}_A], \vec{\varepsilon}_B), \end{aligned}$$

где $(\vec{\varepsilon}_A) = (\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n)$. Расписывая это равенство для разных значений индексов, получаем, в частности $3d\Omega(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) = -\Omega(R_{ba}^e \partial_{n+e}, \vec{\varepsilon}_c) - \Omega(R_{cb}^{n+e} \partial_{n+e}, \vec{\varepsilon}_a) - \Omega(R_{ac}^e \partial_{n+e}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}(R_{ba}^e g_{ec} + R_{cb}^{n+e} g_{ea} + R_{ac}^e g_{eb})$, где $R_{bc}^{n+a} = R_{bcd}^a x^{n+d}$. Теорема доказана.

Контактная структура называется К-контактной, если $L_{\xi}g = 0$.

Теорема 2. *Если контактная структура $(M, \varphi, \xi, \eta, g, D)$ является К-контактной структурой, то связность Леви-Чивита метрики G совместима со структурой Ω .*

Будем искать инфинитезимальные преобразования структуры Ω , являющиеся полными лифтами векторных полей на базе. Пусть \vec{v} — допустимое векторное поле на многообразии M . Поставим в соответствие полю \vec{v} его полный лифт $\vec{v}^c = v^a \vec{\varepsilon}_a + x^{n+b} \vec{\varepsilon}_b v^a \partial_{n+a}$.

Теорема 3. *Для того чтобы полный лифт \vec{v}^c векторного поля \vec{v} был инфинитезимальным автоморфизмом формы Ω , необходимо и достаточно, чтобы векторное поле \vec{v} было инфинитезимальным движением метрики g .*

Доказательство. Распишем уравнения $L_{\vec{v}^c}\Omega = 0$, используя адаптированные координаты и структурные уравнения (4)–(6). В результате получается система уравнений, эквивалентная системе $L_{\vec{v}}g = 0$, что и доказывает теорему.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
2. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Мат. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.

УДК 517.518.8

И. Ю. Выгодчикова, Ю. А. Завражнов

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ДИАПАЗОНАМИ

Целью статьи является демонстрация применения критерия равномерного приближения для аппроксимации многозначного динамического ряда алгебраическим полиномом, создание эффективного с точки зрения доступности аппаратно-программной реализации в реальном режиме времени алгоритма.

1. Предварительные сведения. Пусть на сетке $T = \{t_0 < \dots < t_N\}$ заданы границы диапазонов значений многозначного ряда, к примеру, цена открытия и цена закрытия торгов, причём соотношения между ними могут быть произвольными: $y_{2,k}, y_{1,k}, k = \overline{0, N}$ (случай $y_{2,k} \geq y_{1,k}$ рассмотрен в [1]). Пусть $n \geq 0$ – целое число, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{k \in \overline{0, N}} \max \{y_{2,k} - p_n(A, t_k); p_n(A, t_k) - y_{1,k}\} \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}. \quad (1)$$

Базисом назовём множество $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$. Амплитудными назовём функции, определяемые формулами:

$$\varphi_{1-i}(\sigma, k) = \begin{cases} iy_{2,j_k} + (1-i)y_{1,j_k}, & k - \text{чётно}, \\ iy_{1,j_k} + (1-i)y_{2,j_k}, & k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad k = \overline{0, n+1}, \quad i = \overline{0, 1}.$$

Применяя для амплитудных функций чебышевскую интерполяцию [2, с. 14], получаем числа $h_0(\sigma)$ и $h_1(\sigma)$ и векторы $A^0(\sigma), A^1(\sigma) \in R^{n+1}$, определяемые из соотношений ($i = 0, 1$):

$$h_i(\sigma) = \begin{cases} y_{2,j_k} - p_n(A^0(\sigma), t_{j_k}), & \text{если } (k+i) - \text{чётно}, \\ -y_{1,j_k} + p_n(A^1(\sigma), t_{j_k}), & \text{если } (k+i) - \text{нечётно}, \end{cases} \quad k = \overline{0, n+1}.$$

Положим

$$m = 0.5 \max_{k \in \overline{0, N}} (y_{2,k} - y_{1,k}).$$

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие решения). Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: (а) $\rho(A^*) = m$; (б) для некоторого базиса $\sigma \subset T$ для $i = 0$ или $i = 1$ выполняются соотношения $\rho(A^*) = h_i(\sigma)$ при $A^* = A^i(\sigma)$.

Теорема 2 (критерий единственности решения). Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (б) теоремы 1 или условие (а) с требованием существования во множестве

$$M = \{t_k \in T : y_{2,k} - y_{1,k} = 2m\}$$

не менее чем $(n+1)$ элементов.

Обозначим

$$\mu = 0.5 \min_{k \in \overline{0, N}} (y_{2,k} - y_{1,k}).$$

Преобразуем целевую функцию задачи (1), вычитая величину μ :

$$\rho(A) - \mu = \max_{k \in \overline{0, N}} \max \{ (y_{2,k} - \mu) - p_n(A, t_k);$$

$$p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + \mu) \rightarrow \min_{A \in R^{n+1}}.$$

Обозначим $\tilde{y}_{2,k} = y_{2,k} - \mu$, $\tilde{y}_{1,k} = y_{1,k} + \mu$. Имеем $\tilde{y}_{2,k} \geq \tilde{y}_{1,k}$, $k = \overline{0, N}$. Тогда утверждения теорем 1 и 2 несложно получить после применения утверждений из [1] к диапазонам $[\tilde{y}_{2,k}; \tilde{y}_{1,k}]$. При неединственности решения задачи разработан метод отыскания крайних точек множества решений [3]. Далее предполагаем, что выполняется условие (б) теоремы 1, тогда имеет место эквивалентность решения задачи (3) и задачи П. Л. Чебышёва для определённого базиса и амплитудной функции.

2. Алгоритм. Алгоритм решения задачи (1) состоит в последовательной смене базиса и осуществлению решения задач П. Л. Чебышёва для амплитудных функций до тех пор, пока не будет достигнуто решение, удовлетворяющее условию (б) теоремы 1. В ситуации невозможности перехода производится анализ решения с использованием условия (б) теоремы 2, в противном случае делается вывод о неединственности решения и производится поиск крайней точки (см. [3]). Рассмотрим подробнее алгоритм решения задачи для линейного полинома. Имеем $A = (a_0, a_1)$.

Предполагаем, что решение единственно и совпадает с решением задачи Чебышёва для некоторой амплитудной функции.

Берём произвольно базис $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < t_{j_2}\} \subset T$ и получаем коэффициенты полиномов Чебышёва (см. [2, с. 14]): $y_{2,j_0}, y_{1,j_1}, y_{2,j_2} \sim a_0^0, a_1^0$, $y_{1,j_0}, y_{2,j_1}, y_{1,j_2} \sim a_0^1, a_1^1$. Вычисляем значения:

$$a_1^0 = \frac{y_{2,j_2} - y_{2,j_0}}{t_{j_2} - t_{j_0}}, a_0^0 = \frac{1}{2}(y_{2,j_0} + y_{1,j_1} - a_1^0(t_{j_0} + t_{j_1})), h_0 = y_{2,j_0} - a_0^0 - a_1^0 t_{j_0},$$

$$a_1^1 = \frac{y_{1,j_2} - y_{1,j_0}}{t_{j_2} - t_{j_0}}, a_0^1 = \frac{1}{2}(y_{1,j_0} + y_{2,j_1} - a_1^1(t_{j_0} + t_{j_1})), h_1 = a_0^1 + a_1^1 t_{j_0} - y_{1,j_0}.$$

Пусть $\max\{h_0, h_1\} = h_\beta$, где $\beta = 0$ или $\beta = 1$. Если для всех $k = 0, \dots, N$ выполняются неравенства $a_0^\beta + a_1^\beta t_k - y_{1,k} \leq h_\beta$, $y_{2,k} - a_0^\beta - a_1^\beta t_k \leq h_\beta$, то алгоритм завершается, в противном случае повторяем процедуру для нового базиса. На выходе получаем единственное решение (a_0^β, a_1^β) .

3. Вычислительные эксперименты

1) Проведём сопоставление решения задачи (1) с решением применения задачи Чебышёва и метода наименьших квадратов (МНК) для ряда из середин диапазонов. Результаты указывают на высокое качество аппроксимации по модели (1), (рис. 1).

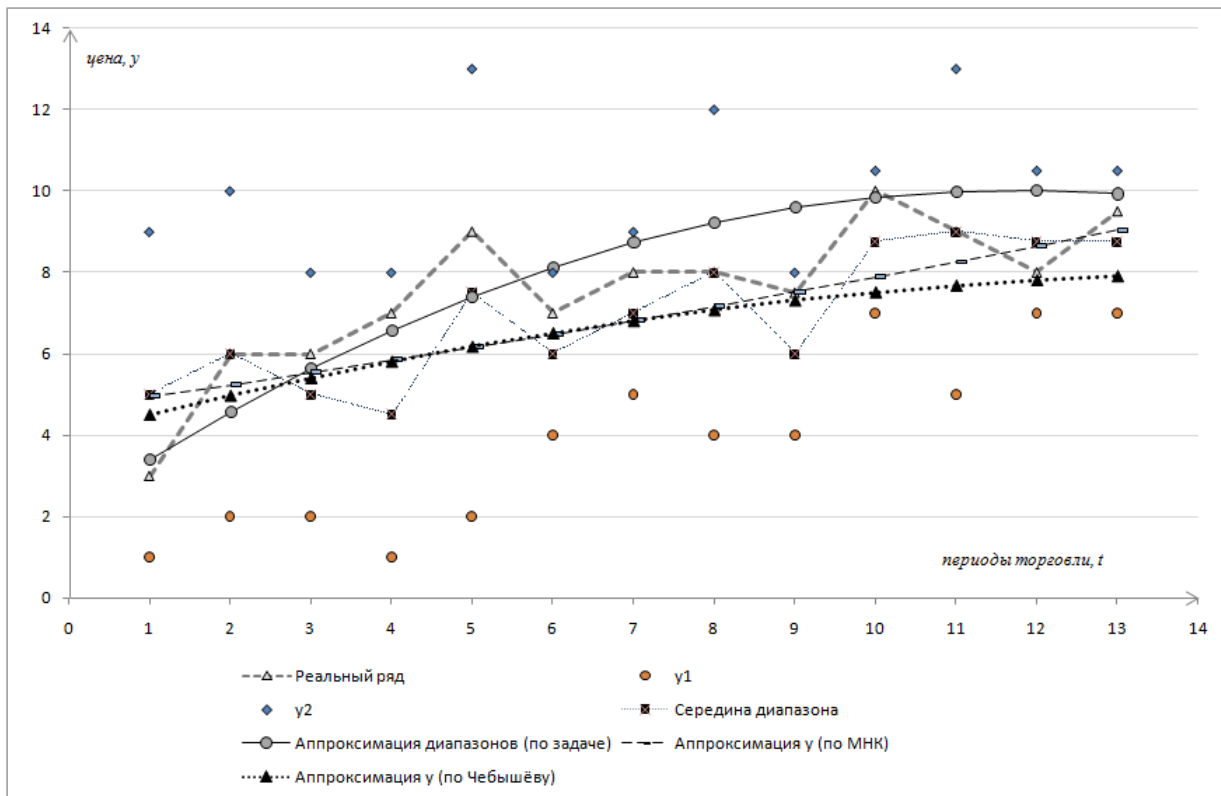


Рис. 1. Анализ качества аппроксимации различными методами, $n=2$

2) Приведём анализ решения задачи с учётом различных ситуаций, когда $y_{2,k} < y_{1,k}$ (чёрная свеча в третьем периоде торгов), (рис. 2). Получена коррекция тенденции в сторону снижения, что вполне логично.

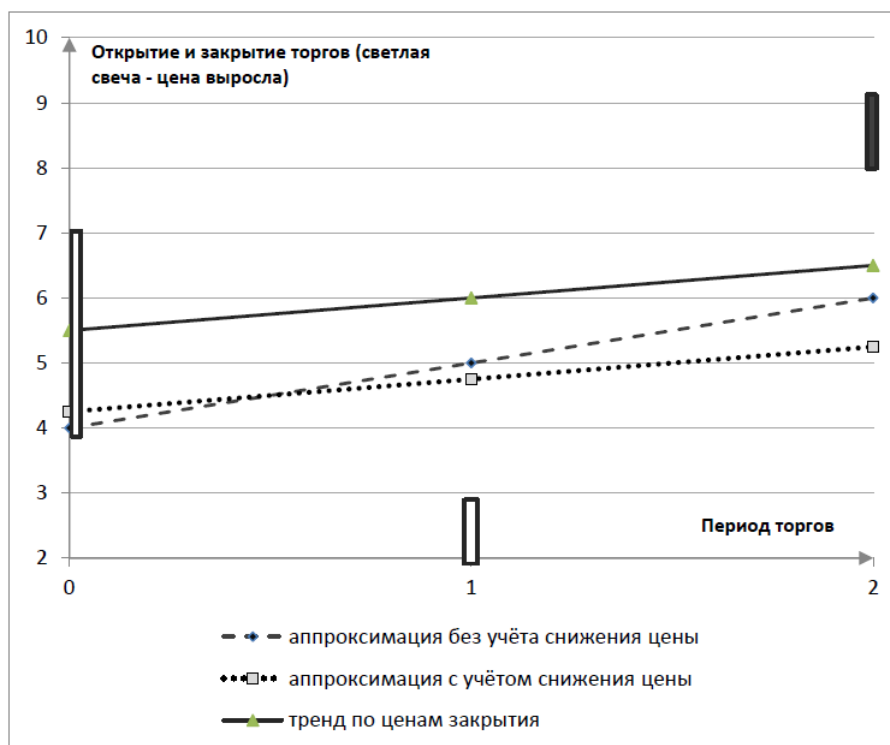


Рис. 2. Анализ ситуации скручивания, $n=1$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-06-00582).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, № 1–2. С. 11–19.
2. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 15–18.

УДК 514.76

С. В. Галаев

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ K-КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Вводится понятие геодезического преобразования почти контактной метрической структуры. Доказывается, что если K -контактные метрические структуры связаны геодезическим преобразованием, то соответствующие им внутренние связности находятся в проективном соответствии.

1. Значительный вклад в развитие теории геодезических отображений псевдоримановых многообразий, наделенных дополнительными структурами, внесен В. Ф. Кириченко и его учениками (см., например, [1, 2]). В работе [1] введено понятие контактно-геодезического преобразования почти контактной метрической структуры как геодезического преобразования, сохраняющего почти контактную структуру. А именно почти контактная метрическая структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ называется полученной контактно-геодезическим преобразованием из почти контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, если псевдориманова структура (M, \tilde{g}) находится в проективном соответствии с псевдоримановой структурой (M, g) . В настоящей работе контактно-геодезическому преобразованию сопоставляется более общее преобразование, названное нами геодезическим преобразованием почти контактной метрической структуры.

Понятие проективного изменения связности неголономного многообразия введено В. В. Вагнером в [3]. Полученные результаты В. В. Вагнер использовал при исследовании механической системы с неинтегрируемой

линейной связью [4]. Введенное в работе понятие геодезического преобразования почти контактного метрического многообразия тесно связано с понятием геодезического преобразования внутренней связности почти контактной метрической структуры. Вопросы, связанные с исследованием внутренних связностей и их продолжений, рассматривались в работах [5–7].

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geq 1$. Будем говорить, что заданные на многообразии M почти контактные метрические структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ находятся в проективном соответствии (связаны геодезическим преобразованием), если они имеют общие геодезические. Пусть $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = n - 1$) — коэффициенты связности Леви–Чивита метрических тензоров \tilde{g} и g , заданные в адаптированной системе координат (см. [1]). Хорошо известно, что для коэффициентов, находящихся в проективном соответствии связностей, выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + \delta_{\beta\gamma}^\alpha p_\gamma + \delta_\gamma^\alpha p_\beta, \quad (1)$$

где p_c — некоторый ковектор.

Внутренней линейной связностью ∇ (см. [5]) на многообразии с почти контактной структурой называется отображение

$$\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,
- 2) $\nabla_{\vec{x}}f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,
- 3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Со всякой почти контактной метрической структурой ассоциируется внутренняя связность, коэффициенты которой в адаптированной системе координат имеют следующий вид [3;5]: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. При этом допустимые геодезические определяются уравнениями

$$\frac{d^2x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0, \quad \frac{dx^n}{dt} = -\Gamma_a^n \frac{dx^a}{dt}.$$

Известно (см. [3]), что почти контактные структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ имеют общие допустимые геодезические тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \delta_b^a q_c + \delta_c^a q_b, \quad (2)$$

где q_c — допустимый ковектор.

2. Пусть ∇ — связность Леви–Чивита, ассоциированная с контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$. Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. (см. [5]) *Коэффициенты связности Леви–Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab}$, $\Gamma_{an}^b = \Gamma_{na}^b = C_a^b - \varphi_a^b$, $\Gamma_{n\alpha}^n = \Gamma_{nn}^\alpha = 0$.*

Для К-контактных метрических многообразий [5] выражения для коэффициентов связности Леви–Чивита имеют более простой вид: $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$, $\Gamma_{ab}^n = \omega_{ba}$, $\Gamma_{an}^b = \Gamma_{na}^b = -\varphi_a^b$, $\Gamma_{n\alpha}^n = \Gamma_{nn}^\alpha = 0$.

Теорема 2. *Если К-контактные метрические структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, $(M, \vec{\xi}, \eta, \tilde{\varphi}, \tilde{g}, D)$ находятся в проективном соответствии, то они имеют общие допустимые геодезические.*

Доказательство. Полагая в равенстве (1) $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = n$, получим $\tilde{\varphi}_b^a = -\varphi_b^a + \delta_b^a p_n$. Сворачивая последнее равенство по индексам a, b , получаем $0 = 2tp_n$, откуда заключаем, что $p_n = 0$. Таким образом, p — допустимый ковектор и, тем самым, выполняется равенство (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н. Контактные геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 2. С. 209–219.
2. Кириченко В. Ф., Полькина Е. А. Геодезическая жесткость некоторых классов почти контактных метрических многообразий // Изв. вузов. Сер. Математика. 2007. № 9. С. 42–49.
3. Вагнер В. В. Геометрия $(n - 1)$ -мерного неголономного многообразия в n -мерном пространстве // Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та. 1941. № 5. С. 173–255.
4. Вагнер В. В. Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 301–327.
5. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
6. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Мат. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.
7. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.

О ГЕОМЕТРИИ КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С МЕТРИКОЙ САСАКИ

На кораспределении D^* контактной метрической структуры $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ определяется новая почти контактная метрическая структура, называемая продолженной почти контактной метрической структурой. Исследуются свойства полученной структуры.

Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$ с заданной на нем контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ [1–3]. В работе [1] с помощью внутренней и N -продолженной связностей на распределении D была определена почти контактная метрическая структура, названная в работе продолженной почти контактной метрической структурой. В настоящей статье понятие продолженной почти контактной метрической структуры рассматривается применительно к кораспределению D^* . Кораспределение D^* образовано всеми допустимыми 1-формами: $\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi})$. Введем на кораспределении D^* структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ (см. [1, 2]) $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n - 1)$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, p_a)$ на многообразии D^* , где p_a — координаты допустимого ковектора в кобазисе $(dx^a, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$, сопряженном базису $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n, \partial_n)$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Пусть, далее, Γ_{ab}^c — коэффициенты внутренней связности ∇ (см. [1]).

Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$ и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^a$, векторные поля $\vec{x}^h = x^a \vec{e}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n + p_b \Gamma_{ac}^b \partial^c$, $\partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}$. На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*, π, M) , где $\pi : D^* \rightarrow M$ — естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \text{Span}(\varepsilon_a)$, $V = \text{Span}(\partial^a)$. Определим на пространстве D^* метрический тензор G , полагая $G(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = G(\partial^a, \partial^b) g_{ab}$, $G(\partial_n \partial_n) = 1$, $G(\varepsilon_a, \partial^b) = G(\varepsilon_a, \partial_n) = G(\partial^a, \partial_n) = 0$ и допустимую почти комплексную структуру J , таким образом, что $J(\varepsilon_a) = \partial^a$, $J(\partial^a) = -\varepsilon_a$, $J(\partial_n) = \vec{0}$. Проводя необходимые вычисления, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ является почти контактной метрической структурой.

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой.

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\varepsilon_a, \varepsilon_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{bae}^c \partial^e,$$

$$[\varepsilon_a, \partial^b] = -\Gamma_{ac}^b \partial^c,$$

$$[\varepsilon_a, \partial_n] = -p_b \partial_n \Gamma_{ac}^b \partial^c.$$

Здесь $R_{abc}^d = \vec{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{a|e|}^d \Gamma_{b]c}^e$ — компоненты тензора Схоутена (см. [1]):

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}].$$

Почти контактная метрическая структура называется почти нормальной (см. [1]), если $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi}$, где $N_\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = [\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}] + \varphi^2[\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\varphi\vec{x}, \vec{y}] - \varphi[\vec{x}, \varphi\vec{y}]$ — тензор Нейенхейса эндоморфизма φ .

Воспользовавшись структурными уравнениями, получаем выражения для компонент тензора Нейенхейса эндоморфизма J :

$$N_J(\varepsilon_a, \varepsilon_b) = p_c R_{bae}^c \partial^e,$$

$$N_J(\partial^a, \partial^b) = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{bae}^c \partial^e.$$

Полученные выражения используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, J, G, \tilde{D})$ почти нормальна тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Мат. заметки СВФУ. 2015. Вып. 1. С. 25–34.
2. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Сер. Математика. 2013. № 4. С. 1–9.
3. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. № 17(214), вып. 40. С. 20–24.

СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ И ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ САСА–МИРАКЬЯНА

Рассматриваются последовательности p -х производных операторов Саса–Миракьяна к p -й производной функции для $p \in \mathbb{N}$ и $p \in [0; 1]$ и находится порядок приближения в терминах модуля непрерывности.

В теории линейных операторов хорошо известны операторы Саса–Миракьяна [1, 2]:

$$M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx} \quad (x \geq 0). \quad (1)$$

Из теорем П. П. Коровкина [3] следует, что последовательность операторов $M_n(f; x)$ сходится к $f(x)$ для любой непрерывной функции f , причем

$$\left| M_n(f; x) - f(x) \right| \leq (1+x) \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (2)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции f .

Обозначим

$$M_n^{(p)}(f; x) = \frac{d^p}{dx^p} M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} (x^k e^{-nx})^{(p)} \quad (p \in \mathbb{N}, x \geq 0). \quad (3)$$

В работе [4] рассмотрен вопрос о сходимости последовательности $M_n^{(p)}(f; x)$ к $f^{(p)}$ для различных классов функций. Рассмотрим функции, имеющие p -ю непрерывную производную, множество которых обозначим C^p . Для дальнейшего нам понадобится оценка порядка сходимости операторов (3) не в той формулировке, которая приведена в указанной статье, а в терминах модуля непрерывности. Поэтому сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Для функции $f \in C^p$, $p \in \mathbb{N}$, при $x \geq 0$ $M_n^{(p)}(f; x) \rightarrow f^{(p)}(x)$, причем

$$\left| M_n^{(p)}(f; x) - f^{(p)}(x) \right| \leq \left(1 + x + \frac{p^2}{n}\right) \omega\left(f^{(p)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (4)$$

где $\omega(f; h)$ – модуль непрерывности функции f .

Доказательство строится по следующей схеме. По индукции доказывается представление

$$M_n^{(p)}(f; x) = n^p \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^p p_i f \left(\frac{k+i}{n} \right) (-1)^{p-i} \right] \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}.$$

Откуда, используя свойства k -х разделенных разностей (см., например, [4]) и свойства операторов $M_n(f; x)$, получим утверждение теоремы.

Рассмотрим

$$D^\alpha M_n(f; x) = \frac{d^p}{dx^p} M_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f \left(\frac{k}{n} \right) \frac{n^k}{k!} D^\alpha (x^k e^{-nx}) \quad (5)$$

$$(\alpha \in (0; 1), x \geq 0),$$

где $D^\alpha(y) = (D^\alpha y)x = (D_{0+}^\alpha y)x$ – левосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля (см., например, [5]).

Теорема 2. Для функции $f \in C^1$ имеют место представления

$$D^\alpha M_n(f; x) = \frac{f(0)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] \frac{(nx)^{k+1} \Phi(k+1, k+2-\alpha, -nx)}{\Gamma(k+2-\alpha) x^\alpha}, \quad (6)$$

$$D^\alpha M_n(f; x) = \frac{f(0)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] \frac{\varphi^{(k)}(z)}{k!} \frac{(-z)^k}{x^\alpha \Gamma(2-\alpha)}, \quad (7)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция, $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция (см., например, [6] 3.383), $\varphi(z) = \Phi(1, 2-\alpha, z)$, $z = -nx$.

Доказательство. Для абсолютно непрерывной функции имеет место представление (см. [5]):

$$(D^\alpha y)x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(0)}{x^\alpha} + \int_0^x \frac{y'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right], \quad (8)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} & D^\alpha M_n(f; x) = \\ & = \frac{f(0)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[f \left(\frac{k+1}{n} \right) - f \left(\frac{k}{n} \right) \right] \frac{n^{k+1}}{k! \Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{t^k e^{-nx}}{(x-t)^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для интеграла через функцию Φ (см. [6, 9.213]), получим (6).

Так как (см. [6, 9.213])

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(\alpha, \gamma, z)}{dz} &= \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^k \Phi(\alpha, \gamma, z)}{d^k z} &= \frac{\alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + k - 1)}{\gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + k - 1)} \Phi(\alpha + k, \gamma + k, z) \end{aligned}$$

и после несложных преобразований из (6) получим (7).

Следствия. Так как $(D^\alpha t^k)x = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{k-\alpha}$, то из (6), (7) \Rightarrow

$$\Rightarrow D^\alpha M_n(1; x) = \frac{1}{x^\alpha \Gamma(1 - \alpha)} = (D^\alpha 1)x, \quad (9)$$

$$D^\alpha M_n(t; x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} = (D^\alpha t)x, \quad (10)$$

$$D^\alpha M_n(t^2; x) = \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} + \frac{1}{n} \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \rightarrow (D^\alpha 1)x. \quad (11)$$

Равенства (9–11) аналогичны условиям теоремы Коровкина, но, как видно из теоремы 2, $D^\alpha M_n(f; x)$ не являются положительными операторами, поэтому теорема Коровкина не может быть применена для доказательства сходимости последовательности операторов (5).

Теорема 3. Для $f \in C^1$, $0 < \alpha < 1$, $D^\alpha M_n(f; x) \rightarrow (D^\alpha f)x$, причем

$$\left| D^\alpha M_n(f; x) - (D^\alpha f)x \right| \leq \omega \left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \right].$$

Доказательство. Из представления (8) и теоремы 1 находим:

$$\begin{aligned} \left| D^\alpha M_n(f; x) - (D^\alpha f)x \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{|M'_n(f; t) - f'(t)|}{(x - t)^\alpha} dt \leq \\ &\leq \frac{\omega \left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{(1 + t + 1/n)}{(x - t)^\alpha} dt. \end{aligned}$$

Откуда, вычислив интеграл, получим требуемое.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Миракьян Г. М. Аппроксимирование непрерывных функций с помощью полиномов $e^{-nx} \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k$ // Докл. АН СССР. 1941. Т. 31. С. 201–205.

2. Szasz O. Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval // J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B. 1950. Vol. 45. P. 239–245.

3. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М. : Наука, 1959. 212 с.

4. Xiehua Sun. On the simultaneous approximation of functions and their derivatives by the Szasz–Mirakyan operator // J. of Approximation Theory. 1988. Vol. 55, iss. 3. December. P. 279–288.

5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.

6. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1951.

УДК 517.984

М. Ю. Игнатъев

О ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

В работе рассматривается пучок дифференциальных операторов, заданный на простейшем некомпактном графе с циклом. Получена теорема единственности решения обратной задачи восстановления коэффициентов пучка на луче по заданным данным рассеяния.

Пусть G – геометрический граф с вершиной v_1 и ребрами r_0, r_1 , где r_0 – луч с началом в v_1 , r_1 – цикл $[v_1, v_1]$ длины T . Будем считать, что ребро r_0 параметризовано параметром $x_0 \in [0, \infty)$, а r_1 – параметром $x_1 \in [0, T]$. Функцию y на графе G будем трактовать как пару функций $(y_0(x_0), y_1(x_1))$ [1–3].

На каждом из $r_j, j = 0, 1$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y_j'' + (\rho^2 + i\rho p_j(x_j) + q_j(x_j))y_j = 0, \quad (1)$$

где $q_j, p_j \in L(r_j)$, $(1 + x_0)q_0(x_0), (1 + x_0)p_0(x_0) \in L(0, \infty)$.

В вершине v_1 введем следующие стандартные условия склейки:

$$y_0(0) = y_1(0) = y_1(T), \quad y_1'(T) = y_0'(0) + y_1'(0). \quad (2)$$

Обозначим через $C_j(x_j, \rho), S_j(x_j, \rho)$ решения уравнений (1) с начальными условиями типа косинуса и синуса соответственно, через $e_0(x_0, \rho)$ – решение Йоста на ребре r_0 , нормированное асимптотикой:

$$e_0(x_0, \rho) = \exp(\pm(i\rho x_0 - Q_0(x_0))(1 + o(1))), \quad \rho \in \bar{\Omega}_\pm, \quad x_0 \rightarrow \infty,$$

где

$$Q_j(x_j) = \frac{1}{2} \int_0^{x_j} p_j(t) dt.$$

Определим *решение типа Вейля* $\psi(x, \rho) = (\psi_0(x_0, \rho), \psi_1(x_1, \rho))$ как решение уравнения (1) при $j = 0, 1$ соответственно, $\rho \in \Omega_{\pm} := \{\pm \operatorname{Im} \rho > 0\}$, удовлетворяющее условиям склейки (2), нормированное асимптотикой:

$$\psi_0(x_0, \rho) = \exp(\mp(i\rho x_0 - Q_0(x_0))(1 + o(1))), \quad \rho \in \Omega_{\pm}, \quad x_0 \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. $\psi_0(x_0, \rho)$ голоморфна в $\Omega_+ \cup \Omega_- \setminus (Z \cup \{0\})$, где Z – не более чем счетное множество, совпадающее с множеством нулей функции

$$\Delta(\rho) = (\Delta_1(\rho)e_0(0, \rho) + S_1(T, \rho)e_0'(0, \rho))e_0(0, \rho),$$

где $\Delta_1(\rho) := 2 - C_1(T, \rho) - S_1'(T, \rho)$.

По построению функция $\Delta(\rho)$ при всех вещественных ρ имеет предельные значения

$$\Delta_{\pm}(\rho) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Delta(\rho \pm i\varepsilon).$$

Условие G_0 . При всех вещественных ρ $\Delta_{\pm}(\rho) \neq 0$.

При выполнении условия G для всех вещественных $\rho \neq 0$ существуют предельные значения $\psi_0^{\pm}(x_0, \rho) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_0(x_0, \rho \pm i\varepsilon)$.

При $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$, справедливы разложения

$$\psi_0^{\pm}(x_0, \rho) = e_0^{\mp}(x_0, \rho) + s_{\pm}(\rho)e^{\pm}(x_0, \rho).$$

Коэффициенты $s_{\pm}(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, будем называть *коэффициентами отражения*.

Условие G_1 . Все нули $\Delta(\rho)$ простые.

Теорема 2. При выполнении условий G_0, G_1 для любого $\rho_0 \in Z$ справедливо представление

$$\operatorname{Res}_{\rho=\rho_0} \psi_0(x_0, \rho) = \alpha(\rho_0)e_0(x_0, \rho_0),$$

где $\alpha(\rho_0)$ – некоторые константы.

Константы $\alpha(\rho_0), \rho_0 \in Z$, являются аналогами весовых чисел в классической теории рассеяния.

Набор $J = \{s_{\pm}(\rho), \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; Z; \alpha(\rho_0), \rho_0 \in Z\}$ назовём *данными рассеяния*.

Наряду с уравнениями (1) с коэффициентами $p_j(\cdot), q_j(\cdot), j = 0, 1$, рассмотрим уравнения того же вида с коэффициентами $\tilde{p}_j(\cdot), \tilde{q}_j(\cdot), j = 0, 1$, при тех же условиях склейки (2). Соответствующие данные рассеяния обозначим \tilde{J} .

Теорема 3. При выполнении условий G_0, G_1 из $\tilde{J} = J$ следует $\tilde{p}_0(x_0) = p_0(x_0), \tilde{q}_0(x_0) = q_0(x_0)$ для п.в. $x_0 \in (0, \infty)$. Таким образом, при выполнении условий G_0, G_1 данные рассеяния однозначно определяют коэффициенты уравнения (1) на луче.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проекты № 16-01-00015, № 15-01-04864).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юрко В. А. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 137–160.
2. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007.
3. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977.

УДК 517.95, 517.984

В. В. Корнев, А. П. Хромов

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, T] \quad (1)$$

при условиях

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Считаем, что $q(x), \varphi(x), f(x, t)$ – комплекснозначные функции, причем $q(x) \in L[0, 1], \varphi(x) \in L_2[0, 1]$. В работе [1] получен следующий результат:

Теорема 1. Если $f(x, t) \in L_2(Q)$, то ряд формального решения задачи (1) – (3) по методу Фурье сходится почти всюду в Q к обобщенному решению этой задачи.

Следующая теорема позволяет перенести этот результат и на случай суммируемой функции $f(x, t)$:

Теорема 2. Если $f(x, t) \in L(Q)$ и $q(x) = \varphi(x) = 0$, то ряд формального решения задачи (1) – (3) по методу Фурье

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \int_0^t \alpha_n(\tau) \sin n\pi x \sin n\pi(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

сходится при $(x, t) \in Q$, и для его суммы справедлива формула

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \Phi(\eta, \tau) d\eta, \quad (5)$$

где $\alpha_n(\tau) = \int_0^1 f(\xi, \tau) \sin n\pi\xi d\xi$, $\Phi(\eta, \tau)$ – 2-периодическая по η на всей оси, нечетная на $[-1, 1]$ и $\Phi(\eta, \tau) = f(\eta, \tau)$ при $\eta \in [0, 1]$.

Доказательство. Преобразуем ряд (4):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \alpha_n(\tau) \left(\frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t - \tau) \right) d\tau = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \alpha_n(\tau) \left(\int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta d\eta \right) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (4) можно записать в виде

$$u(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^t \psi_N(\tau) d\tau, \quad (6)$$

где $\psi_N(\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n(\tau) \sin n\pi\eta \right) d\eta$.

Заметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \sin n\pi\eta \quad (7)$$

есть ряд Фурье функции $\frac{1}{2}\Phi(\eta, \tau)$ по системе $\{\cos n\pi\eta, \sin n\pi\eta\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[-1, 1]$. Тригонометрический ряд Фурье можно интегрировать

почленно [2, с. 123] по любому интервалу $[a, b]$, т.е.

$$\int_a^b \frac{1}{2} \Phi(\eta, \tau) d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\tau) \int_a^b \sin n\pi\eta d\eta.$$

Поэтому почти при всех $\tau \in [0, t]$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \frac{1}{2} \Phi(\eta, \tau) d\eta. \quad (8)$$

Убедимся, что в (6) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Для этого, полагая $a = x - t + \tau$ и $b = x + t - \tau$, преобразуем $\psi_N(\tau)$:

$$\begin{aligned} \psi_N(\tau) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n(\tau) \int_a^b \sin n\pi\eta d\eta = \\ &= \sum_{n=1}^N \alpha_n(\tau) \left(-\frac{1}{n\pi} \right) (\cos n\pi b - \cos n\pi a). \end{aligned} \quad (9)$$

По теореме Лебега об интегрировании тригонометрических рядов Фурье [2, с. 122] ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\alpha_n(\tau)}{n\pi} \right) \cos n\pi\eta$ сходится равномерно на всей оси к функции

$$\Phi_1(\eta, \tau) = \Phi_0(\eta, \tau) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi_0(\xi, \tau) d\xi,$$

где $\Phi_0(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta} \Phi(\xi, \tau) d\xi$.

По формуле Дирихле имеем

$$\sum_{n=1}^N \left(-\frac{\alpha_n(\tau)}{n\pi} \right) \cos n\pi b = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1 \left(\frac{s}{\pi} + b \right) D_N(s) ds, \quad (10)$$

где $D_N(s)$ – ядро Дирихле.

Представляя функцию Φ_1 стандартным образом в виде разности монотонных функций и применяя к интегралу в правой части (10) известную теорему о среднем, из формул (9), (10) с использованием неравен-

ства $\left| \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) ds \right| \leq 2\pi$ получаем оценку

$$|\psi_N(\tau)| \leq C \int_0^1 |f(\xi, \tau)| d\xi, \quad (11)$$

где константа C зависит только от x и t .

Правая часть неравенства (11) является суммируемой на $[0, t]$ функцией от τ . Поэтому из (6) с учетом (8) по теореме Лебега о предельном переходе получаем формулу (5). Теорема доказана.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014 К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Корнев В. В. Смешанная задача для неоднородного волнового уравнения с суммируемым потенциалом // Докл. РАН. 2016. Т. 468, № 5. С. 505–507.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

УДК 517.95, 517.984

О. А. Королева

О СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ РИССА РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой развивающееся направление, начало которого было положено в работах В. А. Стеклова, Е. Гобсона, А. Хаара для случая дифференциального оператора Штурма–Лиувилля и Я. Д. Тамаркина, М. Стоуна для дифференциального оператора произвольного порядка с произвольными краевыми условиями, удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа. М. Стоун показал, что если краевые условия регулярны, то имеет место равносуммируемость на любом отрезке $[a, b] \subseteq (0, 1)$ средних Рисса порядка ζ ($\zeta > 0$)

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \left(1 - \frac{\lambda^4}{r^4}\right)^\zeta R_\lambda f d\lambda, \quad (*)$$

где R_λ – резольвента оператора.

А. П. Гуревич и А. П. Хромов при исследовании суммируемости по Риссу разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегральных операторов вводили в рассмотрение обобщенные средние Рисса следующего вида:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

которые являются обобщением средних Рисса вида (*). В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщенных средних Рисса разложений по с.п.ф. интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. Частный случай такого оператора впервые рассматривался в [1].

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt. \quad (1)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} A_1(x, t) &= A(x, t), \text{ если } \{0 \leq t \leq 1/2 - x, 0 \leq x \leq 1/2\}, \\ A_2(x, t) &= A(x, t), \text{ если } \{1/2 + x \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1/2\}, \\ A_3(x, t) &= A(x, t), \text{ если } \{0 \leq t \leq -1/2 + x, 1/2 \leq x \leq 1\}, \\ A_4(x, t) &= A(x, t), \text{ если } \{3/2 - x \leq t \leq 1, 1/2 \leq x \leq 1\}, \\ A_5(x, t) &= A(x, t), \text{ если } \{1/2 - x \leq t \leq 1/2 + x, 0 \leq x \leq 1/2\} \text{ и} \\ &\{ -1/2 + x \leq t \leq 3/2 - x, 1/2 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Предположим, что $A_i(x, t)$, $i = \overline{1, 5}$ непрерывно-дифференцируемые в своих областях, причем

$$\begin{aligned} A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) &= a, \\ A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) &= b, \\ A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) &= c, \\ A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) &= d, \end{aligned}$$

где a, b, c, d – постоянные.

Рассмотрим следующий оператор:

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x, t)g(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (2)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,
 $B(x, t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A(x, 1/2 - t) & A(x, 1/2 + t) & 0 \\ A(1/2 - x, t) & 0 & 0 & A(1/2 - x, 1 - t) \\ A(1/2 + x, t) & 0 & 0 & A(1/2 + x, 1 - t) \\ 0 & A(1 - x, 1/2 - t) & A(1 - x, 1/2 + t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место теорема

Теорема 1. Если $y = Af$, то $z = Bg$, где $z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y(1/2 - x)$, $z_3(x) = y(1/2 + x)$, $z_4(x) = y(1 - x)$. $g_1(x) = f(x)$, $g_2(x) = f(1/2 - x)$, $g_3(x) = f(1/2 + x)$, $g_4(x) = f(1 - x)$.

Обратно: если $z = Bg$ и $g_1(x) = g_2(1/2 - x)$, $g_3(x) = g_4(1/2 - x)$, то $z_1(x) = z_2(1/2 - x)$, $z_3(x) = z_4(1/2 - x)$ и $y = Af$, где $f(x) = g_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$; $f(x) = g_3(-1/2 + x)$ при $x \in [1/2, 1]$ и $y(x) = z_1(x)$ при $x \in [0, 1/2]$; $y(x) = z_3(-1/2 + x)$ при $x \in [1/2, 1]$.

В [2] также доказаны необходимые и достаточные условия существования оператора B^{-1} . В дальнейшем будем предполагать, что B^{-1} существует.

Также имеет место

Теорема 2. Для оператора B^{-1} справедливо представление

$$B^{-1}z(x) = Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(x, t)z(t) dt, \quad (3)$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t) dt = 0. \quad (4)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $a'_3(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы-функции, каждая компонента матрицы $a(x, t)$ имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x, t)$,

$S = E + \int_0^{\frac{1}{2}} B(0, t)a_1(t) dt$, $T = \int_0^{\frac{1}{2}} B(0, t)a_2(t) dt$ – постоянные матрицы 4×4 .

Получим интегродифференциальную систему для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A . Пусть $z = (E - \lambda B)^{-1}Bg$. Тогда $z - \lambda Bz = Bg$. Отсюда по теореме 2 из (3), (4) получаем

$$Pz'(x) + a_1(x)z(0) + a_2(x)z\left(\frac{1}{2}\right) + a_3(x)z(x) + \tilde{N}z - \lambda z(x) = g(x), \quad (5)$$

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t) dt = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{N}z = \int_0^{\frac{1}{2}} a(x,t)z(t) dt$. Имеет место теорема:

Теорема 3. Если R_λ существует, то $R_\lambda f = v(x)$, где

$$v(x) = z_1(x) \text{ при } x \in [0, \frac{1}{2}], v(x) = z_3\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ при } x \in [\frac{1}{2}, 1], \quad (7)$$

z_1, z_3 – первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (5), (6). Обратно, если λ такое, что однородная краевая задача для (5), (6) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (7).

Лемма 1. При условии $d \neq a, (d+a)^2 - 4bc \neq 0$ матрица $Q = P^{-1}$ подобна диагональной $D = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, причём $\omega_3 = -\omega_2, \omega_4 = -\omega_1, \omega_1 \neq \omega_2$. Пусть матрица Γ такая, что $\Gamma^{-1}P^{-1}\Gamma = D$. Выполним в (5), (6) замену $z = \Gamma\tilde{z}$, получим

$$\tilde{z}'(x) + P_1(x)\tilde{z}(0) + P_2(x)\tilde{z}\left(\frac{1}{2}\right) + P_3(x)\tilde{z}(x) + N\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = m(x), \quad (8)$$

$$M_0\Gamma\tilde{z}(0) + M_1\Gamma\tilde{z}\left(\frac{1}{2}\right) + \Gamma \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)\tilde{z}(t) dt = 0, \quad (9)$$

где $P_i(x) = D\Gamma^{-1}a_i(x)\Gamma, N = D\Gamma^{-1}\tilde{N}\Gamma, m(x) = D\Gamma^{-1}g(x), \Omega(t) = a(t)\Gamma, M_0 = S\Gamma, M_1 = T\Gamma$.

Лемма 2. Существует матрица-функция $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$ с непрерывно-дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x), H_1(x)$, причём $H_0(x)$ невырождена при всех x и диагональная такая, что преобразование $\tilde{z} = H(x, \lambda)v$ приводит систему (8), (9) к виду

$$\begin{aligned} &v'(x) + P_1(x, \lambda)v(0) + P_2(x, \lambda)v\left(\frac{1}{2}\right) + \\ &+ P_3(x, \lambda)v(x) + N_\lambda v(x) - \lambda Dv(x) = m(x, \lambda), \\ U(v) &= M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t, \lambda)v(t)dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему

$$u'(x) = \lambda Du(x) + m(x), \quad (10)$$

$$U_0(w) = M_0 H_0(0)u(0) + M_1 H_0\left(\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \Omega(t)H_0(t)u(t) dt = 0. \quad (11)$$

Будем считать, что $Re\lambda\omega_1 \geq Re\lambda\omega_2 > 0$. Для решения $u(x, \lambda) = R_{0\lambda}m$ системы (10),(11) имеют место формула (25) и оценки (28) в [2].

Пусть $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$ при любых $r > 0$;
- 2) $\exists C > 0$, такая что $|g(\lambda, r)| \leq C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$;
- 3) $g(\lambda, r) \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$ и фиксированном λ ;
- 4) $\exists \beta > 0$, такая что

$$g(\lambda, r) = \begin{cases} O\left(\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)^\beta\right), & -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \\ O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^\beta\right), & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}, \text{ где } \varphi = arg \lambda \omega_2.$$

В качестве обобщённых средних Рисса будем брать интегралы

$$J_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda f = (E - \lambda A)^{-1} A f$ - резольвента Фредгольма.

Теорема 4 (формула остаточного члена). Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[0, 1]$, $f_0(x)$ - непрерывно-дифференцируемая функция на $[0, 1]$, принадлежащая области значения оператора. Тогда, если на окружности $|\lambda| = r$ нет собственных значений оператора A , то

$$\begin{aligned} f(x) - J_r(f, x) &= f(x) - f_0(x) + (1 - g(o, r)) \cdot f_0(x) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) \frac{R_\lambda \varphi_0}{\lambda} d\lambda - J_r(f - f_0, x), \end{aligned}$$

где $f_0 = A\varphi_0$

Теорема 5. Соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда

- а) $f(x) \in C[0, 1]$,
- б) $g(x)$ удовлетворяет (6), то есть

$$Sz(0) + Tz\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} a(t)z(t) dt = 0.$$

Теорема 6. Соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) + J_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \in \overline{\Delta}_A$, где $\overline{\Delta}_A$ – замыкание области значений оператора A .

Следствие. $\overline{\Delta}_A$ состоит из функций, удовлетворяющих условиям а) и б) из теоремы 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.
2. Королева О. А., Хромов А. П. Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 12, № 1. С. 33–50.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОСТЕПЕННЫМ МНОГОШАГОВЫМ УТОЧНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ ПЕРВОГО ИГРОКА О ВЫБОРЕ ВТОРОГО

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками, в которые первый игрок может организовывать обмен информацией между игроками [1–4]. Оптимальные способы организации такого обмена при точном знании первым игроком выбора второго и при наличии ограничений на информированность рассмотрены соответственно в [5] и [6], там же приведены определения иерархической игры, её квазиинформационного расширения и наибольшего гарантированного результата. В данной работе оптимальный способ организации обмена информацией находится для случая постепенного многошагового уточнения информации первого игрока в выборе второго.

Пусть $\Gamma = (X, Y, F, \mu)$ – иерархическая игра. Рассмотрим систему

$$\mathfrak{A} = (\{X_{\alpha_1}\}_{\alpha_1 \in A_1}, \dots, \{X_{\alpha_1 \dots \alpha_i}\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \in A_1 \times \dots \times A_i}, \dots, \{X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A_1 \times \dots \times A_n}, \\ \{Y_{\beta_1}\}_{\beta_1 \in B_1}, \dots, \{Y_{\beta_1 \dots \beta_j}\}_{(\beta_1, \dots, \beta_j) \in B_1 \times \dots \times B_j}, \dots, \{Y_{\beta_1 \dots \beta_n}\}_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in B_1 \times \dots \times B_n}),$$

где $X_{\alpha_1 \dots \alpha_i} \subset X$, $i = 1, \dots, n$, $Y_{\beta_1 \dots \beta_j} \subset Y$, $j = 1, \dots, n$, и верны равенства $X = \cup_{\alpha_1 \in A_1} X_{\alpha_1}$, $X_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}} = \cup_{\alpha_i \in A_i} X_{\alpha_1 \dots \alpha_i}$, $i = 2, \dots, n$, $Y = \cup_{\beta_1 \in B_1} Y_{\beta_1}$, $Y_{\beta_1 \dots \beta_{j-1}} = \cup_{\beta_j \in B_j} Y_{\beta_1 \dots \beta_j}$, $j = 2, \dots, n$.

Эта система определяет игру $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$.

Определение 1. Положим

$$\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}} = (\Phi_1 \times \dots \times \Phi_{n+1}, B_1 \times \Psi_1 \times \dots \times \Psi_n, \bar{F}, \bar{\mu}),$$

где

$$\Phi_1 = A_1^{B_1}, \Phi_i = A_i^{A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times B_1 \times \dots \times B_i}, i = 2, \dots, n,$$

$$\Phi_{n+1} = X^{A_1 \times \dots \times A_n \times Y}, \Psi_1 = B_2^{A_1 \times B_1}, \Psi_i = B_{i+1}^{A_1 \times \dots \times A_i \times B_1 \times \dots \times B_i},$$

$$i = 1, \dots, n-1, \Psi_n = Y^{A_1 \times \dots \times A_n \times B_1 \times \dots \times B_n}, \pi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}, \beta_1, \psi_1, \dots, \psi_n) =$$

$$= (\varphi_{n+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \psi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)), \psi_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)),$$

где

$$\alpha_1 = \varphi_1(\beta_1), \beta_i = \psi_{i-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}), i = 2, \dots, n,$$

$$\alpha_i = \varphi_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_1, \dots, \beta_i), i = 2, \dots, n,$$

$$\bar{F} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}, \beta_1, \psi_1, \dots, \psi_n) = F(\pi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}, \beta_1, \psi_1, \dots, \psi_n)), \text{ при всех}$$

$$\bar{T} \subset \Phi_1 \times \dots \times \Phi_{n+1} \times B_1 \times \Psi_1 \times \dots \times \Psi_n, \quad \pi(\bar{\mu}(\bar{T})) = \mu(\pi(\bar{T})).$$

В игре $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$ обмен информацией о выборах между игроками происходит следующим образом. Сначала второй игрок ограничивает свой выбор подмножеством Y_{β_1} . Затем первый игрок, узнав это ограничение, ограничивает свой выбор подмножеством X_{α_1} . Второй игрок, узнав это, ещё больше ограничивает свой выбор (до $Y_{\beta_1 \beta_2}$), после чего первый игрок, узнав $Y_{\beta_1 \beta_2}$, в свою очередь уточняет своё ограничение (до $X_{\alpha_1 \alpha_2}$) и т. д. Наконец, первый игрок, узнав, что второй игрок ограничился подмножеством $Y_{\beta_1 \dots \beta_n}$, ограничивает свой выбор подмножеством $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, после чего второй игрок, зная $X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, выбирает $y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n}$, а первый игрок, узнав y , выбирает $x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

Определение 2. Будем говорить, что в квазиинформационном расширении $\bar{\Gamma} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{F}, \bar{\mu})$ игры Γ первый игрок имеет самостоятельную информацию о выборе y не больше, чем в $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$, если справедливо условие $\forall \bar{x} \in \bar{X} \forall \beta_1 \in B_1 \exists \alpha_1 \in A_1 \dots \forall \beta_n \in B_n \exists \alpha_n \in A_n \forall y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n} \exists x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \exists \bar{y} \in \bar{Y} \pi(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$.

Определение 3. Положим $\bar{\Gamma}_{\tau} = (\tau, \Phi, \bar{F}, \bar{\mu})$, где τ – семейство подмножеств $T \subset X \times Y$, удовлетворяющих условию

$\forall \beta_1 \in B_1 \exists \alpha_1 \in A_1 \dots \forall \beta_n \in B_n \exists \alpha_n \in A_n \forall y \in Y_{\beta_1 \dots \beta_n} \exists x \in X_{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x, y) \in T$, Φ – семейство отображений $\varphi : 2^{X \times Y} \rightarrow X \times Y$, обладающих свойством $\forall T \subset X \times Y, \varphi(T) \in T$, отображение $\pi : \tau \times \Phi \rightarrow X \times Y$ задаётся равенством $\pi(T, \varphi) = \varphi(T)$, а для \bar{F} и $\bar{\mu}$ справедливы соотношения $\bar{F}(T, \varphi) = F(\varphi(T))$ при всех $\bar{T} \subset \tau \times \Phi \pi(\bar{\mu}(\bar{T})) = \mu(\pi(\bar{T}))$.

Теорема 1. *Игра $\bar{\Gamma}_{\tau}$ является квазиинформационным расширением игры Γ , в котором первый игрок имеет самостоятельную информацию об y не больше, чем в $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$.*

Иерархическая игра в $\bar{\Gamma}_{\tau}$ протекает следующим образом. Первый игрок предлагает второму выбрать y , сообщить его первому игроку и указать, какой x (из числа предложенных) должен выбрать первый игрок. Если же второй игрок отказывается от предложенного сотрудничества, то обмен информацией о выборах между игроками происходит по правилам игры $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$.

Теорема 2. *Расширение $\bar{\Gamma}_{\tau}$ является для первого игрока оптимальным в классе всех квазиинформационных расширений, в которых он имеет самостоятельную информацию о выборе y не больше, чем в $\bar{\Gamma}_{\mathfrak{A}}$.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. М. : Наука, 1976. 326 с.
2. Кукушкин Н. С., Морозов В. В. Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977. 325 с.
3. Родюков А. В., Тараканов А. Ф. О решении иерархической игры при неопределённости с суммарным риском игроков // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 11–17.
4. Кузнецова И. А. Иерархические игры с неопределёнными факторами // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 21–24.
5. Шолпо И. А. Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. 42 с.
6. Кузнецова И. А. Иерархические игры с неполной информацией первого игрока о выборе второго // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 29–32.

**О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НУЛЕВОЙ
НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ**

В [1] с использованием приема А. Н. Крылова ускорения сходимости рядов Фурье [2] и метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей, соответствующей смешанной задаче для волнового уравнения, получено классическое решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

где $q(x) \in C[0, 1]$, комплекснозначна и

$$\psi(x) \in C^1[0, 1], \quad \psi(0) = \psi(1) = 0, \quad (3)$$

в которой условия (3) являются минимальными для существования решения.

Сейчас мы исследуем задачу (1)–(3) при ослаблении требований гладкости на $\psi(x)$. Аналогичное исследование для такой задачи, но с начальными условиями $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = 0$ при ослаблении минимальных требований на $\varphi(x)$ проведено в [3].

1. Сначала предполагаем, что $\psi(x) \in W_2^1[0, 1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ($W_2^1[0, 1] = \{f(x) | f(x) \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1] \text{ и } \psi'(x) \in L_2[0, 1]\}$).

Формальное решение задачи представим в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) (R_\lambda \psi) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda = u_0(x, t) + u_1(x, t) \quad (4)$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) v^0(x, \rho) (\psi, z_2) \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{n \geq n_0} \int_{\gamma_n} \right) [v(x, \rho) - v^0(x, \rho)] \frac{\sin \rho t}{\rho} d\lambda,$$

$R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, $Ly = -y'' + q(x)y$, $y(0) = y(1) = 0$, E – единичный оператор, λ – спектральный параметр; $v(x, \rho)$ и $v^0(x, \rho)$ определены в [1], т. е. $v(x, \rho) = \frac{z_2(x, \rho)z_1(1, \rho)}{z_2(1, \rho)}$, $z_j(x, \rho)$ ($j = 1, 2$) – решения уравнения $y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$ с начальными условиями $z_1(0, \rho) = z_2'(0, \rho) = 1$, $z_1'(0, \rho) = z_2(0, \rho) = 0$, $v^0(x, \rho) = \frac{z_2^0(x, \rho)z_1^0(x, \rho)}{z_2^0(x, \rho)}$, $z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x$, $z_2^0 = \frac{\sin \rho x}{\rho}$; γ_n – образ в λ -плоскости ($\lambda = \rho^2$, $Re \rho \geq 0$) окружности $\{\rho \mid |\rho - n\pi| = \delta\}$ ($\delta > 0$ достаточно мало), содержащий внутри себя лишь одно из собственных значений оператора L , которые являются простыми при $n \geq n_0$; $r > 0$ фиксировано и таково, что контур $|\lambda| = r$ содержит все собственные значения оператора L , не попавшие в γ_n при $n \geq n_0$;
 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Справедлива формула $z_2(x, \rho) = z_2^0(x, \rho) + \int_0^x K(x, \tau)z_2^0(\tau, \rho) d\tau$, где $K(x, \tau)$ непрерывно дифференцируема по x и τ и $K(x, 0) \equiv 0$ (формула оператора преобразования [4, с. 17, 23]).

Лемма 1. Пусть $\psi_1(x) = \psi(x) + \int_x^1 K(\tau, x)\psi(\tau) d\tau$, тогда

$$u_0(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\psi_1(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \sin n\pi t,$$

Лемма 2. Имеет место формула

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{\psi}(\tau) d\tau,$$

где $\tilde{\psi}(x) \in W_2^1[-A, A]$ при любом $A > 0$, $\tilde{\psi}(x) = \psi_1(x)$ при $x \in [0, 1]$, $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x)$, $\tilde{\psi}(x+2) = \tilde{\psi}(x)$.

Лемма 3. Производные $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2}$ существуют почти всюду (п.в.) в $Q_T = [0, 1] \times [-T, T]$ и для таких x, t

$$\frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2}. \quad (5)$$

Доказательство. По лемме 2 $\tilde{\psi}'(x)$ существует п.в. на $(-\infty, \infty)$. Как и в [3, лемма 6] построим множество $M = \{x \mid x \in [-A, A], \psi'(x) \text{ конечна}\}$ и множество $\widetilde{M} = \{\{\xi_1, \xi_2\} \mid \xi_i \in M (i = 1, 2)\}$. Тогда $\text{mes } M = 2A$, $\text{mes } \widetilde{M} = 4A^2$. Для произвольной $\{\xi_1, \xi_2\} \in \widetilde{M}$ равенства $x + t = \xi_1$, $x - t = \xi_2$ однозначно определяют x и t , для которых производные $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2}$ существуют. А поскольку $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} [\tilde{\psi}'(\xi_1) - \tilde{\psi}'(\xi_2)]$, $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{2} [\tilde{\psi}'(\xi_1) - \tilde{\psi}'(\xi_2)]$, то для таких x и t $\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$, т.е. п.в. на $Q_T = [-A, A] \times [-A, A]$ выполняется (6). Пусть теперь $\{x, t\} \in Q_T$. Тогда при достаточно большом A множество Q_T таково, что множество $Q_1 = \{\{\xi_1, \xi_2\} \mid \xi_1 = x + t, \xi_2 = x - t, \{x, t\} \in Q_T\} \subset Q$. Значит (6) выполняется при п.в. x и t из Q_T .

Из лемм 2 и 3 получается

Теорема 1. *Функция $u_0(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$ и $\psi_1(x)$ вместо $\psi(x)$, когда уравнение (6) выполняется лишь п.в.*

Лемма 4. *Ряд $u_1(x, t)$ допускает почленное дифференцирование дважды по x и t при $x \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$.*

Из (4) с помощью теоремы 1 и леммы 4 получается

Теорема 2. *Функция $u(x, t)$ есть решение задачи (1)–(3), когда уравнение (1) выполняется п.в.*

2. Рассмотрим теперь задачу (1)–(3), когда $\psi(x) \in L_2[0, 1]$.

Представление (4) сохраняется.

Лемма 5. *Имеет место формула*

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x - t) - \Phi(x + t)],$$

где $\Phi(x) \in W_2^1[-A, A]$ при любом $A > 0$, $\Phi'(x) = -\psi_1(x)$ п.в. на $[0, 1]$, $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $\Phi(x + 2) = \Phi(x)$.

Следствие. *Имеет место формула*

$$u'_t(x, 0) = \psi_1(x) \text{ п.в. на } [0, 1]. \quad (6)$$

Для доказательства следует по произвольному $A > 0$, как и в лемме 3, построить множество M , но для функции $\Phi'(x)$ вместо $\tilde{\psi}'(x)$, и тогда для $x \in M$ из леммы 5 сразу следует (7).

Лемма 6. *Ряд $u_1(x, t)$ и ряд, получающийся из него почленным дифференцированием по t , сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$.*

На основании этих фактов, теоремы равносходимости для операторов L и L_0 и теоремы Карлесона получаем

Теорема 3. Ряд $u(x, t)$ решения задачи (1)–(3) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ и $t \in [-T, T]$, удовлетворяет условиям (2), (3), когда $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ выполняется п.в.

Пусть $\psi_h(x) \in W_2^1[0, 1]$ и $\psi_h(0) = \psi_h(1) = 0$. Решение задачи (1)–(3) для такой $\psi_h(x)$ вместо $\psi(x)$, даваемое теоремой 2, обозначим $u_h(x, t)$.

Лемма 7. Имеет место оценка

$$\max_{Q_T} |u_h(x, t) - u(x, t)| \leq C_T \|\psi_h - \psi\|,$$

где постоянная C_T зависит только от T , $\|\cdot\|$ – норма в $L_2[0, 1]$.

Теорема 4. Если $\|\psi_h - \psi\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то решение $u_h(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ из теоремы 3 равномерно в Q_T , т.е. $u(x, t)$ в этом смысле является обобщенным решением задачи (1)–(3) при любой $\psi(x) \in L_2[0, 1]$.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014 К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курдюмов В. П., Хромов А. П. Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 32–36.
2. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. Л. : ГИТТЛ, 1950. 368 с.
3. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // ЖВМ и МФ. 2016. Т. 56, № 2. С. 239–251.
4. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : Наук. думка, 1977. 392 с.

УДК 517.518

А. В. Макаров, С. И. Дудов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Рассматривается задача по равномерному на отрезке приближению непрерывной двумерной вектор-функции двумерной вектор-функцией, компонентами которой являются алгебраические полиномы. Показано, что по крайней мере одно из решений задачи может быть получено через решение двух задач чебышевского приближения непрерывных функций алгебраическими полиномами. Получен критерий единственности решения задачи.

1. Пусть $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$ – вектор-функция, заданная на отрезке $[c, d]$ непрерывными функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ и $P_n(B, t) = b_0 + b_1t + \dots + b_nt^n$ – алгебраические полиномы степени n с векторами коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

Рассмотрим следующую задачу о равномерном приближении вектор-функции $F(t)$ полиномиальной вектор-функцией $(P_n(A, t), P_n(B, t))$

$$\begin{aligned} \varphi(A, B) \equiv \max_{t \in [c, d]} \{ & |P_n(A, t) - f_1(t)| + \\ & + |P_n(B, t) - f_2(t)| \} \longrightarrow \min_{(A, B) \in R^{2n+2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Нетрудно увидеть, что функция $\varphi(A, B)$ выпукла по совокупности переменных (A, B) на R^{2n+2} , и, следовательно, для исследования задачи можно использовать методы выпуклого анализа.

Цель статьи – получить необходимые и достаточные условия решения задачи, условия единственности решения и предложить подход к её решению.

2. Наряду с задачей (1) рассмотрим две задачи чебышевского приближения

$$\varphi_1(C) \equiv \max_{t \in [c, d]} |P_n(C, t) - f_1(t) - f_2(t)| \longrightarrow \min_{C \in R^{n+1}}, \quad (2)$$

$$\varphi_2(D) \equiv \max_{t \in [c, d]} |P_n(D, t) - f_1(t) + f_2(t)| \longrightarrow \min_{D \in R^{n+1}}, \quad (3)$$

где C и D – вектора коэффициентов соответствующих полиномов. Известно, что решение этих задач будет единственным (см. напр., [1, 2]). Обозначим через C^* и D^* решения этих задач, то есть

$$\varphi_1(C^*) = \min_{C \in R^{n+1}} \varphi_1(C), \quad \varphi_2(D^*) = \min_{D \in R^{n+1}} \varphi_2(D).$$

Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы пара (A^*, B^*) была точкой минимума функции $\varphi(A, B)$ на R^{2n+2} необходимо и достаточно, чтобы:*

1) в случае $\varphi_1(A^* + B^*) > \varphi_2(A^* - B^*)$ вектор коэффициентов $C^* = A^* + B^*$ был решением задачи (2);

2) в случае $\varphi_1(A^* + B^*) < \varphi_2(A^* - B^*)$ вектор коэффициентов $D^* = A^* - B^*$ был решением задачи (3);

3) в случае $\varphi_1(A^* + B^*) = \varphi_2(A^* - B^*)$ хотя бы один из векторов $C^* = A^* + B^*$ и $D^* = A^* - B^*$ являлся бы решением соответственно задачи (2) или (3).

Доказательство. Нетрудно сделать вывод, что

$$\varphi(A, B) = \max \{ \varphi_1(A + B), \varphi_2(A - B) \},$$

и, следовательно, задача (1) эквивалентна задаче

$$g(C, D) \equiv \max \{ \varphi_1(C), \varphi_2(D) \} \longrightarrow \min_{(C, D) \in R^{2n+2}}. \quad (4)$$

При этом связь решений задач (1) и (4) выражается соотношениями

$$C^* = A^* + B^*, \quad D^* = A^* - B^*. \quad (5)$$

В соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [3, гл. 4, п. 2]

$$g(C^*, D^*) = \min_{(C, D) \in R^{2n+2}} g(C, D) \Leftrightarrow 0_{2n+2} \in \partial g(C^*, D^*), \quad (6)$$

где $\partial g(\cdot)$ – субдифференциал выпуклой функции $g(\cdot)$ по совокупности (C, D) для соответствующего значения аргумента, $0_{2n+2} = (0, 0, \dots, 0) \in R^{2n+2}$. Используя субдифференциальное исчисление для выпуклых функций (напр. [4, гл. 1]), нетрудно получить

$$\partial g(C, D) = \begin{cases} (\partial\varphi_1(C), 0_{n+1}), & \text{если } \varphi_1(C) > \varphi_2(D), \\ (0_{n+1}, \partial\varphi_2(D)), & \text{если } \varphi_1(C) < \varphi_2(D), \\ \text{co} \{ (\partial\varphi_1(C), 0_{n+1}), (0_{n+1}, \partial\varphi_2(D)) \}, & \text{если } \varphi_1(C) = \varphi_2(D). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\partial\varphi_1(C)$ – субдифференциал функции $\varphi_1(\cdot)$ по C , $\partial\varphi_2(D)$ – субдифференциал функции $\varphi_2(\cdot)$ по D , а $\text{co} \{ \cdot \}$ – выпуклая оболочка множества $\{ \cdot \}$.

Из (7) вытекает, что в случае $\varphi_1(C^*) > \varphi_2(D^*)$ имеем

$$0_{2n+2} \in \partial g(C^*, D^*) \Leftrightarrow 0_{n+1} \in \partial\varphi_1(C^*).$$

Последнее означает [3, гл. 4], что C^* является решением задачи (2). Ввиду соотношений (5) мы тем самым доказали справедливость теоремы в случае 1. Справедливость теоремы в случаях 2 и 3 также вытекают из (5), (6) и формулы (7). Теорема доказана.

Как вытекает из доказанной теоремы, можно предложить следующий подход к решению задачи (1). Сначала необходимо решить вспомогательные задачи чебышевского приближения (2) и (3), используя известные методы (напр. [2, гл.1]). Если вектора C^* и D^* являются решениями этих задач, то пара $A^* = (C^* + D^*)/2$, $B^* = (C^* - D^*)/2$ будет

решением (или одним из решений) задачи (1). Если при этом, например, $\varphi_1(C^*) > \varphi_2(D^*)$, то для любого вектора коэффициентов \tilde{D} , удовлетворяющего неравенству $\varphi_1(C^*) \geq \varphi_2(\tilde{D})$, пара $\tilde{A} = (C^* + \tilde{D})/2$, $\tilde{B} = (C^* - \tilde{D})/2$ будет одним из решений задачи (1). Таким образом, очевидно, в этом случае решение задачи (1) будет не единственным. Тем самым мы показали, что справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы пара (A^*, B^*) была единственным решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы вектор коэффициентов $C^* = A^* + B^*$ был решением задачи (2), а вектор коэффициентов $D^* = A^* - B^*$ – решением задачи (3), и при этом $\varphi_1(C^*) = \varphi_2(D^*)$.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
2. Демьянов В. Ф., Малоземцев В. Н. Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.
3. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.
4. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука, 1980. 320 с.

УДК 512.531.2, 512.57

В. А. Молчанов

НЕСТАНДАРТНАЯ ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

После открытия [1] взаимосвязи между потоками рациональных языков и псевдомногообразиями полугрупп (т.е. классами конечных полугрупп, замкнутых относительно формирования гомоморфных образов, подполугрупп и конечных прямых произведений) теория псевдомногообразий представляет собой одно из актуальных направлений современной алгебры, которое имеет важные приложения в таких разделах компьютерной науки, как теория формальных языков и конечных автоматов. Этим объясняется значительный интерес к разнообразным альтернативным методам исследования псевдомногообразий конечных алгебраических систем. Основные результаты в этом направлении были получены С. Эйленбергом и М. П. Шютценберже, Ж. -Э. Пэном и П. Вейлем, Д. Тьереном, К. Дж. Ашем, Дж. Рейтерманом, Дж. Алмейдой и

многими другими (см. обзор [2]). Как показывают исследования, один из наиболее последовательных подходов к теории псевдомногообразий может быть основан на принципах нестандартного анализа А. Робинсона [3]: результаты работ [4–6] позволяют охарактеризовать псевдомногообразия конечных алгебраических Ω -систем тождествами нестандартного языка узкого исчисления предикатов и исследовать такие псевдомногообразия и соответствующие им потоки рациональных языков с помощью нестандартного расширения алгебры Ω -слов.

В настоящей работе на основе методов нестандартного анализа получена теорема компактности для конечных алгебраических систем и показаны некоторые важные приложения этой теоремы в теории псевдомногообразий.

Пусть Ω обозначает произвольный фиксированный тип алгебраических систем с конечным числом предикатных символов. Для описания свойств алгебраических Ω -систем используется нестандартный формальный язык \mathcal{L}_X над алфавитом X такой, что *нестандартными термами* языка \mathcal{L}_X являются элементы нестандартного расширения *W Ω -алгебры $W = W_\Omega(X)$ Ω -слов над алфавитом X . Формулы \mathcal{L}_X строятся обычным образом с помощью пропозициональных связок и кванторов из *нестандартных тождеств* (т.е. атомных формул вида $t_1 = t_2$, $P(t_1, \dots, t_n)$, где $t_1, \dots, t_n \in {}^*W$ и P – n -арный предикатный символ из Ω). Интерпретация языка \mathcal{L}_X в конечной алгебраической Ω -системе A определяется с помощью отображения $\theta : X \rightarrow A$, которое канонически продолжается до гомоморфизма ${}^*\theta : {}^*W \rightarrow A$.

С помощью принципов нестандартного анализа получена следующая теорема компактности.

Теорема. Пусть B – алгебраическая Ω -система, \mathcal{F} – семейство конгруэнций на системе B , упорядоченное теоретико-множественным включением, направленным вниз, и \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, k$) – семейства внутренних подмножеств нестандартного расширения *B , упорядоченные теоретико-множественным включением направленно вниз. Тогда для любой позитивной формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ узкого исчисления предикатов алгебраического типа Ω следующие условия эквивалентны:

- 1) для любых $\varepsilon \in \mathcal{F}$, $F_i \in \mathcal{F}_i$ ($i = 1, \dots, k$) фактор-система ${}^*B/{}^*\varepsilon$ удовлетворяет свойству

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists y_1 \in F_1, \dots, y_k \in F_k) \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k);$$

- 2) найдутся такие элементы $b_i \in \bigcap \{F_i : F_i \in \mathcal{F}_i\}$ ($i = \overline{1, k}$), что

для конгруэнции $\mu = \bigcap \{^*\varepsilon : \varepsilon \in \mathcal{F}\}$ фактор-система ${}^*B/\mu$ удовлетворяет свойству

$$(\forall x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n, \mu(b_1), \dots, \mu(b_k)).$$

Следствие 1. Пусть \mathfrak{K} – класс конечных алгебраических Ω -систем, замкнутый относительно формирования подсистем и конечных прямых произведений и пусть для натуральных чисел n, k $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ ($j \in J$) – позитивная формула языка \mathcal{L}_Y над алфавитом $Y = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$. Если класс \mathfrak{K} удовлетворяет условию

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists x_{n+1}, \dots, x_{n+k})\varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}),$$

то существуют такие нестандартные термы $t_i = t_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = \overline{1, k}$) языка \mathcal{L}_X над алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, что класс \mathfrak{K} удовлетворяет условию

$$(\forall x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1, \dots, x_n, t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_k(x_1, \dots, x_n)).$$

По определению [7] n -арной неявной операцией на классе алгебраических Ω -систем \mathfrak{K} называется семейство $(\pi_A)_{A \in \mathfrak{K}}$ таких отображений $\pi_A : A^n \rightarrow A$, что для всех гомоморфизмов $\varphi : A \rightarrow B$ любых систем $A, B \in \mathfrak{K}$ выполняется равенство $\pi_A \cdot \varphi = \varphi^n \cdot \pi_B$. Множество всех n -арных неявных операций на классе \mathfrak{K} обозначается $\tilde{\Omega}_n \mathfrak{K}$ и имеет структуру алгебраической Ω -системы.

Следствие 2. Пусть \mathfrak{K} – псевдомногообразие конечных алгебраических Ω -систем и π – n -арная неявная операция на классе \mathfrak{K} . Тогда найдется такой нестандартный терм $t = t(x_1, \dots, x_n)$ языка \mathcal{L}_X над алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, что для любых $A \in \mathfrak{K}$ и $a_1, \dots, a_n \in A$ выполняется условие

$$\pi_A(a_1, \dots, a_n) = t(a_1, \dots, a_n).$$

Таким образом, все n -арные неявные операции на псевдомногообразии \mathfrak{K} конечных алгебраических Ω -систем нестандартно интерпретируются элементами множества ${}^*W_\Omega(X)$ над алфавитом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. На этом множестве естественно определяется алгебраическая структура типа Ω и равномерная топология с базой равномерности

$$\mathcal{B} = \{^*\theta \cdot ^* \theta^{-1} : A \in \mathfrak{K} \text{ и } \theta : X \rightarrow A\}.$$

При отождествлении нестандартных термов, определяющих одинаковые n -арные неявные операции на классе \mathfrak{K} , получается эквивалентность ε на множестве ${}^*W_\Omega(X)$ и равномерная алгебраическая Ω -система ${}^*W_\Omega(X)/\varepsilon$ с Хаусдорфовой компактной вполне несвязной топологией. Эта система является нестандартной конструкцией алгебраической Ω -системы всех n -арных неявных операций $\tilde{\Omega}_n\mathfrak{K}$ на классе \mathfrak{K} . Нетрудно убедиться, что система ${}^*W_\Omega(X)/\varepsilon$ является свободным объектом с n порождающими для систем из класса \mathfrak{K} .

Последний результат показывает, что многие проблемы теории псевдомногообразий, базирующиеся на понятии неявной операции, могут быть сведены к теории нестандартных многообразий.

Пусть Ω – полугрупповая сигнатура. Тогда n -арная неявная операция π на классе полугрупп \mathfrak{K} называется регулярной, если она является регулярным элементом полугруппы $\tilde{\Omega}_n\mathfrak{K}$ всех n -арных неявных операций на \mathfrak{K} , т.е. выполняется условие $\pi = \varrho \cdot \pi$ для некоторой n -арной неявной операции ϱ на классе полугрупп \mathfrak{K} .

Следствие 3 [8]. *Пусть \mathfrak{K} – псевдомногообразие конечных полугрупп и $\pi = (\pi_A)_{A \in \mathfrak{K}}$ – n -арная неявная операция на классе \mathfrak{K} . Тогда π в том и только том случае будет регулярной операцией, если она поточечно регулярна, т.е. для любых $A \in \mathfrak{K}$ и $a_1, \dots, a_n \in A$ элемент $\pi_A(a_1, \dots, a_n)$ регулярен в полугруппе A .*

Например, для доказательства последнего результата достаточно убедиться, что из поточечной регулярности неявной операции π следует ее регулярность в полугруппе $\tilde{\Omega}_n\mathfrak{K}$. Так как в силу следствия 2 n -арная неявная операция π нестандартно интерпретируется термом $t_\pi = t_\pi(x_1, \dots, x_n)$, то класс \mathfrak{K} удовлетворяет условию

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(\exists x)t_\pi(x_1, \dots, x_n) \cdot x \cdot t_\pi(x_1, \dots, x_n) = t_\pi(x_1, \dots, x_n).$$

Значит, по следствию 1 для некоторого нестандартного терма

$$t = t(x_1, \dots, x_n)$$

класс \mathfrak{K} удовлетворяет условию

$$(\forall x_1, \dots, x_n)t_\pi(x_1, \dots, x_n) \cdot t(x_1, \dots, x_n) \cdot t_\pi(x_1, \dots, x_n) = t_\pi(x_1, \dots, x_n).$$

Тогда нестандартный терм $t(x_1, \dots, x_n)$ определяет на классе \mathfrak{K} n -арную неявную операцию ϱ , которая удовлетворяет условию $\pi \cdot \varrho \cdot \pi = \pi$, т.е. π -регулярный элемент полугруппы $\tilde{\Omega}_n\mathfrak{K}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Eilenberg S.* Automata, Languages and Machines. V. B. Academic Press, N. Y., 1976. 403 p.
2. *Almeida J.* On pseudovarieties, varieties of languages, filters of congruences, pseudoidentities and related topics // Algebra Universalis. 1990. Vol. 27. P. 333–350.
3. *Альбеверио С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т.* Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М. : Мир, 1990. 616 с.
4. *Molchanov V. A.* Nonstandard characterization of pseudovarieties // Algebra Universalis. 1995. Vol. 33. P. 533–547.
5. *Molchanov V. A.* Nonstandard congruences and lattices of pseudovarieties // Semigroups, automata and languages / ed. J. Almeida. World Scientific. Singapore ; New Jersey ; London, 1996. P. 183–193.
6. *Molchanov V. A.* Nonstandard free objects over pseudovarieties of finite algebraic systems // Contributions to General Algebra 16, Proceedings of the Dresden Conference 2004 (AAA68) and the Summer School 2004. Verlag Johannes Heyn. Klagenfurt, 2005. P. 145–154.
7. *Almeida J.* The algebra of implicit operations // Algebra Universalis. 1989. Vol. 26. P. 16–32.
8. *Almeida J., Azevedo A.* On regular implicit operations // Portugaliae Mathematica. 1993. Vol. 50. № 1. P. 35–61.

УДК 517.51

М. Д. Мушко

О ДВОИЧНЫХ БАЗИСНЫХ СПЛАЙНАХ

При практических вычислениях сплайн-функции удобно представлять как линейную комбинацию базисных сплайнов (В-сплайнов). Возможность такого представления доказывается в теореме Карри–Шенберга [1]. Мы докажем это утверждение для двоичных сплайнов второй степени. Подробнее о сплайнах второй степени можно посмотреть в [2]. Рассмотрим функцию Уолша W_3 . Проинтегрировав эту функцию один раз, мы получим функцию Мартенса–Терехина $G(x) = 4 \int_0^x W_3(t) dt$. При помощи функции Мартенса–Терехина образуем функцию φ следующим образом:

$$\varphi(x) = 4\chi_{[0,1]}(x) \int_0^x G(t) dt, \quad (1)$$

где $\chi_{[0,1]}(x)$ – это характеристическая функция отрезка $[0,1]$. Рассмотрим систему сдвигов функции $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где $\varphi_k(x) = \frac{1}{2}\varphi(x - \frac{k}{4})$.

Теорема 1. Для любого $x \in [0,1]$ выполняется следующее условие:

$$\sum_{k=-3}^3 \varphi_k(x) = 1. \quad (2)$$

Следствие 1. Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется следующее условие:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k(x) = 1. \quad (3)$$

Следствие 2. Функция $\varphi(x)$ линейно выражается через свои сдвиги.

В силу следствия 2 мы можем выбросить из системы функцию при $k = 0$. Будем рассматривать следующую систему сдвигов:

$$\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0}. \quad (4)$$

Рассмотрим сплайн порядка 2 дефекта 1 с узлами в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. На каждом отрезке длины $\frac{1}{4}$ сплайн-функция $S(x)$ представляет собой полином второй степени. При этом в узлах сетки выполнены условия непрерывности функции и ее первой производной.

Теорема 2. Для любого $x \in [0, 1]$ сплайн порядка 2 дефекта 1 $S(x)$ с узлами сетки в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$, представим в виде линейной комбинации функций из системы $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0}$:

$$S(x) = \sum_{k=-3}^3 \alpha_k \varphi_k(x). \quad (5)$$

Доказательство. Для доказательства этого утверждения выразим коэффициенты в (5) через свободные переменные сплайн-функции $S(x)$. Будем рассматривать линейную комбинацию (5) на отрезках длиной $\frac{1}{4}$.

1) Пусть $x \in [0, \frac{1}{4}]$. Тогда линейная комбинация (5) будет иметь вид

$$S(x) = \alpha_{-3}\varphi_{-3}(x) + \alpha_{-2}\varphi_{-2}(x) + \alpha_{-1}\varphi_{-1}(x). \quad (6)$$

При $x \in [0, \frac{1}{4}]$ сплайн-функция $S(x)$ имеет вид $a_1x^2 + b_1x + c_1$. Таким образом:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \alpha_{-3}\varphi_{-3}(x) + \alpha_{-2}\varphi_{-2}(x) + \alpha_{-1}\varphi_{-1}(x). \quad (7)$$

Распишем подробнее с учетом вида функций $\varphi_{-3}(x), \varphi_{-2}(x), \varphi_{-1}(x)$ на отрезке $[0, \frac{1}{4}]$:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = \alpha_{-3}(4x^2 - 2x + \frac{1}{4}) + \alpha_{-2}(-4x^2 + \frac{1}{2}) + \alpha_{-1}(-4x^2 + 2x + \frac{1}{4}). \quad (8)$$

Сгруппируем коэффициенты при соответствующих степенях в (8) и получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4\alpha_{-3} - 4\alpha_{-2} - 4\alpha_{-1} = a_1, \\ -2\alpha_{-3} + 0\alpha_{-2} + 2\alpha_{-1} = b_1, \\ \frac{1}{4}\alpha_{-3} + \frac{1}{2}\alpha_{-2} + \frac{1}{4}\alpha_{-1} = c_1. \end{cases} \quad (9)$$

Определитель системы (9) будет отличен от нуля. Следовательно, система будет иметь единственное решение:

$$\alpha_{-3} = \frac{a_1}{4} + \frac{b_1}{4} + c_1, \quad (10)$$

$$\alpha_{-2} = -\frac{a_1}{4} - \frac{b_1}{2}, \quad (11)$$

$$\alpha_{-1} = \frac{a_1}{4} + \frac{3}{4}b_1 + 2c_1. \quad (12)$$

2) Пусть $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Тогда сплайн-функция $S(x)$ будет записываться в виде линейной комбинации

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = \alpha_{-2}(4x^2 - 4x + 1) + \alpha_{-1}(-4x^2 + 2x + \frac{1}{4}) + 4\alpha_1(x - \frac{1}{4})^2. \quad (13)$$

В силу того что на отрезке $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ (13) справедливо при любых x , продифференцируем (13) дважды

$$a_2 = 4\alpha_{-2} - 4\alpha_{-1} + 4\alpha_1. \quad (14)$$

В уравнении (14) $a_2, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}$ являются известными. Найдем α_1

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{4} - \alpha_{-2} + \alpha_{-1}. \quad (15)$$

Проводя аналогичные рассуждения в отношении отрезков $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ и $[\frac{3}{4}, 1]$, мы выразим α_2 и α_3 . *Что и требовалось доказать.*

Следствие 3. Для любого $x \in \mathbb{R}$ сплайн порядка 2 дефекта 1 с узлами сетки в точках $\frac{k}{4}, k \in \mathbb{Z}$, представим в виде линейной комбинации функций из системы $\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0}$

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \alpha_k \varphi_k(x). \quad (16)$$

Следствие 3 есть аналог теоремы Карри–Шенберга для двоичных сплайнов второй степени. Другой способ построения базисных сплайнов при помощи интегрирования можно найти в [3].

Работа подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ДеБор К. Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985. 304 с.
2. Алберг Дж., Нильсен Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М. : Мир, 1972. 320 с.
3. Кашин Б., Саакян А. Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с.

УДК 519.7

В. Е. Новиков

ИЗОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОДНОЗНАЧНОМ КОНТЕКСТЕ

В работе рассматриваются изотонные отображения как инструмент, с помощью которого можно упростить однозначный контекст с действительными множествами атрибутов с тем, чтобы наиболее существенная информация об объектах в исходном контексте сохранилась.

Формальным контекстом называется тройка $\mathbb{K} = (G, \{M_i\}, \rho)$, где G – конечное множество объектов, $|G| \geq 2$, $\{M_i\}$ – семейство конечных множеств атрибутов с множеством индексов $1 \leq i \leq n$, $|M_i| \geq 2$, ρ – некоторое $(n + 1)$ -арное отношение. Если $(g, m_1, \dots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1 , по атрибуту 2 имеет значение m_2 и т.д. Когда любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, контекст называется *однозначным*. В однозначном контексте отношение ρ определяет семейство отображений $\rho_j : G \rightarrow M_j, 1 \leq j \leq n$, по правилу $\rho_j(g) = m_j$. Ядро каждого отображения ρ_j является разбиением множества G , блоки которого совпадают с концептами по атрибуту j (или коротко с j -концептами). Обозначим это разбиение на j -концепты G/j . Таким образом, для любого $m_j \in M_j$ множество $\rho_j^{-1}(m_j)$ является некоторым блоком разбиения G/j и некоторым j -концептом.

Обозначим $\bar{j}_k = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, где $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$, $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$, $M_{\bar{j}_k} = M_{j_1} \times M_{j_2} \times \dots \times M_{j_k}$, $m_{\bar{j}_k} = \{m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_k}\} \in M_{\bar{j}_k}$, $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$. Отношение ρ однозначного контекста \mathbb{K} также определит более широкое семейство отображений $\rho_{\bar{j}_k} : G \rightarrow M_{\bar{j}_k}, \bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, по

правилу $\rho_{\bar{j}_k}(g) = m_{\bar{j}_k}$. Ядро отображения $\rho_{\bar{j}_k}$ также является разбиением множества G , блоки которого совпадают с концептами по атрибуту \bar{j}_k (или коротко \bar{j}_k -концептами). Обозначим разбиение на \bar{j}_k -концепты G/\bar{j}_k . И аналогично для любого $m_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k}$ множество $\rho_{\bar{j}_k}^{-1}(m_{\bar{j}_k})$ является некоторым блоком разбиения G/\bar{j}_k и некоторым \bar{j}_k -концептом однозначного контекста \mathbb{K} .

Концепты по одному и тому же вектору атрибутов \bar{j}_k будем называть *однотипными*. Пусть дополнительно каждый атрибут $M_j \subset \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, является линейно упорядоченным множеством с естественным порядком действительных чисел \leq . Тогда всякое множество $M_{\bar{j}_k}$ ($\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$) можно рассматривать как упорядоченное множество с порядком $\leq_{\bar{j}_k}$, где

$$a_{\bar{j}_k} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k} = (b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \Leftrightarrow a_{j_1} \leq b_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_k} \leq b_{j_k}.$$

Порядок $\leq_{\bar{j}_k}$ в общем случае уже не будет линейным. Эти порядки индуцируют изоморфные порядки на множествах однотипных концептов:

$$(\forall \bar{j}_k \subseteq \bar{n}) : \rho_{\bar{j}_k}^{-1}(a_{\bar{j}_k}) \leq_{\bar{j}_k} \rho_{\bar{j}_k}^{-1}(b_{\bar{j}_k}) \Leftrightarrow a_{\bar{j}_k} \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k}.$$

Эти порядки в свою очередь естественно продолжаются на множество всех концептов контекста \mathbb{K} . Пусть X и Y – два произвольных не обязательно однотипных концепта. Полагаем, что

$$X \leq_{\bar{j}_k} Y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\forall y \in Y) : \rho_{\bar{j}_k}(x) \leq_{\bar{j}_k} \rho_{\bar{j}_k}(y).$$

Концепт X называется *оптимальным в контексте \mathbb{K} по отношению $\leq_{\bar{j}_k}$* , если в этом контексте не существует никакого другого концепта Y с условием $X \leq_{\bar{j}_k} Y$.

В [1] был представлен алгоритм вычисления множества, содержащего все оптимальные концепты. Естественно возникает проблема упрощения таких вычислений, с тем чтобы заново вычисленное множество концептов содержало бы все объекты оптимальных концептов прежнего множества, но на его вычисление потребовалось бы существенно меньше операций.

Один из способов решения указанной проблемы лежит в сокращении решётки концептов контекста \mathbb{K} , в объединении тех его концептов, значения которых по данному атрибуту хоть и различны, но достаточно близки друг другу. Эту проблему можно решить построением семейства целесообразных изотонных отображений типа $f_j : M_j \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$. Целесообразных в том смысле, чтобы построение этих отображений обоснованно соответствовало поставленной цели. Ясно, что ядро каждого

отображения f_j является разбиением множества M_j , которое равносильно осуществлению на линейно упорядоченном множестве M_j *шкалирования* по блокам этого разбиения. Возможны два варианта шкалирования: либо *равномерное* шкалирование, т.е. на равномерные интервалы множества \mathbb{R} , либо *неравномерное* шкалирование. Множество работ по рассматриваемой тематике посвящены вопросам равномерного шкалирования, выбору шага шкалирования и начальной точке. Но обоснования таких выборов довольно туманны и, по сути, остаются на усмотрение исследователя предметной области контекста. Однако проблема может иметь решение, продиктованное строением контекста. Для каждого атрибута M_j построим *функцию распределения*, которая будет выявлять промежутки скопления объектов по атрибуту j возле некоторых его значений, если они есть. $F_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, по правилу

$$F_j(x) = |G_j(x)|,$$

где $G_j(x) = \{g \in G \mid \rho_j(g) \leq x\}$ и $|G_j(x)|$ — мощность множества $G_j(x)$.

Теорема (свойства функции распределения объектов контекста).

1) *Функция F_j неубывающая, с наименьшим значением 0 на $(-\infty; \inf M_j)$ и наибольшим значением $|G|$ на $(\sup M_j; +\infty)$.*

2) *Функция F_j строго возрастает на множестве M_j и постоянна на интервалах множества $\mathbb{R} \setminus M_j$.*

Итак, если функция F_j равномерно возрастающая на $[\inf M_j; \sup M_j]$, то наилучшим выбором является равномерное шкалирование с начальной точкой $\inf M_j$ и с шагом, кратным длине отрезка $[\inf M_j; \sup M_j]$. Если для функции F_j удаётся выявить участок усиления её роста на интервале $[\inf M_j; \sup M_j]$, то данный участок соответствует началу промежутка скопления объектов по данному атрибуту к значению, в окрестности которого усиление заканчивается. Тогда шкалирование целесообразнее осуществлять по точкам усиления роста функции распределения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Новиков В. Е.* Вычисление множества оптимальных концептов в контексте с упорядоченными множествами атрибутов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 43–44.

РАЗЛОЖЕНИЕ КОНЕЧНОГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АВТОМАТА В КОНЕЧНЫЙ РЯД ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ УОЛША

В статье рассматривается метод представления конечного детерминированного автомата Мура в виде композиции простейших автоматов. Это достигается путём разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье–Уолша по системе функций Уолша и сопоставления каждой из этих функций автомата, геометрический образ которого совпадает с данной функцией.

Распространенные способы задания автоматов (таблицы, матрицы, системы канонических логических уравнений) основываются на рекурсии: последовательно определяются такты функционирования автомата и указываются правила рекурсивного совмещения тактов в процессе функционирования. Указанными способами задания автоматов явно выделяются только начальные фрагменты возможных вариантов функционирования. Для того чтобы заменить рекурсивное задание законов функционирования автомата явным определением функций переходов и выходов на всей оси абстрактного времени, в работах В. А. Твердохлебова предложено и развито представление автоматов геометрическими образами в специальных словарных геометриях и исследованы свойства геометрических образов [1, 2]. На содержательном уровне геометрический образ можно считать ломаной линией.

В данной работе исследуются периодические геометрические образы конечных детерминированных автоматов Мура с периодом $N = 2^n$, ($n = 1, 2, \dots$). Для этого элементы автоматного отображения $\rho_s : X^* \rightarrow Y^*$, соответствующего инициальному автомату Мура $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, систематизируются в геометрический образ по предложенным в работе [1] правилам. Представление периодического геометрического образа рядом по системе функций Уолша осуществляется на основе разложения его периода.

Функции Уолша можно определить через функции Радемахера. Функция Радемахера i -го порядка определяется следующим образом [3]:

$$r_i(x) = (-1)^{x_i} = \cos \pi x_i,$$

где $x_i = 0, 1$ есть i -й разряд двоичного представления переменной x .

Функции Уолша в форме Пэли – это действительные функции, определяемые как произведение степеней функций Радемахера:

$$pal(p, x) = [r_1(x)]^{p_n} [r_2(x)]^{p_{n-1}} \dots [r_n(x)]^{p_1},$$

где p_i – разрядные коэффициенты в двоичном представлении числа p ; тогда

$$\begin{aligned} pal(0, x) &= 1, \\ pal(1, x) &= r_1(x), \\ pal(2, x) &= r_2(x), \\ pal(3, x) &= r_1(x)r_2(x), \\ pal(4, x) &= r_3(x), \\ pal(5, x) &= r_1(x)r_3(x), \\ pal(6, x) &= r_2(x)r_3(x), \\ pal(7, x) &= r_1(x)r_2(x)r_3(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Функции Уолша обладают следующими свойствами:

1. В функции Уолша переменные p и x входят симметрично.
2. Функции Уолша – периодические с периодом $N = 2^n$.
3. Функции Уолша имеют нулевое среднее значение на множестве точек $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.
4. Система функций Уолша является ортогональной на множестве точек $x = 0, 1, 2, \dots, N - 1$:

$$\sum_{x=0}^{N-1} pal(a, x)pal(b, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \neq b, \\ N, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

5. Поскольку на интервале определения $N = 2^n$ в систему функций Уолша входит N ортогональных функций, то она является полной.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $S = \{s_1, \dots, s_5\}$, $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, – конечный детерминированный автомат Мура. Присвоим первым N словам на оси X^* следующие номера: $0, 1, \dots, N - 1$. Геометрический образ γ_{s_0} исходного автомата заменяется его разложением в ряд по системе функций Уолша:

$$F(x) = \sum_{p=0}^{N-1} c_p pal(p, x), \tag{2}$$

при этом значения суммы ряда в точках $0, 1, \dots, N - 1$ точно совпадают со значениями геометрического образа, а коэффициенты c_p можно подсчитать, используя свойство ортогональности функций Уолша:

$$c_p = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} = pal(p, x)F(x). \quad (3)$$

В соответствии с предлагаемыми принципами интерпретации и совмещения структуры ряда (2) со структурой автомата каждую базисную функцию из системы (1), входящую в ряд (2), можно рассматривать как геометрический образ некоторого конечного детерминированного автомата Мура.

Каждая базисная функция системы (1) является N -периодической, определим значения этих функций на первых N точках оси абсцисс. Для каждой новой целочисленной функции $y_i(x), i = 0, \dots, N - 1$ получим N значений в точках $0, 1, \dots, N - 1$, по которым строятся геометрические образы, соответствующие каждой из базисных функций. Далее по этим геометрическим образам однозначно восстанавливаются автоматы A_0, \dots, A_{N-1} . А так как каждая функция Уолша принимает лишь два значения: 1 или -1, то эти автоматы легко строятся, и изучать их свойства гораздо удобнее [4].

Функции выходов автоматов A_0, \dots, A_{N-1} определяются формулами:

$$\lambda_i(s_i 0) = y_i(x), \text{ где } i = 0, \dots, N - 1. \quad (4)$$

Функции переходов этих автоматов могут быть выбраны совпадающими с функцией переходов исходного автомата. Таким образом, базисные автоматы A_0, \dots, A_{N-1} получены разложением в ряд Фурье геометрического образа γ_s и выделением в ряде Фурье–Уолша соответствующих автоматам компонент.

Композиция автоматов A_0, \dots, A_{N-1} , где элемент Σ определяется равенством

$$\lambda_{\Sigma}(s_{\Sigma} 0, x) = c_0 y_0(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_{N-1} y_{N-1}(x), \quad (5)$$

задает исходный автомат A .

В геометрическом образе автомата функциональная зависимость представлена как автоматное отображение, то есть отображение с изменяющимся параметром (изменяющимся состоянием), что позволяет каждую функцию $pal(p, x)$ преобразовывать в автомат A_p с конкретным множеством состояний.

Следовательно, в рассматриваемой композиции все компоненты – автоматы и результат композиции – автомат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов : сб. науч. тр. ; ИПТМУ РАН. Саратов, 2004. 192 с.
2. *Твердохлебов В. А., Епифанов, А. С.* Представление автоматных отображений геометрическими структурами. Саратов : Научная книга, 2013. 204 с.
3. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М. : Сов. радио, 1975. 208 с.
4. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления. Информационные технологии в науке, производстве и социальной сфере : сб. науч. тр. Саратов : Научная книга, 2005.

УДК 512.554+512.643

В. Б. Поплавский

ДЕЛИМОСТЬ ИДЕМПОТЕНТОВ ПОЛУГРУППЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В этой статье естественным образом определяются два типа идемпотентов частичной полугруппы булевых матриц всевозможных размеров – первичных и вторичных. Доказывается, что правая делимость вторичных булево-матричных идемпотентов влечёт их левую делимость, и наоборот. Показано также, что этот факт прямо связан с булевым частичным порядком "включения" \subseteq на множестве булевых матриц.

Обозначим через $\mathbb{M}(\mathbb{B})$ множество матриц всевозможных конечных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры \mathbb{B} , на котором операции объединения \cup , пересечения \cap , дополнения $'$ и частичный порядок \subseteq определяются для матриц одинаковых размеров поэлементно.

Конъюнктивным произведением матриц A и B , согласованных размеров $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, назовём матрицу $C = A \cap B$ размера $m \times k$ с элементами $C_j^i = \bigcup_{t=1}^n (A_t^i \cap B_j^t)$.

Множество $\mathbb{M}(\mathbb{B})$ с частичной, то есть определенной не для каждой пары матриц операцией \cap , образует частичную полугруппу $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \cap \rangle$. Обозначим результат транспонирования матрицы A через A^T . Очевидно, что $(A \cap B)^T = B^T \cap A^T$. Положем также, что $A'^T = (A^T)' = (A')^T$.

Символом E будем далее обозначать квадратные матрицы с единицами 1 на главной диагонали и нулями 0 на остальных местах, где 1 и 0 – единица и нуль булевой алгебры \mathbb{B} . При этом соответствующий контексту размер матрицы E указывать не будем.

Определение 1. Матрица A называется *первичным Π -идемпотентом*, если $E \not\subseteq A = A \Pi A$, и *вторичным Π -идемпотентом* частичной полугруппы $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \Pi \rangle$, если $E \subseteq A = A \Pi A$.

Любой булевой матрице произвольного размера соответствуют *вторичные идемпотенты правого типа* : $A^{\mathcal{R}} = (A \Pi A^{tT})^{tT}$, и *левого типа* : $A^{\mathcal{L}} = (A^{tT} \Pi A)^{tT}$. Известно [1, 2], что матрицы $A^{\mathcal{R}}$ и $A^{\mathcal{L}}$ являются вторичными идемпотентами частичной полугруппы $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \Pi \rangle$.

Теорема 1. Пусть A – идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \Pi \rangle$. Матрица A является *первичным идемпотентом* тогда и только тогда, когда $A \subsetneq A^{\mathcal{R}}$ и $A \subsetneq A^{\mathcal{L}}$, и является *вторичным Π -идемпотентом* тогда и только тогда, когда $A = A^{\mathcal{R}} = A^{\mathcal{L}}$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [1, 2].

Вторичные идемпотенты играют главную роль в вопросах разрешимости простейших булево-матричных уравнений, делимости, регулярности булевых матриц, необходимых признаков односторонних идеалов, поиска транзитивно-рефлексивных замыканий и пр. [1, 2]. Вторичные идемпотенты изучались также в [3, 4].

Определение 2. Будем говорить, что *матрица B делится на A слева* в частичной полугруппе всевозможных булевых матриц $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \Pi \rangle$, если уравнение $A \Pi X = B$ имеет решение, и *справа*, если имеет решение уравнение $X \Pi A = B$.

Лемма 1. Пусть A – идемпотентная матрица частичной полугруппы $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \Pi \rangle$ и B – произвольная булева матрица подходящего размера. Тогда верны следующие предложения:

1) уравнение $A \Pi X = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A \Pi B = B$;

2) уравнение $X \Pi A = B$ имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется равенство $B \Pi A = B$.

Доказательство. Очевидно, что из равенства $A \Pi B = B$ следует разрешимость уравнения $A \Pi X = B$. Покажем, что из того, что уравнение $A \Pi X = B$ имеет решение, следует равенство $A \Pi B = B$. Для этого воспользуемся критерием совместности уравнения (см. [1, теорема 2.2]), записанным в форме

$$(\exists X) \quad A \Pi X = B \quad \Leftrightarrow \quad A \Pi (B^{tT} \Pi A)^{tT} = B.$$

Тогда, умножая равенство $A \Pi (B^{tT} \Pi A)^{tT} = B$ слева на идемпотентную матрицу A , получаем

$$A \Pi B = A \Pi A \Pi (B^{tT} \Pi A)^{tT} = A \Pi (B^{tT} \Pi A)^{tT} = B.$$

Аналогично доказывается, что из совместности уравнения $X \sqcap A = B$ следует выполнение равенства $B \sqcap A = B$, и наоборот. \square

Лемма 2. Пусть A – квадратная матрица, а B – вторичный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbb{M}(\mathbb{B}), \sqcap \rangle$ того же размера, что и A . Тогда система неравенств $E \subseteq A \subseteq B$ эквивалентна системе

$$\begin{cases} A \sqcap B = B \sqcap A = B \\ E \subseteq A \end{cases}.$$

Доказательство. Так как B – вторичный идемпотент, то $B = B^{\mathcal{R}} = (B \sqcap B^T)^T$. Тогда система неравенств $E \subseteq A \subseteq B$ запишется как

$$E \subseteq A \subseteq (B \sqcap B^T)^T,$$

что равносильно

$$\begin{cases} A \sqcap B \subseteq B \\ E \subseteq A \end{cases},$$

так как $(A \subseteq (B \sqcap B^T)^T) \leftrightarrow (A \sqcap B \subseteq B)$ (см. [2, теорема 2.1]). Учитывая, что $E \subseteq A$ влечёт $E \sqcap B \subseteq A \sqcap B$, из последней системы следует $B \subseteq A \sqcap B \subseteq B$, то есть $A \sqcap B = B$. Таким образом, из системы неравенств $E \subseteq A \subseteq B$ следует система

$$\begin{cases} A \sqcap B = B \\ E \subseteq A \end{cases}.$$

Справедливость обратной импликации очевидна. Следовательно,

$$\begin{cases} A \sqcap B = B \\ E \subseteq A \end{cases} \leftrightarrow E \subseteq A \subseteq B.$$

С другой стороны, так как B – вторичный идемпотент, то $B = B^{\mathcal{L}} = (B^T \sqcap B)^T$. Тогда, применяя эквивалентность неравенств $(A \subseteq B^T \sqcup B) \leftrightarrow (B \sqcap A \subseteq B)$, получаем эквивалентность

$$\begin{cases} B \sqcap A = B \\ E \subseteq A \end{cases} \leftrightarrow E \subseteq A \subseteq B.$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} A \sqcap B = B \sqcap A = B \\ E \subseteq A \end{cases} \leftrightarrow E \subseteq A \subseteq B. \quad \square$$

Утверждения лемм 2 и 3 и то, что каждый вторичный идемпотент содержит единичную матрицу (теорема 1), позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть A и B – вторичные идемпотенты частичной полугруппы $\langle M(\mathbb{B}), \sqcap \rangle$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) уравнение $A \sqcap X = B$ имеет решение;
- 2) уравнение $X \sqcap A = B$ имеет решение;
- 3) $A \subseteq B$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Поплавский В. Б. О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2011/2012. Т. 17, вып. 4. С. 181–192 (Translation: *Poplavski V.B. On applications of associativity of dual compositions in the algebra of Boolean matrix // J. of Mathematical Sciences*. N. Y. Springer, 2013. Vol. 191, № 5. P. 718–725).
2. Поплавский В. Б. Об идемпотентах алгебры булевых матриц // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 26–33.
3. Кумаров В. Б. Решетка идемпотентных матриц над дистрибутивными решетками // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2007. Т. 13, вып. 4. С. 121–144.
4. Щекатурова О. О., Ярошевич В. А. О свойствах булевых матриц // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 2. С. 137–142.

УДК 519.8

В. В. Розен

ДОПУСТИМЫЕ ИСХОДЫ В ИГРАХ С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

Цель данной работы состоит в распространении принципа допустимости на класс игр с отношениями предпочтения. Основным результатом является теорема 1, дающая достаточные условия существования допустимых исходов в играх с отношениями предпочтения игроков [1, 2].

Основным теоретико-игровым принципом оптимальности является принцип равновесия по Нэшу. Однако поскольку принцип равновесия обладает универсальной реализуемостью только в смешанных стратегиях (представляющих собой вероятностные меры на множествах чистых стратегий игроков), в теории игр были предложены также другие принципы оптимальности, важнейшим из которых является принцип допустимости ситуации или исхода игры [3, 4].

Формально *игра с отношениями предпочтения общего вида* может быть задана в виде набора:

$$G = \langle N, (X_i)_{i \in N}, A, (\rho_i)_{i \in N}, F \rangle, \quad (1)$$

где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество игроков, X_i – множество стратегий игрока $i \in N$, A – множество исходов, ρ_i – бинарное отношение на множестве A , выражающее предпочтения игрока i , F – функция реализации, определенная на множестве $X = X_1 \times \dots \times X_n$ всех ситуаций игры и принимающая значения во множестве исходов A . Предполагается, что $|X_i| \geq 2$ для всех $i \in N$ и $|A| \geq 2$. Отношения ρ_i считаются рефлексивными; никаких других свойств этих отношений в общем случае не предполагается.

Для игры (1) положим $X_{N \setminus i} = \prod_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_j$. Ясно, что $X_{N \setminus i}$ может быть отождествлено с множеством всех стратегий дополнительной коалиции $N \setminus \{i\}$. Пара $(x_i, x_{N \setminus i})$, где $x_i \in X_i, x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, однозначно определяет исход игры, который обозначается через $F(x_i, x_{N \setminus i})$. Понятие возражения для игры с отношениями предпочтения выглядит следующим образом.

Определение 1. Скажем, что стратегия x_i^0 является *возражением* игрока i на исход a , если для любой стратегии $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции имеет место $F(x_i^0, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{>} a$. Исход a называется *допустимым* для игрока i , если этот игрок не имеет на него возражений. Исход a называется *допустимым* в игре G , если он допустим для всех игроков $i \in N$.

Определенным усилением понятия допустимости исхода является понятие вполне допустимости.

Определение 2. Исход a называется *вполне допустимым* в игре G вида (1), если для каждого $i \in N$ существует такая стратегия $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus \{i\}$, что при любой стратегии $x_i \in X_i$ выполнено $\neg(F(x_i, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{>} a)$. Стратегию $x_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus \{i\}$, которая удовлетворяет указанному условию, будем называть *наказующей стратегией*.

Определение 3. Ситуация игры G с отношениями предпочтения называется *допустимой*, если исход в этой ситуации является допустимым исходом игры G . Ситуация называется *вполне допустимой*, если исход в этой ситуации вполне допустим.

Из определений вытекает следующее

Утверждение 1. *Ситуация общего равновесия является вполне допустимой (а, значит, и допустимой).*

Замечание 1. Как и ситуации равновесия, допустимые и вполне допустимые ситуации игры с отношениями предпочтения обладают определенной устойчивостью. А именно, если ситуация $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$ является

допустимой в игре G , то для каждого игрока $i \in N$ и любого его потенциального отклонения от первоначально выбранной стратегии имеется «наказание» со стороны дополнительной коалиции остальных игроков.

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1), в которой множества стратегий игроков являются конечными и для каждого $i \in N$ отношение предпочтения ρ_i ациклично. Тогда в игре G существуют допустимые ситуации.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда множество исходов игры является конечным. Обозначим через \overline{D}_i множество всех исходов, на которые игрок $i \in N$ имеет возражение:

$$\overline{D}_i = \left\{ a \in A : (\exists x_i \in X_i)(\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}) F(x_i, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{>} a \right\}. \quad (2)$$

Так как по предположению множество A конечно и отношение предпочтения ρ_i ациклично, в графе строгого предпочтения $\langle A, \rho_i^* \rangle$ отсутствуют бесконечные пути, поэтому каждое непустое подмножество в A имеет максимальный элемент. Зафиксируем в каждом непустом подмножестве \overline{D}_i максимальный элемент a_i^* относительно отношения предпочтения ρ_i . Учитывая, что \overline{D}_i получаем согласно (2), что при каждом $i \in N$ существует такая стратегия $x_i^0 \in X_i$, для которой при любой стратегии $x_{N \setminus i}$ дополнительной коалиции $N \setminus \{i\}$ имеет место следующая формула:

$$F(x_i^0, x_{N \setminus i}) \stackrel{\rho_i}{>} a_i^*. \quad (3)$$

Рассмотрим ситуацию $x^0 = (x_i^0)_{i \in N}$. Так как i -я компонента этой ситуации есть стратегия x_i^0 , то в ситуации x^0 соотношение (3) будет выполнено сразу для всех i , то есть

$$(\forall i \in N) F(x^0) \stackrel{\rho_i}{>} a_i^*. \quad (4)$$

Учитывая, что элемент a_i^0 является максимальным в подмножестве \overline{D}_i , получаем из (4), что при каждом $i \in N$ выполнено $F(x^0) \notin \overline{D}_i$, то есть исход $F(x^0)$ является допустимым для всех игроков $i \in N$, а ситуация x^0 является допустимой в игре G . Утверждение теоремы 1 доказано в предположении, что множество исходов игры конечно. Случай, когда множество исходов игры является бесконечным, сводится к уже рассмотренному переходом к игре G^1 , в которой оставлены только реализуемые исходы игры G . В самом деле, из условий теоремы следует, что множество исходов игры G^1 является конечным, следовательно, по уже доказанному игра G^1 имеет допустимый исход.

Легко проверить, что указанный исход будет также допустимым и в игре G .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В. Допустимые исходы для веерных структур коалиций // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 54–57.
2. Розен В. В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2013. 284 с.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики : пер. с фр. М : Мир, 1985. 200 с.
4. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях. М. : Наука, 1990. 256 с.

УДК 514.133

Л. Н. Ромакина

О ПЛОЩАДИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОРИЦИКЛИЧЕСКОГО n -РЕБЕРНИКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В работе доказаны формулы площади эллиптического орициклического n -реберника гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны.

Учение о вписанных в окружность многоугольниках евклидовой плоскости имеет богатую историю. Пройдя путь становления как минимум от работ древнегреческих ученых, оно сохраняет свою актуальность и в наши дни (см., например, [1]). С развитием геометрии плоскости Лобачевского появился класс задач об исследовании вписанных многоугольников этой плоскости. С выходом исследований на идеальную область плоскости Лобачевского и развитием геометрии гиперболической плоскости \hat{H} положительной кривизны круг задач о вписанных многоугольниках расширился принципиально. Это обусловлено следующим. Во-первых, плоскость \hat{H} содержит прямые трех топологических типов, а все ее углы относятся к пятнадцати типам, инвариантным относительно фундаментальной группы [2]. Во-вторых, на \hat{H} существуют циклы четырех типов [3] (в отличие от трех на плоскости Лобачевского). И, пожалуй, наиболее ярким отличием плоскости \hat{H} от плоскости Лобачевского является то обстоятельство, что конечные замкнутые линии на \hat{H} могут быть двух типов, односторонними, удаление которых из плоскости не нарушает ее связность, и двусторонними, разбивающими \hat{H} на две связные части. Простую двустороннюю ломаную вместе с ограниченной

ею гомеоморфной диску частью плоскости \widehat{H} называют n -реберником [2, 4]. Исследование n -реберников, вписанных в орицикл плоскости \widehat{H} , названных *орициклическими*, начато в работе [5] установлением зависимости между длинами ребер *эллиптического орициклического n -реберника*. Все ребра такого n -реберника — внутренние эллиптические хорды некоторого орицикла.

Согласно определению (см. [5]) внутренние углы при основании эллиптического орициклического n -реберника — эллиптические углы, следовательно, их меры — вещественные положительные числа (см. [2, п. 4.5.2]). Внутренние углы при вершинах, не принадлежащих основанию, — эллиптические псевдоуглы, мерами которых служат числа вида $i\pi - v$, где $v \in \mathbb{R}_+$ (см. [2, п. 4.5.4]).

Пусть $F = B_1 B_2 \dots B_n$ — эллиптический орициклический n -реберник плоскости \widehat{H} с основанием $B_1 B_n$. Величину внутреннего угла при вершине B_q n -реберника F обозначим $i\pi - \beta_q$, $q = 2, \dots, n-1$; величины внутренних углов при вершинах B_1, B_n основания обозначим соответственно α_1, α_n .

По теореме о площади обобщенного n -реберника плоскости \widehat{H} (теорема 3.1 из [6]) вычислим площадь S n -реберника F :

$$\begin{aligned} S &= \rho^2 \left(\alpha_1 + \alpha_n + \sum_{j=2}^{n-1} (i\pi - \beta_j) - i\pi(n-2) \right) = \\ &= \rho^2 \left(\alpha_1 + \alpha_n - \sum_{j=2}^{n-1} \beta_j \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — радиус кривизны плоскости \widehat{H} , $\rho \in \mathbb{R}_+$.

На основании выражения (1) выполняется следующая теорема.

Теорема 1. *На плоскости \widehat{H} радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, площадь S эллиптического орициклического n -реберника, модули вещественных частей мер внутренних углов при вершинах которого равны $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, может быть вычислена по формуле*

$$S = \rho^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j. \quad (2)$$

Обозначим длину основания n -реберника F символом b , а длины его остальных ребер — символами b_1, b_2, \dots, b_{n-1} . По теореме 2 из [4] справедливо соотношение

$$\sin \frac{b}{2\rho} = \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{b_j}{2\rho}. \quad (3)$$

Пусть F_1, F_2, \dots, F_n — сегменты описанного около F орицикла, ограниченные внутренними эллиптическими хордами $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$ соответственно. Тогда

$$F = \bigcup_{i=1}^{n-1} B_iB_{i+1} \cup \left[F_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j \right]. \quad (4)$$

Учитывая представление (4), запишем равенство, связывающее площади $S(F), S(F_1), \dots, S(F_n)$ фигур соответственно F, F_1, \dots, F_n :

$$S(F) = S(F_n) - \sum_{j=1}^{n-1} S(F_j). \quad (5)$$

В работе [7, раздел 5.6] доказана формула выражения площади S_s сегмента орицикла плоскости \widehat{H} , ограниченного внутренней эллиптической хордой длиной a :

$$S_s = 2\rho^2 \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right) - \sin \frac{a}{2\rho} \right]. \quad (6)$$

Применяя формулы (4)–(6), получим цепочку выражений:

$$S(F) = 2\rho^2 \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{4\rho} \right) - \sin \frac{b}{2\rho} - \sum_{j=1}^{n-1} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_j}{4\rho} \right) - \sin \frac{b_j}{2\rho} \right] \right],$$

$$S(F) = 2\rho^2 \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{4\rho} \right) \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_j}{4\rho} \right) \right], \quad (7)$$

$$S(F) = 2\rho^2 \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{b_j}{2\rho}}}{\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{b_j}{2\rho}}} \prod_{j=1}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_j}{4\rho} \right) \right]. \quad (8)$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *На плоскости \widehat{H} радиуса кривизны $\rho, \rho \in \mathbb{R}_+$, площадь S эллиптического орициклического n -реберника с длинами b_1, b_2, \dots, b_{n-1} неосновных ребер может быть вычислена по формуле (8).*

В работе [8] введена функция $\tilde{\alpha}(x)$ угла квазипараллельности, выражающая зависимость вещественной части меры квазиугла параллельности в точке плоскости \widehat{H} относительно гиперболической прямой от расстояния $x, x \in (0; \pi\rho/2)$, данной точки до указанной прямой. Используя выражение функции $\tilde{\alpha}(x)$ и формулу (7), сформулируем следующую теорему.

Теорема 3. На плоскости \widehat{H} радиуса кривизны ρ , $\rho \in \mathbb{R}_+$, площадь S эллиптического орициклического n -реберника с длинами b_1, b_2, \dots, b_{n-1} неосновных ребер и длиной b основания может быть вычислена по формуле

$$S(F) = 2\rho^2 \left[\tilde{\alpha} \left(\frac{b}{2} \right) - \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha} \left(\frac{b_j}{2} \right) \right].$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сабитов И. Х.* Решение циклических многоугольников // Математическое просвещение. 2010. Вып. 14. С. 83–106.
2. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.
3. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.
4. *Ромакина Л. Н.* О параболических многогранниках копсевдоевклидова пространства // Вестн. КГПУ им. В.П. Астафьева. 2013. № 1 (23). С. 201–206.
5. *Ромакина Л. Н., Чурилова В. О.* Эллиптические орициклические n -реберники плоскости \widehat{H} // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та. 2015. Вып. 17. С. 56–59.
6. *Romakina L. N.* The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2016. Vol. 10, iss. 4. P. 293–310.
7. *Ромакина Л. Н.* Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n -трапециями // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 3. С. 376–416.
8. *Ромакина Л. Н.* Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ЭЛЕМЕНТАМ НЕРЕГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В статье рассмотрен сильно нерегулярный пучок 3-го порядка с кратными характеристиками. Получены достаточные условия трехкратного разложения вектор-функции по корневым элементам этого пучка.

Рассмотрим краевую задачу для пучка $L(\lambda)$:

$$y''' - 3\lambda y'' + 3\lambda^2 y' - \lambda^3 y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y'(0) = 0, \quad U_3(y) := y(1) - y''(0) = 0. \quad (2)$$

Характеристический многочлен пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$. Система $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$ образует фундаментальную систему решений уравнения (1). Характеристический определитель $\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j))_{\nu, j=\overline{1,3}} = e^\lambda - 2$ является вырожденным, а пучок $L(\lambda)$ — нерегулярным [1, с. 66–67]. Числа $\lambda_k = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, есть собственные значения (с.з.) пучка.

Решается задача нахождения условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, при которых имеет место трехкратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]), соответствующим его корневым элементам (к.э.).

В нерегулярном случае оператора 1-го и 2-го порядков с кусочно-постоянной весовой функцией задача о разложении решена в [2]. В нерегулярном случае оператора 3-го порядка, когда характеристики лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [3]. Обобщение на порядок $n = 4k + 1$ сделано в [4]. Разложения по к.э. в случае регулярного пучка с 4-х кратными характеристиками изучались в [5]. Случай нерегулярного пучка 2-го порядка с простыми характеристиками рассматривался в [6].

Обозначим через Γ_ν круговые контуры в λ -плоскости с центрами в начале координат и радиуса $\sqrt{\ln^2 2 + 4\pi^2(\nu + 1/2)^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $G(x, t, \lambda)$ есть функция Грина задачи (1), (2). Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ определим функцию

$$F(x, \lambda) := -\lambda^2 f_1(x) + \lambda(-3f_1'(x) + f_2(x)) + (3f_1''(x) - 3f_2'(x) + f_3(x)).$$

Теорема 1. Если в.-ф. f удовлетворяет условиям:

$$f_1^{(5)}, f_2^{(4)}, f_3^{(3)} \in L_p[0, 1], \quad 1 < p \leq +\infty, \quad (3)$$

$$f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad s = \overline{0, 5-j}, \quad (4)$$

то имеют место следующие формулы трехкратного разложения в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^{s-1} \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(x, \lambda) d\lambda = \\ = f_s(x) + x(1-x)\varphi_1^{(s-1)}(x) + (x^2-1)\varphi_2^{(s-1)}(x), \quad s = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

где сходимость равномерная по $x \in [0, 1]$ и

$$\varphi_1(x) := x f_1''(x) - f_1'(x) - 2x f_2'(x) + f_2(x) + x f_3(x),$$

$$\varphi_2(x) := \frac{x^2}{2} f_1''(x) - x f_1'(x) + f_1(x) - x^2 f_2'(x) + x f_2(x) + \frac{x^2}{2} f_3(x).$$

Теорема 2. Пусть в.-ф. f удовлетворяет условиям (3), (4). Для того чтобы имели место формулы трехкратного разложения в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$ с равномерной сходимостью

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} \lambda^{s-1} \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(x, \lambda) d\lambda = f_s(x), \quad s = \overline{1, 3}, \quad x \in [0, 1],$$

необходимо и достаточно, чтобы при $x \in [0, 1]$ выполнялись тождества $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 1 проводится путем линеаризации задачи (1), (2) подстановкой $z_1 = y$, $z_2 = \lambda z_1$, $z_3 = \lambda z_2$. В результате получается краевая задача на с.з. для дифференциального оператора \hat{L} в пространстве в.-ф. $z = (z_1, z_2, z_3)^T$: $\hat{L}z - \lambda z = 0$, где

$$\hat{L}z := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{d^3}{dx^3} & -3\frac{d^2}{dx^2} & 3\frac{d}{dx} \end{pmatrix} z,$$

$$D_{\hat{L}} = \{z \mid z_1'', z_2', z_3 \in L_1[0, 1], z_1(0) = 0, z_1'(0) = 0, z_1(1) - z_1''(0) = 0\}.$$

С.з. пучка $L(\lambda)$ и оператора \hat{L} совпадают, а система производных цепочек $L(\lambda)$ совпадает с системой к.э. оператора \hat{L} .

Пусть $(\hat{L} - \lambda E)^{-1} f = (z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda))^T$. В доказательстве теоремы 1 используются явные формулы для функций $z_j(x, \lambda)$, $j = \overline{1, 3}$.

Лемма 1. Если $f_1'', f_2', f_3 \in L_1[0, 1]$, то

$$z_1(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(t, \lambda) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda) dt - \frac{1}{e^\lambda - 2} \int_0^1 \frac{x^2(1-t)^2}{2} e^{\lambda(x+1-t)} F(t, \lambda) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0;$$

$$z_1(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) F(t, \lambda) dt = - \int_x^1 \frac{(x-t)^2}{2!} e^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda) dt +$$

$$+ \int_0^1 \left((x^2 - x)t + (1 - x^2) \frac{t^2}{2} \right) e^{\lambda(x-t)} F(t, \lambda) dt -$$

$$- \frac{1}{1 - 2e^{-\lambda}} \int_0^1 x^2 (t-1)^2 e^{\lambda(x-1-t)} F(t, \lambda) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0;$$

$$z_2(x, \lambda; f) = \lambda z_1(x, \lambda) + f_0(x);$$

$$z_3(x, \lambda; f) = \lambda^2 z_1(x, \lambda) + \lambda f_1(x) + f_2(x).$$

Дальнейшее доказательство аналогично, как в [6].

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Хромов А. П., Гуревич А. П.* Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 3–15.
3. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка // Исследования по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182–193.
4. *Дмитриев О. Ю.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора n -го порядка с нерегулярными краевыми условиями // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т. 7, вып. 2. С. 10–14.
5. *Вагабов А. И., Абуд А. Х.* Четырехкратная разложимость в ряды Фурье по корневым элементам дифференциального пучка с четырехкратной характеристикой // Вестн. Дагест. гос. ун-та. 2015. Т. 30, вып. 1. С. 34–39.
6. *Рыхлов В. С.* Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 21–26.

ОДНОСТОРОННИЙ ПРИЗНАК ДИНИ–ЛИПШИЦА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ

Установлена достаточность принадлежности аппроксимируемой функции одностороннему классу Дини–Липшица для возможности равномерного внутри отрезка приближения операторами синк-аппроксимаций. Отдельно рассматривается возможность равномерного приближения на всём отрезке.

В работе изучаются аппроксимативные свойства операторов, впервые предложенные в [1, 2], вида

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{sinc}(nx - k\pi) f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\operatorname{sinc} t := \frac{\sin t}{t}$. Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathcal{N}$. Подробное изучение необходимых и достаточных условий поточечной и равномерной сходимости этих интерполяционных процессов на отрезке $[0, \pi]$ содержится в [1–32].

Обозначим через Ω множество действительных непрерывных неубывающих, выпуклых вверх на $[0, b - a]$ ($[a, b] \subset [0, \pi]$), исчезающих в нуле функций ω . А через $C(\omega^l, [a, b])$ и $C(\omega^r, [a, b])$ — совокупность элементов $C[a, b]$ таких, что для любых x и $x + h$ ($a \leq x < x + h \leq b$) справедливы неравенства $f(x + h) - f(x) \geq -K_f \omega(h)$ или $f(x + h) - f(x) \leq K_f \omega(h)$ соответственно, где $\omega \in \Omega$. Выбор положительных констант K_f может зависеть только от функции f .

Теорема 1. Пусть $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < \varepsilon < (b - a)/2$. Если функция $\omega \in \Omega$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \ln n = 0, \quad (2)$$

то для любой, непрерывной на $[0, \pi]$ функции $f \in C(\omega^l[a, b])$ ($f \in C(\omega^r[a, b])$) выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f, \cdot)\|_{C[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} = 0. \quad (3)$$

Пусть $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$. Будем обозначать $C_0(\omega^l[0, \pi]) = C(\omega^l[0, \pi]) \cap C_0[0, \pi]$ ($C_0(\omega^r[0, \pi]) = C(\omega^r[0, \pi]) \cap C_0[0, \pi]$).

Теорема 2. Если функция $\omega \in \Omega$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(1/n) \ln n = 0$, то для любой функции $f \in C_0(\omega^l[0, \pi])$ ($f \in C_0(\omega^r[0, \pi])$) выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - L_n(f, \cdot)\|_{C[0, \pi]} = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Рассуждая аналогично доказательству соотношения [4, (36)], разобьём на два слагаемых сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=k_1, \\ k \neq p_0}}^{k_2} \left| \frac{f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n})}{p_0 - k} \right| &= \sum_{\substack{k=k_1, \\ k \neq p_0}}^{k_2} \frac{f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n})}{|p_0 - k|} - \\ &- 2 \sum_{\substack{k=k_1, \\ k \neq p_0}}^{k_2} \frac{f(x_{k+1, n}) - f(x_{k, n})}{|p_0 - k|}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $p_0 = [xn/\pi]$, k_1 и k_2 – номера наименьшего и наибольшего из узлов $x_{k, n}$, попадающих в отрезок $[a, b]$, а два штриха означают, что в сумме отсутствуют неотрицательные слагаемые. После чего убеждаемся, что для непрерывной функции модуль первого слагаемого равномерно стремится к нулю, а условие (2) гарантирует убывание максимума модуля второго слагаемого при $n \rightarrow \infty$ для функций из классов $f \in C_0(\omega^l[a, b])$. Осталось воспользоваться [11, предложение 9]. Доказательства соотношений (3), когда $f \in C(\omega^r[a, b])$, и (4) для случая $a = 0, b = \pi$ аналогичны.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А. Ю. Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа–Штурма–Лиувилля // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 10-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. С. 140–141.
2. Трынин А. Ю. Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика. : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 124–127.
3. Trynin A. Yu., Sklyarov V. P. Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing. 2008. Vol. 7, № 3. P. 263–270.
4. Трынин А. Ю. Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 10. С. 141–158.

5. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. вузов. Сер. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.
6. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East Journal on Approximations. 2008. Vol. 14, № 2. P. 183–192.
7. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ. 2010. Vol. 22, № 4. P. 232–256.
8. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимский мат. журн. 2015. № 4116–132.
9. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ. 2015. Vol. 27, № 5. P. 170–194.
10. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. вузов. Сер. Математика. 2016. № 3. С. 72–81.
11. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 11. С. 61–108.
12. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби // Изв. РАН. Сер. математическая. 2011. Т. 75, № 6. С. 129–162.
13. *Трынин А. Ю.* Существование систем Чебышёва с ограниченными константами Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 79–81.
14. *Трынин А. Ю.* Пример системы Чебышёва с почти всюду сходящейся к нулю последовательностью функций Лебега интерполяционных процессов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 74–76.
15. *Трынин А. Ю.* Об одном признаке типа Дини–Лишшица сходимости обобщённых интерполяционных процессов Уиттекера–Котельникова–Шеннона // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 83–87.
16. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях равномерной и поточечной сходимости интерполяционных процессов по взвешенным многочленам Якоби // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 96–100.
17. *Трынин А. Ю.* Об одной модификации аналога формулы Неваи для синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 78–81.
18. *Трынин А. Ю.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля/Сарат. ун-т. Саратов, 1991. 32 с. Деп. в ВИНТИ 26.04.1991, № 1763–В91.
19. *Трынин А. Ю.* Об одном признаке сходимости интерполяционных процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля/Сарат. ун-т. Саратов, 1991. 33 с. Деп. в ВИНТИ 27.05.1991, № 2201–В91.
20. *Трынин А. Ю.* О полноте линейных комбинаций синков в $C[0, \pi]$ // Современные проблемы математики, механики и их приложений : материалы междунар. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовниченко. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 98–99.
21. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Современные проблемы математики, механики и их приложений : тез. междунар. конф., посвящ. 90-летию С. Б. Стечкина. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2010. С. 75–76.
22. *Трынин А. Ю.* Критерии равномерной сходимости синк-приближений на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 13-й Сарат. зимн. шк. Саратов : Науч. книга, 2006. С. 176–178.

23. *Трынин А. Ю.* Одно обобщение теоремы дискретизации // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 14-й Саратов. зимн. шк., посвящ. памяти акад. П. Л. Ульянова. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С.189–190.

24. *Трынин А. Ю.* Об одном обобщении теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. 15-й Саратов. зимн. шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. С. 175–176.

25. *Трынин А. Ю.* О равносходимости операторов интерполирования по решениям задачи Коши и многочленов Лагранжа–Якоби // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Саратов. зимн. шк. Саратов : Науч. книга, 2012. С. 178–179.

26. *Трынин А. Ю.* Функция Грина интерполяционного оператора Лагранжа–Штурма–Лиувилля // Теория функций её приложения и смежные вопросы : Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского : материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань : Изд-во Казан. мат. о-ва, 1999. 228 с.

27. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций одним интерполяционным оператором // Теория функций её приложения и смежные вопросы : Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского : материалы Седьмой междунар. Казан. летн. науч. шк.-конф. Казань : Изд-во Казан. мат. о-ва, 2005. Т. 30. С. 155–156.

28. *Трынин А. Ю.* О константах Лебега интерполяционных процессов по системам Чебышёва // Теория функций её приложения и смежные вопросы : Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского : материалы Восьмой междунар. Казан. летн. науч. шк.-конф. Казань : Изд-во Казан. мат. об-ва, 2007. Т. 35. С. 248–249.

29. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций на отрезке //Ряды Фурье и их приложения : тез. докл. Ростов н/Д : Изд-во Южн. федер. ун-та, 2012. С. 36–37.

30. *Трынин А. Ю.* Сходимость интерполяционных процессов по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1991. 32 с.

31. *Трынин А. Ю.* Операторы интерполирования и аппроксимация непрерывных функций : автореф. : дис. ... д-ра физ.-мат. наук ; Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 2013.

32. *Bulanova A.V., Sklyarov V.P., Trynin A.Yu* On inequality connected with laguerre weight // Indian J. of Pure and Applied Mathematics. 2002. Vol. 33, № 8. P. 1183–1186.

УДК 519.642.8

А. А. Хромов

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a_0(x)u''(x) + a_1(x)u'(x) + a_2(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где $a_i(x) \in C[0, 1], i = 0, 1, 2, u(x) \in C^2[0, 1]$ и удовлетворяет произвольным краевым условиям, лишь бы они обеспечивали существование и единственность решения краевой задачи. Предполагается, что нам известно среднеквадратичное приближенное $u_\delta(x)$ к точному решению $u(x)$ уравнения (1) и при этом $\|u_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta$, требуется по $u_\delta(x)$ и δ найти среднеквадратичное приближение к точной правой части $f(x)$. Это одна из задач, к которым приводят обратные задачи математической физики, например, обратная задача для уравнения теплопроводности [1]. Приближенное решение этой задачи при $a_1(x) = a'_0(x)$ в частном случае краевых условий получено в [2]. Оно состоит из двух этапов. На первом этапе строится последовательность функций:

$$f_\delta^\alpha = a_0(x)T_\alpha^{(2)}u_\delta + a_1(x)T_\alpha u_\delta + a_2(x)u_\delta,$$

где

$$T_\alpha u = \begin{cases} DS_{\alpha_2}^2 u \equiv T_{\alpha_2} u, x \in [0, \frac{1}{2}] \\ DS_{\alpha_1}^2 u \equiv T_{\alpha_1} u, x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

оператор $T_\alpha^{(2)}$ составлен из квадратов операторов T_{α_1} и T_{α_2} , $\alpha \leq \frac{1}{8}$,

$$S_{\alpha_1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x u(t) dt, S_{\alpha_2} u = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} u(t) dt,$$

D – оператор дифференцирования. На втором этапе выбирается согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{5}{2}} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Оно обеспечивает сходимость

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_2} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Пусть теперь нам известна дополнительная информация о точном решении $u(x)$:

$$u''(x) \in Lip_M \beta, \quad 0 < \beta \leq 1.$$

В этом случае мы укажем конкретную формулу для $\alpha = \alpha(\delta)$ и приведем оценку погрешности приближенного решения поставленной задачи.

Теорема. Если $u''(x) \in Lip_M \beta$, $0 < \beta \leq 1$, то справедлива оценка

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_2} \leq C_1 \delta^{\frac{2\beta}{2\beta+5}} + C_2 \delta^{\frac{2}{2\beta+5}} + C_3 \delta^{\frac{2+2\beta}{2\beta+5}} + A_2 \delta,$$

где

$$\alpha(\delta) = C \delta^{\frac{2}{2\beta+5}}, \tag{2}$$

$$C = (25(\beta M))^{-2} 3^{-1} 2^{1-4\beta} \frac{1}{2\beta+5},$$

$$C_1 = A_0 2^{2\beta} (2\beta + 5) \left(\frac{M}{5}\right)^{\frac{5}{2\beta+5}} (\beta^{-2} 3^{-1})^{\frac{\beta}{2\beta+5}},$$

$$C_2 = A_1 M_1 (25(\beta M)^{-2} 3^{-1} 2^{6-2\beta})^{\frac{1}{2\beta+5}},$$

$$C_3 = A_1 (2^{7\beta+1} (\beta M 3^{\frac{1}{2}} 5^{-1})^3)^{\frac{1}{2\beta+5}},$$

$$A_j = \|a_j(x)\|_C, \quad j = 0, 1, 2$$

$$M_1 = \|u''\|_C.$$

Доказательство. Запишем оценку

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_2} \leq A_0 \|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\| + A_1 \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_2} + A_2 \|u_\delta - u\|_{L_2}$$

в виде

$$\begin{aligned} \|f_\delta^\alpha - f\|_{L_2} \leq A_0 \|T_2^{(2)} u - u''\|_{L_2} + A_0 \delta \|T_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \rightarrow L_2} + A_1 \|T_\alpha u - u'\|_{L_2} + \\ + A_1 \delta \|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_2} + A_2 \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Из ограниченности функции $u''(x)$ следует, что $u'(x) \in Lip_{M_1} 1$ (обозначения указаны в формулировке теоремы). Далее, из равенств:

$$T_{\alpha_j} u = S_{\alpha_j}^2 u', \quad T_{\alpha_j}^2 u = S_{\alpha_j}^4 u''$$

вытекают оценки:

$$\begin{aligned} \|T_{\alpha_j} u - u'\|_C &\leq \omega(2\alpha, u'), \\ \|T_{\alpha_j}^2 u - u''\|_C &\leq \omega(4\alpha, u''), \end{aligned} \quad (4)$$

где $C = C[0, \frac{1}{2}]$ при $j = 2$, $C = C[\frac{1}{2}, 1]$ при $j = 1$, $\omega(2\alpha, u')$, $\omega(4\alpha, u'')$ – модули непрерывности функций $u'(x)$ и $u''(x)$ Но

$$\omega(2\alpha, u') \leq 2M_1 \alpha, \quad \omega(4\alpha, u'') \leq 4^\beta M \alpha^\beta. \quad (5)$$

В [2] получены оценки:

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \sqrt{2} \alpha^{\frac{-3}{2}}, \quad \|T_\alpha^{(2)}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^{\frac{-5}{2}}. \quad (6)$$

Подставляем (4), (5), (6) в (3). Получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_2} \leq \bar{C}_1 \alpha^\beta + \bar{C}_2 \delta \alpha^{\frac{-5}{2}} + \bar{C}_3 \alpha + \bar{C}_4 \delta \alpha^{\frac{-3}{2}} + A_2 \delta, \quad (7)$$

где

$$\bar{C}_1 = A_0 4^\beta M, \quad \bar{C}_2 = A_0 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \bar{C}_3 = 2A_1 M_1, \quad \bar{C}_4 = A_1 \sqrt{2}.$$

Выделим из правой части оценки (7) «главную» часть. Это будет функция

$$\Phi(\alpha, \delta) = \bar{C}_1 \alpha^\beta + \bar{C}_2 \delta \bar{\alpha}^{\frac{-5}{2}},$$

и выберем $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия минимума этой функции. Тогда придем к формуле (2). Подставляем (2) в (7). При этом объединяем первые два слагаемых в одно, поскольку они содержат одну и ту же степень δ . Проводим вычисления и приходим к оценке в теореме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.

2. Хромов А. А. О решении одной обратной задачи // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 18-й междунар. Саратов. зимн. шк. (Саратов, 27 янв. – 3 февр. 2016). Саратов : Науч. книга, 2016. С. 305–307.

УДК 517.968

А. А. Хромов, Г. В. Хромова

РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕЕ СЕМЕЙСТВО ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Рассматривается модифицированное уравнение Абеля, содержащее инволюцию:

$$Au \equiv \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $0 < \beta < 1$, $\Gamma(\beta)$ — гамма функция. Пусть нам известно, что при данной $f(x)$ существует непрерывная функция $u(x)$, являющаяся решением уравнения (1), но вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x)$ такая, что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

В данной работе приводится формула обращения для уравнения (1), а также семейство операторов, позволяющее по $f_\delta(x)$ и δ получать равномерные приближения к $u(x)$.

Теорема 1. *Справедлива формула обращения:*

$$U = A^{-1}f = \frac{d}{dx} \int_{1-x}^1 \frac{(t - (1-x))^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} f(t) dt. \quad (2)$$

Доказательство получится, если мы в (1) сначала сделаем замену переменной $1-x$ на x_1 , затем обозначим $f(1-x) = g(x)$, воспользуемся

формулой обращения для классического уравнения Абеля и, наконец, в этой формуле перейдем от $g(t)$ к $f(1-t)$.

Построим семейство регуляризующих операторов для уравнения (1) по аналогии с [1]: возьмем разрывный оператор Стеклова

$$S_\alpha u = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} u(t) dt, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x u(t) dt, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

и семейство $R_\alpha = S_\alpha A^{-1}$, где A^{-1} определен в (2).

Теорема 2. *Операторы R_α являются интегральными операторами с ядрами $R_\alpha(x, t)$, имеющими вид*

$$R_\alpha(x, t) = \begin{cases} [\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1} R_{\alpha 2}(x, t), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ [\alpha\Gamma(1-\beta)]^{-1} R_{\alpha 1}(x, t), & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$R_{\alpha 1}(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1-x, \\ (t-(1-x))^{-\beta}, & 1-x < t \leq 1-x+\alpha, \\ (t-(1-x)-\alpha)^{-\beta} - (t-(1-x))^{-\beta}, & 1-x+\alpha < t \leq 1, \end{cases}$$

$$R_{\alpha 2}(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1-x-\alpha, \\ (t-(1-x)+\alpha)^{-\beta}, & 1-x-\alpha < t \leq 1-x, \\ (t-(1-x)+\alpha)^{-\beta} - (t-(1-x))^{-\beta}, & 1-x < t \leq 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Операторы $R_{\alpha j}$, $j = 1, 2$ при $0 < \beta < \frac{1}{2}$ являются линейными ограниченными при каждом значении α операторами, действующими из $L_2[0, 1]$ в $C[\frac{1}{2}, 1]$ при $j = 1$ и в $C[0, \frac{1}{2}]$ при $j = 2$.*

Будем считать операторы R_α , действующими из $L_2[0, 1]$ в $L_\infty[0, 1]$, где

$$\|\bullet\|_{L_\infty} = \max \{ \|\bullet\|_{C[0, \frac{1}{2}]}, \|\bullet\|_{C[\frac{1}{2}, 1]} \}.$$

Тогда справедлива

Теорема 4. *Операторы R_α являются регуляризующими для уравнения (1).*

Доказательство вытекает из теоремы 3, из того, что $R_\alpha A \equiv S_\alpha$, а $\|S_\alpha u - u\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, и из определения регуляризующего оператора [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. Регуляризация уравнения Абеля с помощью разрывного оператора Стеклова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 599–603
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М. : Наука. 1978. 206 с.

УДК 516.9

В. Р. Шебалдин

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Настоящая статья содержит доказательство необходимых условий экстремума для линейной задачи оптимального управления с недифференцируемым критерием качества в форме максиминной задачи. Данная формулировка необходимых условий экстремума может быть использована для построения численного алгоритма решения данной задачи.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: с линейными дифференциальными связями на конечном отрезке времени

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

с ограничениями на управление

$$u(t) \in U, \quad \text{для почти всех } t \in [t_0, T], \quad (2)$$

и с недифференцируемым критерием качества вида

$$J(x, u) = \int_{t_0}^T \{|g(u(t))| + |\phi(x(t))|\} dt \rightarrow \min, \quad (3)$$

где A —матрица размерности $n \times n$, B —вектор размерности $n \times 1$, $g(u)$, $\phi(x)$ — дифференцируемые, скалярные функции, $x(t) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $U \subset R^1$ —ограниченное, замкнутое множество.

Обозначим: $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ —оптимальная пара исходной задачи.

Функции $u(t)$ будем считать допустимыми, если они являются измеримыми функциями и удовлетворяют ограничению (2). Множество допустимых управлений в задаче (1)–(3) будем обозначать символом V .

В настоящей работе, как и в статье [1], с помощью теоремы Дубовицкого–Милютина (см.[2]) будут доказаны необходимые условия

экстремума в виде максиминной задачи. Для этой цели нужно построить конус запрещенных вариаций и ему сопряженный, соответствующих функционалу (3).

Доказывается лемма.

Лемма. *Пара функций (x, u) принадлежит конусу запрещенных вариаций тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} & \int_{N^+ \cup N^-} g'(\hat{u})u(t)\text{sign}(g(\hat{u}(t)))dt + \\ & + \int_{M^+ \cup M^-} \text{grad}^T \phi(\hat{x})x(t)\text{sign}(\phi(\hat{x}))dt < 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$N^+ = \{t \in [t_0, T] \mid g(\hat{u}(t)) > 0\}, \quad N^- = \{t \in [t_0, T] \mid g(\hat{u}(t)) < 0\}.$$

$$M^+ = \{t \in [t_0, T] \mid \phi(\hat{x}(t)) > 0\}, \quad M^- = \{t \in [t_0, T] \mid \phi(\hat{x}(t)) < 0\}.$$

Результаты леммы используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть (\hat{x}, \hat{u}) – оптимальная пара задачи (1)–(4). Тогда существуют такие интегрируемые функции $\psi_j(t), \bar{\psi}_l(t) \in R^n$, что имеют место следующие уравнения:*

$$\max_{u(t) \in V} \min_{(i,j) \in M_0} \int_{t_0}^T \Delta H_{i,j}(u, t) dt = 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta H_{i,j} = \begin{cases} (g'(\hat{u}) + \psi_j^T(t)B)(u(t) - \hat{u}) & \text{при } t \in \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^+ \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^+, \end{cases} \quad (6)$$

$$\Delta H_{i,j} = \begin{cases} (-g'(\hat{u}) + \psi_j^T(t)B)(u(t) - \hat{u}) & \text{при } t \in \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^- \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^-, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Delta H_{i,j} = \begin{cases} (g'(\hat{u}) - \bar{\psi}_j^T(t)B)(u(t) - \hat{u}) & \text{при } t \in \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^+ \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^+, \end{cases} \quad (8)$$

$$\Delta H_{i,j} = \begin{cases} (-g'(\hat{u}) - \bar{\psi}_j^T(t)B)(u(t) - \hat{u}) & \text{при } t \in \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^- \\ 0 & \text{при } t \notin \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^-, \end{cases} \quad (9)$$

$$M_0 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4,$$

$$M_1 = \{(i, j) \mid \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^+ \neq \emptyset\}, j \in J_1, i \in I_1; M_2 = \{(i, j) \mid \Delta_j^+ \cap \tilde{\Delta}_i^- \neq \emptyset\}, j \in J_1,$$

$$\begin{aligned}
i \in I_2; M_3 = \{(i, j) | \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^+ \neq \emptyset\}, j \in J_2, i \in I_1; M_4 = \{(i, j) | \Delta_j^- \cap \tilde{\Delta}_i^- \neq \emptyset\}, \\
j \in J_2, i \in I_2, I_1 \cup I_2 = \{i | i = \overline{1, q}\}, J_1 \cup J_2 = \{j | j = \overline{1, q_1}\}, \\
M^+ = \bigcup_{j \in J_1} \Delta_j^+, M^- = \bigcup_{j \in J_2} \Delta_j^-, N^+ = \bigcup_{i \in I_1} \tilde{\Delta}_i^+, N^- = \bigcup_{i \in I_2} \tilde{\Delta}_i^-, \\
\Delta_j^+ = (t_{2j-1}, t_{2j}), j \in J_1; \Delta_j^- = (t_{2j-1}, t_{2j}), j \in J_2; \\
\tilde{\Delta}_i^+ = (\tau_{2i-1}, \tau_{2i}), i \in I_1; \tilde{\Delta}_i^- = (\tau_{2i-1}, \tau_{2i}), i \in I_2,
\end{aligned}$$

где для $t \in \Delta_j^+$

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \tilde{\psi}_j(t), & t \in \Delta_j^+, \\ 0, & t \notin \Delta_j^+, \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_j(t) = -A^T \tilde{\psi}_j(t) + \text{grad}^T \phi(\hat{x}) \hat{x}(t), \tilde{\psi}_j(t_{2j}) = 0,$$

а для $t \in \Delta_j^-$

$$\dot{\tilde{\tilde{\psi}}}_j(t) = -A^T \tilde{\tilde{\psi}}_j(t) - \text{grad}^T \phi(\hat{x}) \hat{x}(t), \tilde{\tilde{\psi}}_j(t_{2j}) = 0,$$

$$\bar{\psi}_j(t) = \begin{cases} \tilde{\tilde{\psi}}_j(t), & t \in \Delta_j^-, \\ 0, & t \notin \Delta_j^-. \end{cases} \quad (11)$$

Доказательство. Для вывода необходимых условий экстремума применим метод Дубовицкого–Милютина. Согласно теореме 2.1 (см. [2, с. 400])

$$f_0(x, u) + f_1(x, u) + f_2(x, u) = 0,$$

где $f_i \in K_i^*, i = \overline{0, 2}, K_i^*, i = \overline{1, 2}$ – сопряженные конусы, соответствующие конусам допустимых вариаций (1)–(2), K_0^* – сопряженный конус, соответствующий конусу запрещенных вариаций. Тогда, аналогично доказательству теоремы 1.2 (см. [1]), получим неравенство

$$\begin{aligned}
& -\lambda \left\{ \int_{N^+ \cup N^-} g'(\hat{u}) u(t) \text{sign}(g(\hat{u}(t))) dt + \right. \\
& \left. + \int_{M^+ \cup M^-} \text{grad}^T(\phi(\hat{x})) x(t) \text{sign}(\phi(\hat{x})) dt \right\} \leq 0, \lambda = \text{const}, \lambda \geq 0.
\end{aligned}$$

Тогда, определив функции $\Delta H_{i,j}, \psi_j(t), \bar{\psi}_j(t)$ согласно (6)–(11), получим

$$\min_{i,j \in M_0} \int_{t_0}^T \Delta H_{i,j} dt \leq 0.$$

Откуда следует доказательство теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. М. : 1989. Деп. в ВИНТИ 23.05.89, № 2999-В89ДЕП, 37 с.

2. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Вып. 5, № 3. С. 395–453.

УДК 517.984

В. А. Юрко

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ГРАФЕ С КОРНЕВЫМ ЦИКЛОМ

Исследуется обратная спектральная задача для несамосопряженных дифференциальных пучков второго порядка на компактных графах с корневым циклом при стандартных условиях склейки во внутренних вершинах и краевых условиях в граничных вершинах. Основное внимание уделяется наиболее важной нелинейной обратной задаче восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений (потенциалов) при условии, что структура графа известна априори. Для этой обратной задачи доказана теорема единственности и получена процедура для построения решения. Для решения этой обратной задачи используется метод спектральных отображений [1].

Рассмотрим компактный граф G в \mathbf{R}^m с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где e_0 – цикл, $V \cap e_0 = v_0$. Граф имеет вид $G = e_0 \cup T$, где T – дерево (т.е. граф без циклов) с корнем v_0 , вершинами $\{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\{e_1, \dots, e_r\}$, $T \cap e_0 = v_0$.

Для двух точек $a, b \in T$ будем писать $a \leq b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b . Будем писать $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Если $a < b$, то обозначим $[a, b] := \{z \in T : a \leq z \leq b\}$. В частности, если $e = [v, w]$ – ребро, то v называется его начальной точкой, а w – его конечной точкой; будем говорить, что e выходит из v и заканчивается в w . Для внутренней вершины v через $R(v) := \{e \in T :$

$e = [v, w]$, $w \in V$ обозначим множество ребер, выходящих из v . Для вершины $v \in V$ через $|v|$ обозначим множество ребер между v_0 и v . Число $|v|$ называется порядком вершины v . Для ребра $e \in T$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma := \max_{j=\overline{1,r}} |v_j|$ называется высотой дерева T . Пусть $V^{(\mu)} := \{v \in V : |v| = \mu\}$, $\mu = \overline{0, \sigma}$ – множество вершин порядка μ , а $\mathcal{E}^{(\mu)} := \{e \in \mathcal{E} : e = [v, w], v \in V^{(\mu-1)}, w \in V^{(\mu)}\}$, $\mu = \overline{1, \sigma}$ – множество ребер порядка μ .

Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma := \{v_1, \dots, v_p\}$ – граничные вершины G , $v_{p+1} \in V^{(1)}$, а v_j , $j > p + 1$ занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно $e_j = [v_{j_k}, v_j]$, $j = \overline{1, r}$, $j_k < j$. В частности, $E := \{e_1, \dots, e_p\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1} = [v_0, v_{p+1}]$. Ребро e_{p+1} , выходящее из корня v_0 , называется корневым ребром дерева T . Ясно, что $e_j \in \mathcal{E}^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j \in V^{(\mu)}$.

Пусть d_j – длина ребра e_j , $j = \overline{0, r}$. Каждое ребро $e \in \mathcal{E}$ рассматривается как отрезок $[0, d_j]$ и параметризуется параметром $x_j \in [0, d_j]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: для $j = \overline{1, r}$ конечная вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а начальная вершина v_{j_k} соответствует $x_j = d_j$; для цикла e_0 обе точки $x_0 = +0$ и $x_0 = d_0 - 0$ соответствуют v_0 . Функция Y на G представима в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0,r}}$, где функция $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j . Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0,r}}$ и $p = \{p_j\}_{j=\overline{0,r}}$ – комплекснозначные функции на G ; они называются потенциалами. Пусть $q_j(x_j) \in L(0, T_j)$, $p_j(x_j) \in AC[0, T_j]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на G :

$$y_j''(x_j) + (\rho^2 + \rho p_j(x) + q_j(x_j))y_j(x_j) = 0, \quad x_j \in [0, d_j], \quad (1)$$

где $j = \overline{0, r}$, ρ – спектральный параметр, функции $y_j(x_j)$, $y_j'(x_j)$ абсолютно непрерывны на $[0, d_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренних вершинах v_0 и v_k , $k = \overline{p+1, r}$ для $k = \overline{p+1, r}$:

$$y_j(d_j) = y_k(0) \text{ for all } e_j \in R(v_k), \quad \sum_{e_j \in R(v_k)} y_j'(d_j) = y_k'(0), \quad (2)$$

и для v_0

$$y_{p+1}(d_{p+1}) = y_0(d_0) = y_0(0), \quad y'_{p+1}(d_{p+1}) + y'_0(d_0) = y'_0(0). \quad (3)$$

Условия (2), (3) называются стандартными условиями склейки. В электрических сетях они выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей – баланс напряжений и т.д. Рассмотрим краевую задачу $L_0(G)$ для

уравнения (1) с условиями склейки (2), (3) и с условиями Дирихле в граничных вершинах v_1, \dots, v_p :

$$y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

Рассмотрим также краевые задачи $L_k(G)$, $k = \overline{1, p}$, для уравнения (1) с условиями склейки (2)-(3) и с краевыми условиями

$$y'_k(0) = 0, \quad y_j(0) = 0, \quad j = \overline{1, p} \setminus k.$$

Обозначим $\Lambda_k = \{\rho_{kn}\}$, $k = \overline{0, p}$, – собственные значения (с учетом кратностей) задачи $L_k(G)$. В отличие от случая деревьев здесь задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, p}$, не определяет потенциалы однозначно, и нам нужна дополнительная информация. Пусть $S_j(x_j, \rho)$, $C_j(x_j, \rho)$, $j = \overline{0, r}$, – решения уравнения (1) на ребре e_j с начальными условиями

$$S_j(0, \rho) = C'_j(0, \rho) = 0, \quad S'_j(0, \rho) = C_j(0, \rho) = 1.$$

При каждом фиксированном $x_j \in [0, d_j]$ функции $S_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $C_j^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $j = \overline{0, r}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по ρ экспоненциального типа. Положим

$$a(\rho) := C_0(d_0, \rho) - S'_0(d_0, \rho), \quad h(\rho) := S_0(d_0, \rho).$$

Пусть $\mathcal{V} = \{\nu_n\}$ – нули (с учетом кратностей) целой функции $h(\rho)$. Тогда $\{\nu_n\}$ – собственные значения краевой задачи \mathcal{B} для уравнения (1) при $j = 0$ с краевыми условиями $y_0(0) = y_0(d_0) = 0$. Пусть $\Omega = \{\omega_n\}$ – Ω -последовательность для \mathcal{B} (см. [2]). Например, если все нули $h(\rho)$ простые, то

$$\omega_n = \begin{cases} 0, & a(\nu_n) = 0, \\ +1, & a(\nu_n) \neq 0, \arg a(\nu_n) \in [0, \pi), \\ -1, & a(\nu_n) \neq 0, \arg a(\nu_n) \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Отметим, что для классической самосопряженной периодической обратной задачи Штурма–Лиувилля Ω – последовательность исследовалась в [3] и других работах. Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. Даны Λ_k , $k = \overline{0, p}$ и Ω , построить q и p на G .

Эта обратная задача является обобщением классических обратных задач для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на интервале и на деревьях. Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1.

Теорема 1. Задание Λ_k , $k = \overline{0, p}$ и Ω однозначно определяет потенциалы q и p на G .

Используя метод спектральных отображений [1], мы также получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00015) и Минобрнауки РФ (проекты № 1.1436.2014К и 2014/203, 1617).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
2. *Yurko V. A.* Inverse problems for non-selfadjoint quasi-periodic differential pencils // Analysis and Mathematical Physics. 2012. Vol. 2, № 3. P. 215–230.
3. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. 1975. Вып. 97. С. 540–606.

УДК 539.4

Э. В. Антоненко

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЕМКостей

Горизонтально расположенные тонкостенные резервуары и трубопроводы, применяющиеся в химической, нефтяной, машиностроительной и оборонной промышленности, могут иметь дискретные по длине или сплошные опоры в виде упругого основания, например грунта, в который заглублена емкость.

Задача по расчету напряжений в стенках резервуара с дискретными опорами была точно решена Б. Г. Галеркиным и Я. И. Перельманом [1]. Сложность метода препятствовала внедрению его в практику расчета и проектирования резервуаров. Расчеты резервуаров и подбор толщины их стенок, как правило, ведутся по балочной теории [2–4] и безмоментной теории оболочек. Резервуар представляется полой балкой кругового поперечного сечения. Продольные нормальные напряжения σ_x , толщина стенки δ и кольцевые нормальные напряжения σ_φ (в продольных сечениях резервуара) определяются по зависимостям сопротивления материалов

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \quad \sigma_\varphi = p\frac{R}{\delta}, \quad (1)$$

где M – изгибающий момент, $I = \pi R^3\delta$ – момент инерции поперечного сечения резервуара, p – радиальная нагрузка, R – радиус срединной поверхности резервуара.

Для резервуаров с дискретным расположением опор радиальная нагрузка определяется давлением жидкости на стенки

$$p = \gamma R(\cos \varphi - \cos \beta), \quad 0 \leq \varphi \leq \beta, \quad (2)$$

если γ – удельный вес жидкости, φ – угол отсчета, β – угол, определяющий уровень заполнения емкости (рис. 1, а).

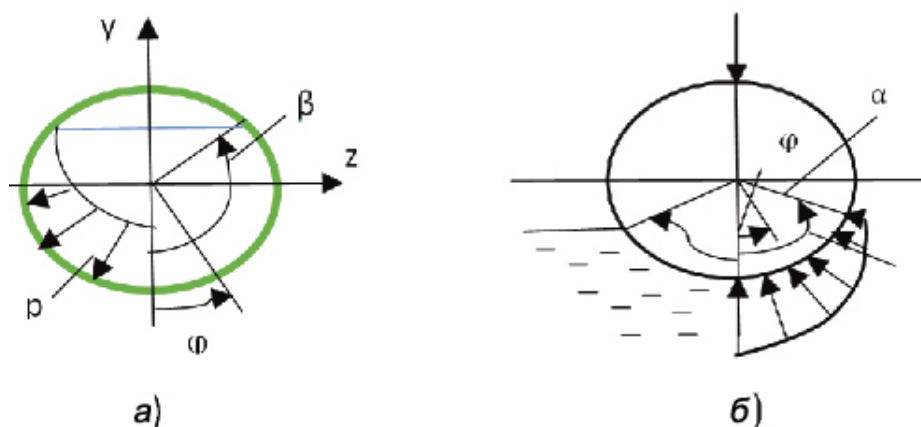


Рис. 1

Расчеты по балочной теории оказываются справедливыми, если все поперечные сечения резервуара до и после нагружения остаются недеформируемыми, т.е. круговыми, а деформируется лишь ось резервуара. В тонкостенных резервуарах, кроме прогиба их оси, существует деформация контура (овализация) от действия нагрузки (2) и потока касательных усилий. Деформация контура оказывается переменной вдоль оси емкости. Максимально деформируется (сплющивается) среднее сечение резервуара, более удаленное от днищ, которые обычно считаются абсолютно жесткими. Максимальная деформация контура и максимальный прогиб оси резервуара делают это сечение наиболее опасным. Деформация контура и сопутствующие ей напряжения зависят от распределения нагрузки по периметру сечения, т.е. от уровня жидкости.

Определим опасные по прочности резервуара уровни его заполнения. Воспользуемся методом расчета тонкостенных оболочек [5].

Напряженное состояние оболочки разделяется на основное, соответствующее решению задачи по формулам сопротивления материалов для расчета оболочки как балки и строительной механики для расчета кольца, и дополнительное, возникающее из-за неравномерности деформаций контура вдоль оболочки. Напряжения основного и дополнительного состояний соответственно будем обозначать индексами «о» и «доп». Полные напряжения и моменты представляются в виде сумм

$$\sigma_x = \sigma_{xо} + \sigma_{xдоп}, \quad m_\varphi = m_{\varphiо} + m_{\varphiдоп}, \quad (3)$$

где m_φ – кольцевые изгибающие моменты.

В основной задаче оболочка представляется двухопорной балкой, нагруженной постоянной вдоль оси нагрузки интенсивностью p_x от веса жидкости:

$$p_x = 2 \int_0^\beta p \cos \varphi R d\varphi = \gamma R^2 (\beta - 0.5 \sin 2\beta). \quad (4)$$

Для наиболее опасного среднего сечения балки-оболочки

$$M = \frac{p_x L^2}{8}, \quad \sigma_{x0} = \frac{p_x}{8\pi R} \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{R}{\delta} \cos \varphi. \quad (5)$$

Кольцевые изгибающие моменты $m_{\varphi 0}$ находились методами строительной механики при разложении нагрузки (2) в ряд Фурье:

$$p_n = \frac{\gamma R}{\pi} \left[\frac{\sin(n-1)\beta}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\beta}{n+1} - 2 \cos \beta \frac{\sin n\beta}{n} \right],$$

$$m_{\varphi 0} = \sum_{n=2}^{\infty} \Psi_{n0} \cos n\varphi, \quad \Psi_{n0} = p_n \frac{R^2}{n^2 - 1}.$$

Кольцевые моменты $m_{\varphi 0}$ порождают кольцевые нормальные напряжения. Для наружного волокна $\sigma_{\varphi 0} = 6 \frac{m_{\varphi 0}}{\delta^2}$.

Дополнительные силовые факторы определяются по формулам [5]:

$$\sigma_{x\text{доп}} = -\frac{1.65}{\delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} \bar{\Psi}_n'' \Psi_{n0} \cos n\varphi, \quad (6)$$

$$m_{\varphi\text{доп}} = \sum_{n=2}^{\infty} \bar{\Psi}_n'' \Psi_{n0} \cos n\varphi.$$

Результаты расчетов по формулам (3–6) для оболочек с удлинением $L/R = 10$ представлены на рис. 2 и 3, где $\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\gamma R}$, $\bar{\sigma}_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\gamma R}$. Сплошными линиями показано изменение напряжения по высоте емкости (от $-R$ до R) для случая полного заполнения $\beta = \pi$, пунктиром для $\beta = 3\pi/4$ и штрих-пунктиром – для половинного заполнения $\beta = \pi/2$. Графики для оболочек с удлинением $L/R = 5$ качественно не отличаются от приведенных.

Анализ этих зависимостей показывает, что наиболее опасным случаем нагружения является половинное заполнение емкости: кольцевые и осевые нормальные напряжения достигают максимальных значений.

При полном заполнении емкости, несмотря на наибольшую погонную нагрузку p_x , контур поперечного сечения не деформируется Ψ_{n0} и дополнительные усилия в сечениях оболочки не возникают. Расчеты показывают, что для толстостенных резервуаров $R/\delta < 50$ уточненный расчет теряет смысл, и расчет можно вести по безмоментной теории и формулам сопротивления материалов, т.е. ограничиваться решением основной задачи.

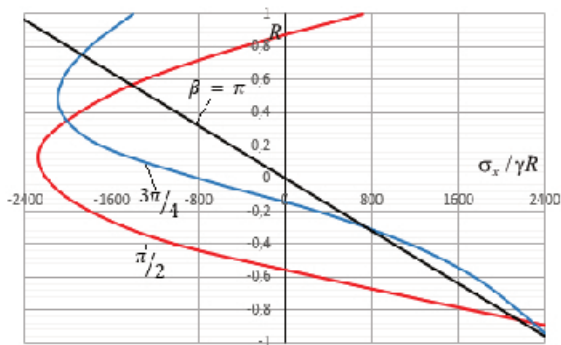


Рис. 2

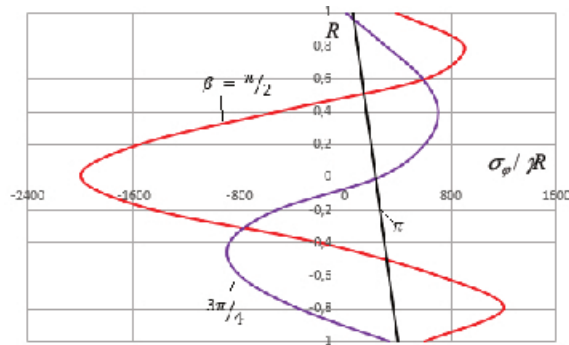


Рис. 3

Деформируемость контура обычно оценивается радиальными перемещениями, пропорциональными кольцевым изгибающим моментам $m_{\varphi 0}$, закон изменения которых при различных уровнях заполнения приведен на рис. 4, где $\bar{m}_{\varphi 0} = 10^2 m_{\varphi 0} / (\gamma R^3)$. Наибольшая деформируемость соответствует половинному заполнению. При $\beta < \pi$ поперечное сечение приобретает форму эллипса с большой осью в вертикальном направлении.

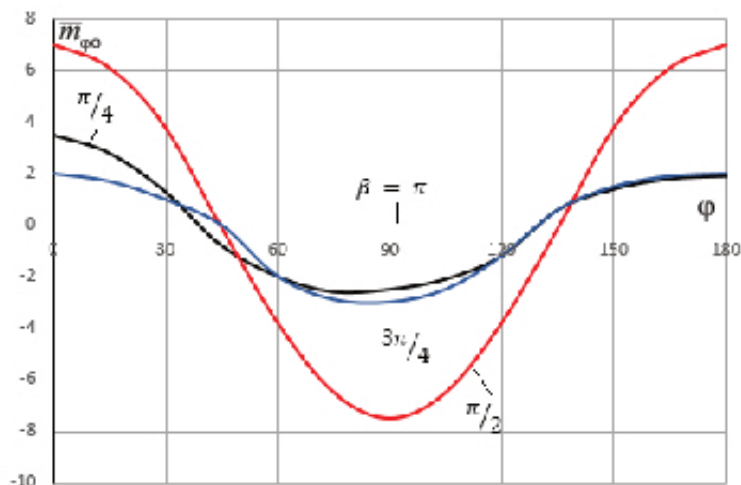


Рис. 4

Роль сплошной опоры выполняют насыпные основания или грунт, в который заглубляется емкость. Уровень заглубления в грунт и его действие на оболочку будем определять углом охвата такого «ложемента» α (см. рис. 1, б). Каждое мысленно выделенное из оболочки колечко загружается силой давления жидкости (2), равнодействующая которой равна p_x , и уравнивается реакцией отпора грунта.

Расчетная модель резервуара со сплошной опорой представляется балкой – цилиндрической оболочкой на упругом основании, реакция которого зависит от продольной x и угловой координаты φ .

Предположим, что нагрузка p_{φ} и p_r постоянны по длине резервуара. Если основание считать Винклеровским, то распределение реакции отпора (давление) по периметру оболочки согласно результатам Г. К. Клейна

(см. [2]) имеет вид

$$p_r = -A(\cos^2 \varphi - \cos \alpha \cos \varphi), \quad A = A(\gamma, R, \beta, \alpha). \quad (7)$$

Ряд вероятных видов реакций отпора приведен в [6]. Величины p_x определяются по (4). Результаты расчета кольцевых изгибающих моментов (деформируемости контура) $\bar{m}_{\varphi 0} = \frac{10^2 m_{\varphi 0}}{\gamma R^3}$ для реакции отпора при угле заглубления $\alpha = 45^\circ$ и разных уровнях заполнения β приведены на рис. 5, из которых следует, что поперечное сечение оболочки превращается в эллипс с большой осью в горизонтальном направлении.

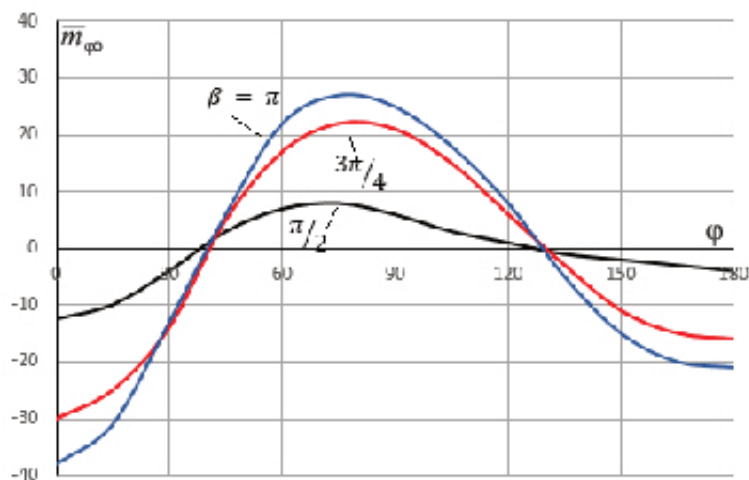


Рис. 5

Численный эксперимент, выполненный для других углов α , позволил выделить максимальные по абсолютной величине значения моментов в зависимости от заполнения емкости (рис. 6). Из этих результатов следует: наибольшая деформация контура соответствует полному заполнению емкости; при увеличении $\alpha \geq 100^\circ$ деформируемость контура не изменяется, а зависит только от уровня заполнения β .

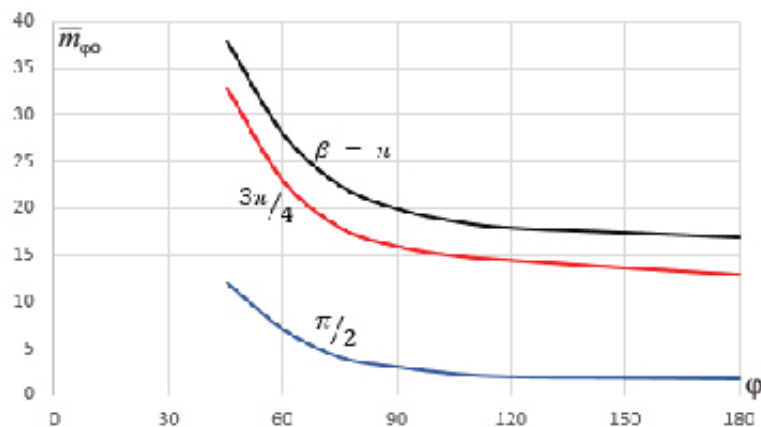


Рис. 6

На рис. 7 приведены результаты расчета напряжений в среднем сечении резервуара с параметрами $L/R = 10$; $R/\delta = 200$. Кривые с индексом «1» соответствуют случаю опирания резервуара на две опоры, расположенные у днищ. Кривые с индексом «2» соответствуют сплошному опиранию.

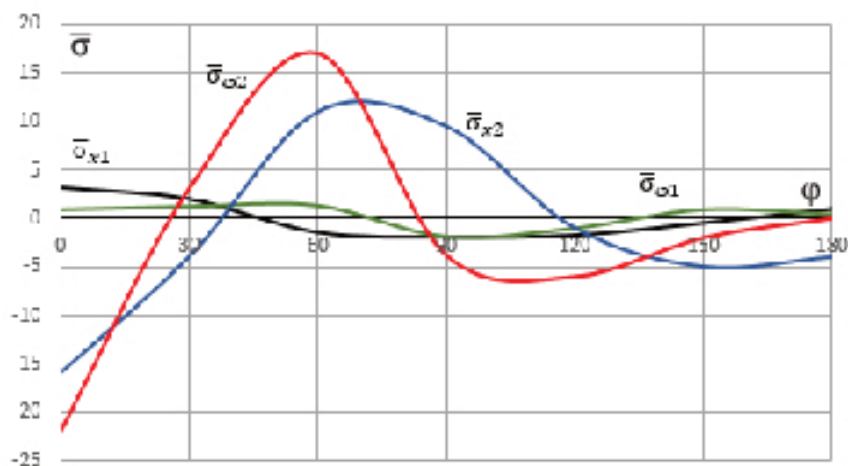


Рис. 7

Используя эту методику, можно оценить целесообразность применения в качестве опор надувных матрасов при транспортировке горизонтальных цилиндрических емкостей и определить оптимальные по прочности углы охвата подобных опор.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галеркин Б. Г., Перельман Я. И.* Напряжения и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе // Изв. НИИ гидротехники. 1940. Т. 27. С. 160–192.
2. *Клейн Г. К.* Расчет труб, уложенных в земле. М. : Госстройиздат, 1957. 147 с.
3. Типовые проекты сварных горизонтальных габаритных резервуаров для нефтепродуктов / Центральный институт типовых проектов Главстройпроекта при Госстрое СССР. М., 1962.
4. *Аксельрад Э. Л., Ильин В. П.* Расчет трубопроводов. М. : Машиностроение, 1972. 240 с.
5. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек. М. : Машиностроение, 1966. 508 с.
6. *Антоненко Э. В., Мацуна Е. М.* Исследование напряженного состояния колец под действием распределенных нагрузок // Проблемы прочности. 1976. № 4. С. 103–106.

Г. А. Бондаренко, И. А. Панкратов

НАИСКОРЕЙШЕЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение угловой скорости космического аппарата (КА), имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости КА (заданы его проекции на оси связанной с КА системы координат); $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор абсолютного углового ускорения КА.

Компоненты ε_j вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются управляющими параметрами, на которые наложено ограничение

$$\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} \leq \varepsilon_{\max}.$$

Необходимо найти управление, переводящее КА из заданного начального положения

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}^0$$

в состояние покоя

$$\boldsymbol{\omega}(T) = \mathbf{0}$$

за минимальное время T .

Поставленная задача является задачей оптимального управления с неподвижным правым концом траектории и нефиксированным промежутком времени.

Будем её решать с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Для этого введём переменные ψ_1, ψ_2, ψ_3 , сопряжённые по отношению к компонентам вектора абсолютной угловой скорости. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -1 + \psi_1\varepsilon_1 + \psi_2\varepsilon_2 + \psi_3\varepsilon_3.$$

Сопряженные переменные удовлетворяют векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \mathbf{0}.$$

Для того чтобы найти оптимальное управление, продифференцируем функцию Гамильтона–Понтрягина по управляющим параметрам и приравняем эти производные к нулю:

$$\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_j} = \psi_j = 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Так как первые производные от функции Гамильтона–Понтрягина H по переменным ε_j не зависят от компонент вектора управления, то вектор оптимального управления должен быть коллинеарен градиенту функции Гамильтона–Понтрягина (модуль вектора оптимального управления равен ε_{\max}). Таким образом, компоненты вектора оптимального управления имеют вид

$$\varepsilon_j^{opt} = \varepsilon_{\max} \frac{\psi_j}{\sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2}}, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Так как конечное значение времени не задано, то функция Гамильтона–Понтрягина для оптимальной траектории и оптимального управления в конечный момент времени должна равняться нулю, т.е.

$$H(T, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varepsilon}^{opt}) = 0.$$

Для численного решения задачи была составлена программа на языке программирования С#. Реализованный в ней оригинальный алгоритм решения краевой задачи является комбинацией методов Рунге–Кутты четвертого порядка точности, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска [1]. Указанный алгоритм был успешно применён ранее в работах [2, 3] для решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

Были рассмотрены два случая, в первом из них начальная угловая скорость космического аппарата была большой, во втором – малой.

Предположим, что $\varepsilon_{\max} = 0.001$ рад/с².

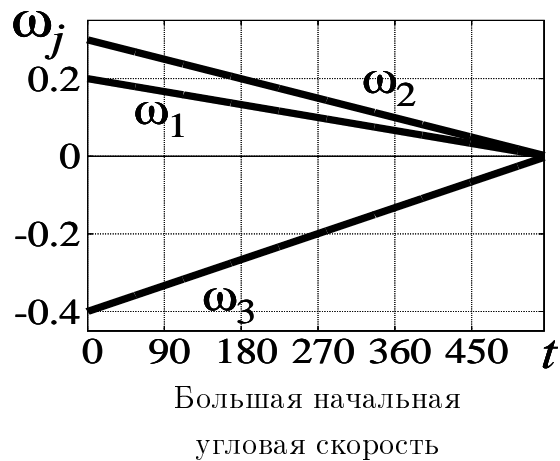
Пусть компоненты угловой скорости космического аппарата в начальный момент времени равны

$$\omega_1(0) = 0.2 \text{ рад/с}, \quad \omega_2(0) = 0.3 \text{ рад/с}, \quad \omega_3(0) = -0.4 \text{ рад/с}.$$

Время окончания управляемого процесса, найденное в результате решения задачи, оказалось равным $T = 538.52$ с. На рисунке показаны законы изменения компонент вектора угловой скорости КА для этого случая.

Также был рассмотрен случай, когда компоненты вектора угловой скорости КА в начальный момент времени равны

$$\omega_1(0) = 0.05 \text{ рад/с}, \quad \omega_2(0) = -0.02 \text{ рад/с}, \quad \omega_3(0) = 0.03 \text{ рад/с}.$$



Время окончания управляемого процесса, найденное в результате решения задачи, оказалось равным $T = 61.64$ с.

В ходе численного решения задачи было установлено, что в обоих случаях вектор оптимального управления имеет постоянное направление. При этом чем больше была величина ε_{\max} , тем меньшее время окончания управляемого процесса получалось в результате решения задачи (при одном и том же начальном значении вектора угловой скорости КА). При увеличении модуля вектора угловой скорости КА в начальный момент времени увеличивается и время окончания управляемого процесса.

Отметим, что при численном решении задачи было особенно трудно подобрать начальное приближение для времени окончания управляемого процесса.

В дальнейшем предполагается рассмотреть случай, когда КА в конце движения должен занять заданное положение относительно инерциальной системы координат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
3. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

МОДЫ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СЛОЯ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В работе рассматриваются моды в слое с перекрестными граничными условиями на лицевых поверхностях. Особенностью данной задачи является возможность получить решение дисперсионного уравнения в явном виде, что позволяет проанализировать влияние наследственно-упругих свойств материала на распространение упругих волн.

Постановка задачи. Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями $z = \pm h$, в декартовой системе координат. Плоскость Oxy совместим со срединной поверхностью слоя. Будем рассматривать распространение волн в направлении оси x .

Динамическое напряженно-деформированное состояние слоя описывается уравнениями движения в напряжениях, записанными для случая плоской задачи, и уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме [1]. В качестве ядра интегрального оператора выберем дробно-экспоненциальную функцию Работнова [2]:

$$k\mathfrak{E}_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t) = k(t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\beta^n (t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]},$$

где k, β – постоянные, определяющие механическое поведение материала, t – время, $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy$ – гамма-функция.

На лицевых поверхностях поставим перекрестные граничные условия:

$$v_1 = 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h.$$

Решение для перемещений v_i будем искать в виде

$$v_i = V_i(z) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)x),$$

где ω – частота, χ – волновое число, $\delta > 0$ – коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x .

Дисперсионное уравнение. Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате напряженно-деформированного состояния.

После стандартной процедуры, с учетом безразмерных переменных $\xi = \frac{x}{h}$, $\zeta = \frac{z}{h}$, $t_* = \frac{c_2 t}{h}$, дисперсионное уравнение будет имеет вид

$$\frac{b}{a\tilde{\chi}_*} \frac{\Omega_*^2}{2} \cosh(a) \cosh(b) = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} b^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \Omega_*^2, & i\tilde{\chi}_* &= -\delta_* - i\chi_*, & \delta_* &= h\delta, & \chi_* &= h\chi, \\ \Omega_*^2 &= \omega_*^2 \frac{1 + \nu_*^F}{E_*^F(1 + \nu)}, & \omega_* &= \frac{h}{c_2}\omega, & c_2 &= \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\rho}}, \\ \nu_*^F &= \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & k_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}}k, & \beta_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}}\beta, \\ E_*^F &= 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & a^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \kappa_F^2 \Omega_*^2, & \kappa_F^2 &= \frac{1 - 2\nu_*^F}{2 - 2\nu_*^F}, \end{aligned}$$

E , ν – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, ρ – плотность материала. В дальнейшем звездочки у безразмерных переменных опускаем.

Дисперсионное уравнение (1) имеет нетривиальные решения в случае, когда $\cosh(a) = 0$ и $\cosh(b) = 0$.

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\chi}_n^{(1)}\right)^2 &= -\left(\frac{1}{2} + (n - 1)\right)^2 \pi^2 + \\ &+ \varkappa^2 \frac{(p_1 p_2 + 2\omega)(p_1 p_4 + 2\omega) + 2\omega k^2 \frac{3\nu}{1 - \nu^2} \omega^2}{(p_1^2 + 2\omega)(p_3^2 + 2\omega)} \omega^2 - \\ &- i \varkappa^2 \frac{\sqrt{2\omega} k \left(\frac{3}{1 + \nu}(p_1 p_2 + 2\omega) - \frac{\nu}{1 - \nu}(p_1 p_4 + 2\omega)\right)}{(p_1^2 + 2\omega)(p_3^2 + 2\omega)} \omega^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\tilde{\chi}_n^{(2)}\right)^2 = -\left(\frac{1}{2} + (n - 1)\right)^2 \pi^2 + \frac{p_1 p_4 + 2\omega}{p_1^2 + 2\omega} \omega^2 - i \frac{\sqrt{2\omega} k \frac{3}{1 + \nu} \omega^2}{p_1^2 + 2\omega}, \quad (3)$$

где $\varkappa^2 = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}$, $p_1 = 2\beta + \sqrt{2\omega} - 2k$, $p_2 = 2\beta + \sqrt{2\omega} + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}k$, $p_3 = 2\beta + \sqrt{2\omega} - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}k$, $p_4 = 2\beta + \sqrt{2\omega} + \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}k$, $n = 1, 2, \dots$

Решение (2) соответствует волнам расширения (I серия), решение (3) – сдвиговым волнам (II серия).

Формы колебаний для волн I и II серий имеют вид

$$\begin{aligned} v_1^{(q)} &= C V_1^{(q)} \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right) \pi \zeta\right) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)\xi), \\ v_3^{(q)} &= C \sin\left(\left(\frac{1}{2} + n\right) \pi \zeta\right) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)\xi), \end{aligned}$$

где $q = 1, 2$, $V_1^{(1)} = \frac{\tilde{\chi}}{a}$, $V_1^{(2)} = \frac{b}{\tilde{\chi}}$.

На рис. 1, 2 представлены проекции дисперсионных кривых на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) для $\nu = 0.3$. Сплошная линия соответствует значениям $k = 0.9$, $\beta = 0.1$; пунктирная – $k = 0.5$, $\beta = 1$; штрих-пунктирная – $k = 0$ (упругий случай).

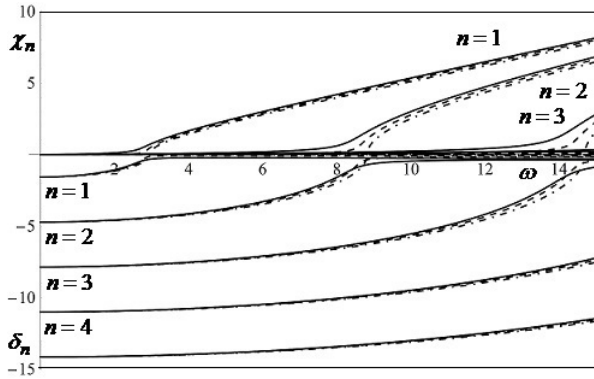


Рис. 1. Проекция дисперсионных кривых на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) (I серия)

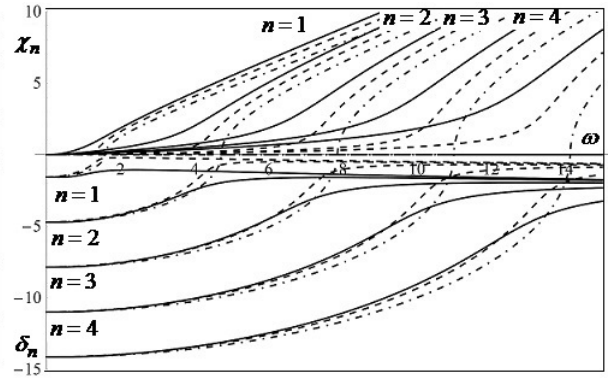


Рис. 2. Проекция дисперсионных кривых на плоскости (ω, χ) и (ω, δ) (II серия)

Анализ дисперсионного уравнения и полученных решений позволяет сделать следующие выводы.

1. Существует симметрия дисперсионных кривых при замене $\tilde{\chi}$ на $-\tilde{\chi}$.

2. При увеличении k и (или) уменьшении β наследственно-упругие дисперсионные кривые больше отклоняются от соответствующих упругих кривых, при этом на сдвиговые волны наследственная упругость оказывает более сильное влияние. В окрестностях частот запираания упругих мод наследственно-упругие кривые имеют наибольшую кривизну. Увеличение k или уменьшение β ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. При $k = 0$ решение будет соответствовать решению аналогичной упругой задачи [3].

3. Перемещения по переменной ζ имеют вид тригонометрических функций, следовательно, по найденной системе мод можно осуществлять разложение, которое будет сводиться к ряду Фурье.

В рассматриваемом случае частоты запираания отсутствуют. Введем условные частоты запираания $\omega_n^{(q)}$ – частоты, при которых действительная часть волновой постоянной обращается в нуль. При $\omega > \omega_n^{(q)}$ получим волну, которую будем называть распространяющейся. При $\omega \rightarrow \infty$ волновую постоянную можно представить в виде $\tilde{\chi} \sim O(\omega) - iO(\sqrt{\omega})$, то есть скорость затухания изменяется как $\sqrt{\omega}$ и зависит от k и β . При $\omega < \omega_n^{(q)}$ получим волну, которую будем называть нераспространяющейся. В упругом случае эта волна чисто мнимая, а в наследственно-упругом

появляется малая действительная часть. При $\omega = 0$ волновая постоянная становится чисто мнимой.

Проведенное исследование показывает, что наследственная упругость приводит к появлению новых динамических эффектов. Распространяющиеся моды приобретают малое затухание, а параметры затухания нераспространяющихся мод приобретают малую действительную часть. В связи с этим представляет интерес исследование влияния наследственной упругости на резонансные явления, связанные с нераспространяющимися модами, аналогичные изученным для случая идеально упругого тела в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анофрикова Н. С., Сергеева Н. В. Исследование гармонических волн в наследственно-упругом слое // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 321–328.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
3. Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М. : Физматлит, 2010. 280 с.
4. Вильде М. В. Резонансы волны Рэлея в полуполосе // Проблемы прочности и пластичности : межвуз. сб. Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 2004. Вып. 66. С. 29–38.

УДК 539.383

Е. С. Доль

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ПОЗВОНОЧНИКА

Приведены результаты моделирования функционального элемента позвоночника. Проведен численный анализ в ANSYS.

Введение. Травмы позвоночника составляют до 17% травм опорно-двигательного аппарата, при этом в среднем 40 случаев на миллион приходится на травмы поясничного отдела.

На сегодняшний день существует большое число методик лечения заболеваний и повреждений позвоночника. В связи с этим часто необходимо делать выбор среди целого ряда устанавливаемых имплантатов или схожих методов. В этом случае нужно учитывать не только медицинские, но и биомеханические факторы, влияющие на исследуемый объект. Учет биомеханической составляющей того или иного метода может быть сделан с помощью численного моделирования методом конечных

элементов (МКЭ), который широко применяется в различных областях биомеханики [1–3].

Расчетам поясничного отдела позвоночника и его отдельных элементов с помощью МКЭ уделяли внимание многие научные группы из разных стран [4]. При этом во многих работах заметно различаются как свойства материалов тканей позвоночника, так и значения действующих на рассматриваемый объект нагрузок.

Основой для конечно-элементного моделирования является трехмерная твердотельная геометрическая модель исследуемого объекта. В работах многих научных групп предлагаются различные методы построения как позвонков и межпозвонковых дисков, так и связочного аппарата. В некоторых работах авторы предлагают создавать упрощенные идеализированные модели позвоночного столба. Но большинство исследователей стараются создавать реалистичные и пациентно-ориентированные модели позвоночника или его сегментов на основе данных компьютерной и магнитно-резонансной томографии (КТ и МРТ) [5, 6]. Целью данной работы является решение стационарной задачи о компрессионном нагружении функционального элемента поясничного отдела позвоночника (L4-L5) методом конечных элементов.

1. Постановка задачи. Функциональный элемент позвоночника – анатомический комплекс, состоящий из двух смежных позвонков с соответствующими суставами и мышечно-связочным аппаратом на этом уровне и одного межпозвонкового диска.

Позвонки по строению относятся к губчатым костям и состоят из плотного наружного кортикального слоя и внутреннего губчатого. Межпозвонковый диск состоит из пульпозого ядра (гелеобразной массы) и окружающего его волокнистого фиброзного кольца. В поставленной задаче использована упрощённая модель межпозвонкового диска без деления его на фиброзное кольцо и пульпозное ядро.

С математической точки зрения решается статическая задача теории упругости о действии на функциональный элемент компрессионной (осевой) нагрузки.

2. Материалы и методы. Моделирование функционального элемента проводилось методом конечных элементов в программном пакете ANSYS. Для этого на первом этапе работы в программном пакете SolidWorks была создана трехмерная геометрическая модель. В качестве базовой была взята твердотельная модель позвоночного столба человека, построенная на основе КТ-изображений. Затем из базовой модели был выделен необходимый функциональный элемент L4-L5.

Далее с помощью элементов сплайн, бобышка и посредством комбинирования объёмов были созданы модели фасеточных суставов, межкостистой и межпоперечных связок, после чего объём тела позвонка был разделен на кортикальный и губчатый слой кости. Толщина кортикального слоя в среднем составила 0.6–0.8 мм.

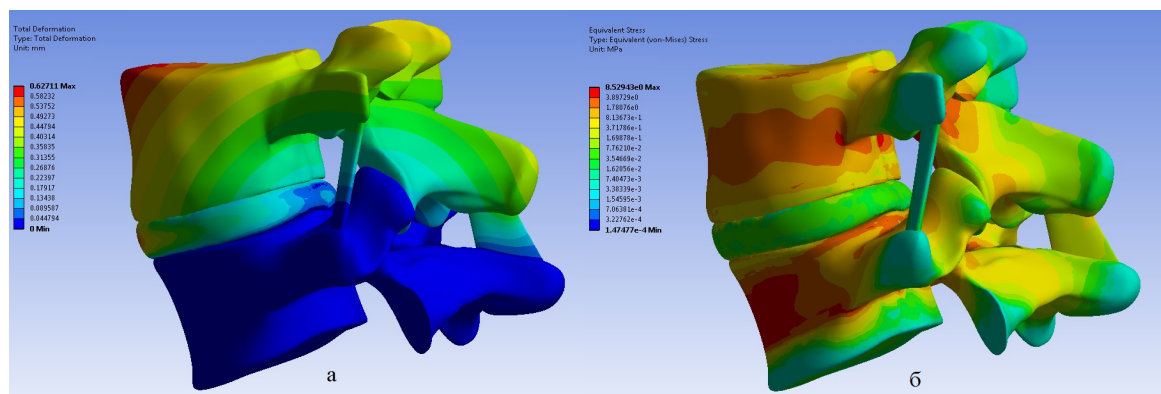
Анализ литературы позволил определить величину компрессионной нагрузки, действующей на функциональный элемент [4].

К верхним конечным пластинам позвонков L4 и L5 в направлении осей тел позвонка прикладывалась распределённая нагрузка в 200 Н. Нижняя концевая пластинка позвонка L5 жестко закреплялась.

Построенная геометрическая модель далее была импортирована в программный пакет ANSYS Workbench. Модель разбивалась конечно-элементной сеткой (анализ сеточной сходимости позволил определить размер ребра элемента, равный 1 мм), задавались граничные условия в виде жесткой заделки и приложенных нагрузок, и задача запускалась на расчет.

В результате расчётов были получены диаграммы распределения перемещений и напряжений в модели (рисунок).

Максимальное перемещение наблюдается на позвонке L4 в его верхней передней части и составляет 0.63 мм. Максимальное напряжение наблюдается на позвонке L5, значение максимального напряжения составляет 8.53 МПа.



Результаты расчётов: *a* – диаграмма перемещений; *b* – диаграмма напряжений

Заключение. Решена стационарная задача о деформировании осевой нагрузкой функционального элемента поясничного отдела позвоночника (L4 – L5).

В ходе работы на основе анализа литературы были определены основные механические характеристики тканей функционального элемента позвоночника, а также величины и характер приложения нагрузок, действующих на него. Это позволит в дальнейшем перейти

к моделированию патологий и реконструктивных операций по замене межпозвонкового диска.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов Д. В., Доль А. В., Павлова О. Е., Аристамбекова А. В. Моделирование виллизиевого круга человека в норме и при патологии // Рос. журн. биомеханики. Пермь : Изд-во Перм. политех. ун-та, 2013. Т. 17, № 3 (61). С. 49–63.

2. Иванов Д. В., Доль А. В. Практические задания по применению пакета Ansys Mechanical APDL к задачам биомеханики сердечно-сосудистой системы : учеб.-метод. пособие для студ. естест.-науч. дисциплин. Саратов : Буква, 2015. Сер. Биомеханика.

3. Ломакин М. В., Лепилин А. В., Смирнов Д. А., Иванов Д. В., Доль А. В. Биомеханическое изучение напряженно-деформированного состояния в области коротких дентальных имплантатов в системе костная ткань–имплантат–абатмент // Российская стоматология. М. : Изд-во Медиа-Сфера, 2013. Т. 6, № 1. С. 21–24.

4. Dreischarf M., Zander T., Shirazi-Adl A., Puttlitz C. M., Adam C. J., Chen C. S., Goel V. K., Kiarpour A., Kim Y. H., Labus K. M., Little J. P., Park W. M., Wang Y. H., Wilke H. J., Rohlmann A., Schmidt H. Comparison of eight published static finite element models of the intact lumbar spine: predictive power of models improves when combined together // J. Biomech. 2014. Vol. 47, iss. 8. P. 1757–1766.

5. Иванов Д. В., Доль А. В. Применение томографических изображений для создания трехмерных индивидуальных реалистичных моделей биологических объектов // Кардио-ИТ. (Саратов). 2015. Т. 2, № 4. С. 1–5.

6. Иванов Д. В., Лепилин А. В., Смирнов Д. А., Доль А. В. Возможности различных САД-комплексов при построении математической модели костной ткани // Саратов. науч.-мед. журн. 2015. Т. 9. С. 403–405.

УДК 629.78

Г. А. Исмайылов, И. А. Панкратов

О МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ ЭНЕРГИИ НА УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА

Пусть угловое движение тела (искусственного спутника Земли) описывается кинематическим уравнением Пуассона:

$$2\dot{\lambda} = \lambda \circ \omega,$$

где λ – кватернион, характеризующий положение твердого тела относительно инерциальной системы координат, ω – вектор абсолютной угловой скорости твердого тела относительно этой системы.

Начальное угловое положение тела есть

$$\lambda(0) = \lambda^0.$$

Требуемое конечное угловое положение имеет вид

$$\boldsymbol{\lambda}(T) = \boldsymbol{\lambda}^T.$$

Требуется найти такое оптимальное управление $\boldsymbol{\omega}(t)$, чтобы функционал качества

$$I = \int_0^T (\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3) dt,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const} \geq 0$, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$, принимал минимальное значение при фиксированном T . Функционал I характеризует общие энергетические затраты на управление.

Для решения задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Введём кватернион $\boldsymbol{\psi}$ с компонентами ψ_0, \dots, ψ_3 , сопряжённый по отношению к фазовому кватерниону. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\begin{aligned} H = & -\alpha_1 \omega_1 - \alpha_2 \omega_2 - \alpha_3 \omega_3 - 0.5 \cdot \psi_0 (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) - \\ & - 0.5 \cdot \psi_1 (\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2) - 0.5 \cdot \psi_2 (\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3) - \\ & - 0.5 \cdot \psi_3 (\lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1). \end{aligned}$$

Кватернионное сопряжённое уравнение имеет вид

$$2\dot{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\omega},$$

Максимальное значение функции H сообщает оптимальное управление

$$\begin{cases} \omega_1^0 = (-\psi_0 \lambda_1 + \psi_1 \lambda_0 + \psi_2 \lambda_3 - \psi_3 \lambda_2) / (4\alpha_1), \\ \omega_2^0 = (-\psi_0 \lambda_2 - \psi_1 \lambda_3 + \psi_2 \lambda_0 + \psi_3 \lambda_1) / (4\alpha_2), \\ \omega_3^0 = (-\psi_0 \lambda_3 + \psi_1 \lambda_2 - \psi_2 \lambda_1 + \psi_3 \lambda_0) / (4\alpha_3). \end{cases}$$

Отметим, что данная краевая задача рассматривалась ранее в работе [1]. Для решения поставленной краевой задачи была написана программа на языке Java, реализующая алгоритм [2, 3], являющийся комбинацией методов Рунге–Кутты четвертого порядка точности, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска.

Пусть начальное положение твердого тела задано углами Эйлера (α — угол прецессии, β — угол нутации, γ — угол собственного вращения):

$$\alpha = 10^\circ, \beta = 8^\circ, \gamma = 5^\circ.$$

Этим углам соответствует кватернион

$$\begin{aligned}\lambda_0^0 &= 0.9930873627220702, & \lambda_1^0 &= 0.0732173086418921, \\ \lambda_2^0 &= 0.037273661348003334, & \lambda_3^0 &= 0.083829528727505.\end{aligned}$$

Конечное положение тела задано углами

$$\tilde{\alpha} = 0^\circ, \quad \tilde{\beta} = 0^\circ, \quad \tilde{\gamma} = 0^\circ,$$

что соответствует следующему кватерниону

$$\lambda_0^T = 1, \quad \lambda_1^T = 0, \quad \lambda_2^T = 0, \quad \lambda_3^T = 0.$$

Пусть требуется решить задачу при $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 2000$, $\alpha_3 = 3000$. Значения функционала качества для разных временных отрезков $[0, T]$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

$T, \text{ с}$	I	$T, \text{ с}$	I
200	0.6665346560157165	300	0.44435544985946895
210	0.6347947090668907	310	0.4300213419788282
220	0.6059402291411088	320	0.4165831192013803
230	0.5795948495036541	330	0.4039593366750249
240	0.5554449303187555	340	0.39207813322040375
250	0.5332270138435539	350	0.3808758580825576
260	0.512718177373356	360	0.3702959339180532
270	0.4937285213805331	370	0.3602878996580692
280	0.47609527601585777	380	0.35080660573398065
290	0.45967812105185146	390	0.34181153391470087

При увеличении времени T количество энергии I , которое требуется затратить на управление, уменьшается. Это легко объясняется тем, что при увеличении затрат энергии на управление увеличивается угловая скорость и, следовательно, меньше времени затрачивается на поворот.

Рассмотрим теперь случаи при одинаковом параметре $T = 300$ с и разных значениях весовых множителей α_1 , α_2 , α_3 . Начальное положение тела задано теми же углами.

Зафиксируем значения двух весовых множителей и будем варьировать значение третьего множителя. Пусть $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 2000$, α_3 пробегает по значениям: 1000, 2000, ..., 10000 (табл. 2).

Отметим, что между изменяемым параметром α_3 и значением функционала качества I существует линейная зависимость.

Также были рассмотрены случаи, когда значения двух или трёх весовых множителей изменялись линейно.

Таблица 2

α_1	α_2	α_3	I
1000	2000	1000	0.2561562129231243
1000	2000	2000	0.3504523223918996
1000	2000	3000	0.44435544985946895
1000	2000	4000	0.5378731541347116
1000	2000	5000	0.631005289929338
1000	2000	6000	0.7237495719395564
1000	2000	7000	0.8161023547512606
1000	2000	8000	0.9080588213038621
1000	2000	9000	0.9996130262325005
1000	2000	10000	1.0907578924280608

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антипова А. С., Бирюков В. Г. Аналитическое и численное исследование кинематической задачи оптимальной переориентации твердого тела // Математика. Механика. : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 132–136.

2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.

3. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

УДК 531.383, 532.516

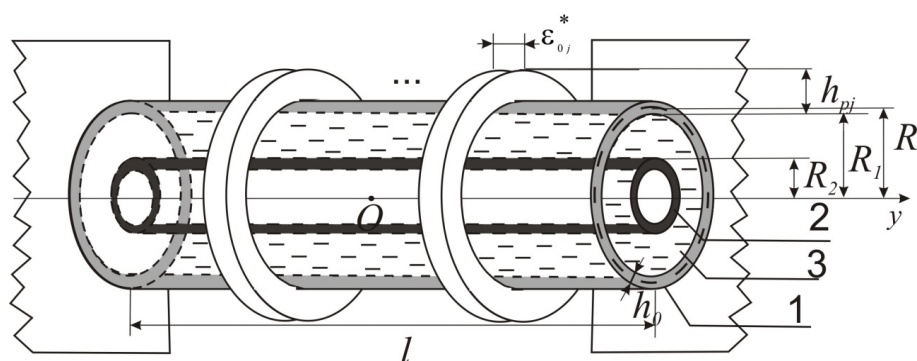
**А. В. Калинина, Д. В. Кондратов,
Д. Д. Старостин, А. Ю. Блинкова**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ РЕБРИСТОЙ ТРУБЫ КОЛЬЦЕВОГО ПРОФИЛЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВИБРАЦИИ

Развитие современного машино- и ракетостроения ставит задачи использования сложных механических систем с учетом минимизации веса

несущих конструкций и одновременно улучшения эксплуатационных характеристик системы в целом. Одними из основных конструкций таких систем являются механические системы, состоящие из двух цилиндрических оболочек, вложенных друг в друга, между которыми расположена жидкость [1]. Примерами использования такой модели можно считать трубы кольцевого профиля системы охлаждения и подогрева топлива жидкостных ракетных двигателей, системы смазки силовых гидроцилиндров, где жидкость проходит по трубе кольцевого профиля, а во внутренней трубе либо находится газ постоянного давления, либо внутренняя труба полая. Ранее рассматривалась задача гидроупругих колебаний ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии гармонического давления на концах трубы [2].

Рассматривается кольцевая труба (рисунок) с упругой внешней оболочкой и абсолютно жестким внутренним цилиндром, содержащей слой вязкой несжимаемой жидкости между ними, при воздействии вибрации.



Механическая модель системы

Конструкция механической системы сделана таким образом, что упругие перемещения внешней ребристой оболочки намного меньше ширины цилиндрической щели. Кроме того, ширина цилиндрической щели кольцевого сечения, образованная двумя оболочками намного меньше, чем внешний радиус у внутреннего цилиндра и внутренний радиус у внешней оболочки. Радиус срединной поверхности внутреннего абсолютно жесткого цилиндра значительно больше толщины внешней оболочки. Система считается термостабилизированной. В системе присутствует внешний источник вибрации.

Внешняя поверхность внешней оболочки трубы представляет собой геометрически нерегулярную оболочку, имеющую ребра жесткости. Высота внешней оболочки трубы изменяется ступенчато. Ребра являются внешними шпангоутами. Крепление геометрически нерегулярной оболочки на торцах имеет свободное опирание.

Математическая модель рассматриваемой механической системы можно записать в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, состоящей из трехмерных уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности, уравнений динамики внешней упругой ребристой цилиндрической оболочки и соответствующих граничных условий [3]. При этом уравнения динамики внешней ребристой оболочки получены исходя из гипотез Кирхгофа–Лява с применением интегрального принципа Гамильтона. Ступенчатый характер изменения высоты ребра описывается с помощью разностей функций Хевисайда по продольной координате [4].

Полученная связанная задача гидроупругости решается в безразмерных переменных методом возмущений [5] в предположении гармонического закона вибрации системы. Решение уравнений динамики жидкости ищется в виде одночленных разложений по малому параметру, характеризующему относительную толщину поддерживающего слоя жидкости, и по малому параметру, называемому характеризующему относительный прогиб внешней упругой ребристой цилиндрической оболочки.

Применение метода возмущений, а именно представление всех неизвестных величин таких как компоненты вектора скорости движения вязкой несжимаемой жидкости, давление в слое жидкости, упругие перемещения ребристой оболочки в виде рядов по малым параметрам позволяет значительно упростить изначальную постановку задачи, а именно линеаризовать уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности.

Решение линеаризованных уравнений динамики жидкости производится в предположении неизвестности упругих перемещений внешней ребристой оболочки. В результате получим выражения для компонент вектора скорости жидкости и давления в слое жидкости в виде интегралов от упругих перемещений внешней ребристой оболочки.

Полученные выражения для компонент вектора скорости жидкости и давления в слое жидкости подставляются в уравнения динамики внешней ребристой оболочки. Полученные интегродифференциальные уравнения решаются методом Бубнова–Галеркина в первом приближении, при этом упругие перемещения внешней упругой ребристой оболочки представляются в виде тригонометрических рядов по продольной координате и гармонических функций по окружной координате. В результате решения уравнений динамики внешней ребристой оболочки нашли упругие перемещения оболочек, из которых были найдены амплитудные и фазовые частотные характеристики прогиба оболочки.

Исследование амплитудной частотной характеристики внешней упругой ребристой цилиндрической оболочки позволяет определить резонанс-

ные частоты – частоты на которых происходит наибольший прогиб оболочки. Именно на этих частотах наблюдается падение давления в слое жидкости ниже 0,2 атмосфер, что позволяет говорить о возможности возникновения кавитационного эффекта. В зависимости от наблюдаемых падений давления при работе механизма или агрегата, в состав которого входит рассматриваемая механическая система, можно произвести изменение параметров механической системы так, чтобы резонансные частоты вышли из зоны рабочих частот либо предотвратить падение давления ниже 0,2 атмосфер. Этого можно добиться изменением параметров жидкости, количеством и расположением ребер жесткости, параметров оболочки. Кроме того, исследование модели показало, что при увеличении количества слагаемых в тригонометрическом ряде упругих перемещений никак не сказывается на первой резонансной частоте, а добавляет только последующие резонансы, которые меньше, чем величина первого резонанса. Можно считать, что именно первое слагаемое ряда упругих перемещений определяет максимальную величину (главный тон) прогиба оболочки, а остальные (полутона) лишь добавляют незначительные колебания на более высоких частотах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-6012.2016.8.)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Башта Т. М.* Машиностроительная гидравлика. М. : Машгиз, 1963. 696 с.
2. *Плаксина И. В., Кондратов Д. В., Кузнецова Е. Л.* Гидроупругость геометрически нерегулярной оболочки, содержащей слой вязкой жидкости и упругий цилиндр, в условиях гармонического давления // Научные труды SWorld. 2013. Т. 6, № 4. С. 17–20.
3. *Кондратов Д. В., Калинина А. В.* Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
4. *Кондратов Д. В., Кондратова Ю. Н., Попов В. С., Плаксина И. В.* Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 3. С. 70–76.
5. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М. : Мир, 1967. 310 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

В работе в автомодельной постановке рассматривается задача о свободном пограничном слое на границе раздела двух степенных неньютоновских жидкостей с нелинейной теплопроводностью. Демонстрируется применение к решению задачи метода преобразования.

Пусть два ламинарных потока несмешивающихся вязких несжимаемых степенных неньютоновских жидкостей с нелинейной теплопроводностью изначально движутся раздельно со скоростями $U_{1\infty} = \text{const}$ и $U_{2\infty} = \text{const}$ соответственно ($U_{1\infty} \geq U_{2\infty} > 0$). Пусть $T_{1\infty} = \text{const}$ – температура 1-го потока, а $T_{2\infty} = \text{const}$ – температура 2-го потока. Затем в результате слияния потоков образуется двухслойное течение, содержащее тонкую границу, вблизи которой взаимодействуют частицы соседних потоков – слой смешения.

1. Чтобы описать установившееся автомодельное течение жидкостей в слое смешения без учёта тепла, которое выделяется вследствие работы сил вязкости, необходимо решить краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$|\varphi_i''|^{n-1} \varphi_i''' + k_i \varphi_i \varphi_i'' / (n+1) = 0, \quad (1)$$

$$|\vartheta_i'|^{n-1} \varphi_i'' + \text{Pr}_i^* \varkappa_i \xi_i n \varphi_i \vartheta_i' / (n+1) = 0, \quad (2)$$

$$k_1 = \varkappa_1 = \xi_1 = 1, \quad k_2 = k_{\mu^*} / k_{\rho}, \quad \varkappa_2 = k_u^{1-n} k_c^n, \quad \xi_2 = k_{\mu^*} / k_{\rho} / k_c, \\ k_{\mu^*} = \mu_1^* / \mu_2^*, \quad k_{\rho} = \rho_1 / \rho_2, \quad k_u = U_{1\infty} / U_{2\infty}, \quad k_c = c_1 / c_2$$

с граничными условиями на границе раздела при $\eta = 0$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = a_1, \quad \varphi_1''(0) = k_{\mu^*}^{-1/n} \varphi_2''(0) = a_2, \quad (3)$$

$$\vartheta_1(0) = \vartheta_2(0) = a_3, \quad \vartheta_1'(0) = k_{\lambda^*}^{-1/n} \vartheta_2'(0) = a_4, \quad k_{\lambda^*} = \lambda_1^* / \lambda_2^* \quad (4)$$

и вдали от границы раздела при $\eta \rightarrow \pm\infty$

$$\varphi_1'|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow 1, \quad \varphi_2'|_{\eta \rightarrow -\infty} \rightarrow 1/k_u, \quad (5)$$

$$\vartheta_1|_{\eta \rightarrow +\infty} \rightarrow T_{1\infty} c_1 / U_{1\infty}^2, \quad \vartheta_2|_{\eta \rightarrow -\infty} \rightarrow T_{2\infty} c_1 / U_{1\infty}^2. \quad (6)$$

Здесь $\varphi_i = \varphi_i(\eta)$, $\vartheta_i = \vartheta_i(\eta)$ – автомодельные представители функции тока ψ_i и температуры T_i соответственно, η – независимая автомодельная переменная, ρ_i – плотности, c_i – теплоёмкости, n , μ^* , λ^* – реологические параметры, характеризующие степенные неньютоновские жидкости с нелинейной теплопроводностью, Pr_i^* – обобщённые числа Прандтля. Через a_j ($j = \overline{1, 4}$) обозначены неизвестные начальные условия. При $i = 1$ уравнения (1), (2) описывают движение 1-го (верхнего, $\eta > 0$) слоя, а при $i = 2$ – 2-го (нижнего, $\eta < 0$). Штрихами обозначены производные соответствующего порядка по независимой переменной.

Размерные и безразмерные автомодельные величины связаны соотношениями

$$u_i = U_{1\infty} \varphi_i', \quad v_i = \left(\frac{\mu_1^* n U_{1\infty}^{2n-1}}{\rho_1 x^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{\eta \varphi_i' - \varphi_i}{1+n},$$

$$T_i = \frac{U_{1\infty}^2}{c_1^2} \vartheta_i, \quad \eta = y \left(\frac{\mu_1^* x n U_{1\infty}^{n-2}}{\rho_1} \right)^{-\frac{1}{n+1}},$$

где u_i и v_i – продольная и поперечная составляющие скорости частиц жидкости, x , y – декартовы координаты.

Переменные ϑ_i не фигурируют в уравнениях (1). Это означает, что решение исходной задачи можно разделить: сначала решить динамическую краевую задачу (1), (3), (5), т.е. определить φ_i , а затем температурную краевую задачу (2), (4), (6), т.е. найти ϑ_i , считая φ_i и их производные известными.

2. Упростим решение динамической задачи, применяя метод преобразования по стандартной схеме [1]. Введём линейное однопараметрическое преобразование:

$$\eta = A^{\alpha_1} \bar{\eta}, \quad \varphi_1 = A^{\alpha_2} \bar{\varphi}_1(\bar{\eta}), \quad \varphi_2 = A^{\alpha_3} \bar{\varphi}_2(\bar{\eta}). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1), (3), (5) и полагая $a_2 = A$ потребуем, чтобы все коэффициенты, содержащие A , в полученных выражениях были равны

$$A^{n\alpha_2 - (2n+1)\alpha_1} = A^{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad A^{\alpha_2 - 2\alpha_1} = A^{\alpha_3 - 2\alpha_1}, \quad A^{\alpha_2 - 2\alpha_1} = A. \quad (8)$$

Из (8) имеем

$$\alpha_1 = (n - 2)/3, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = (2n - 1)/3.$$

Следовательно, уравнения (1) с граничными условиями (3), (5) в новых переменных принимают соответственно вид

$$|\bar{\varphi}_i''|^{n-1} \bar{\varphi}_i''' + k_i \bar{\varphi}_i \bar{\varphi}_i'' / (n+1) = 0, \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}_1(0) = \bar{\varphi}_2(0) = 0, \quad \bar{\varphi}'_1(0) = \bar{\varphi}'_2(0) = \bar{A}, \quad \bar{\varphi}''_1(0) = k_{\mu^*}^{-1/n} \bar{\varphi}''_2(0) = 1, \quad (10)$$

$$\bar{\varphi}'_2|_{\eta \rightarrow -\infty} \rightarrow \frac{A^{-(n+1)/3}}{k_u}, \quad (11)$$

где

$$\bar{A} = A^{-(n+1)/3} a_1, \quad A = \left(\bar{\varphi}'_1|_{\bar{\eta} \rightarrow +\infty} \right)^{-3/(n+1)}.$$

Таким образом, решение динамической задачи упрощается и сводится к решению краевой задачи для уравнений (9) с граничными условиями (10) на границе раздела и (11) «на бесконечности».

3. Для численного решения краевой задачи был применён метод пристрелки, представляющий собой комбинацию метода Ньютона и метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Решение задачи демонстрируется для следующего набора значений параметров: $k_u = 2$, $k_\rho = 0.5$, $k_{\mu^*} = 0.5$, $k_c = 1$, $k_{\lambda^*} = 1$, $Pr_1^* = 1$, $Pr_2^* = 1$. На рис. 1 и 2 показаны распределения безразмерных представителей продольных и поперечных составляющих скоростей соответственно при различных значениях параметра k_ρ . На рис. 3 и 4 представлены изменения безразмерного представителя температуры при различных значениях параметров k_{λ^*} и k_ρ .

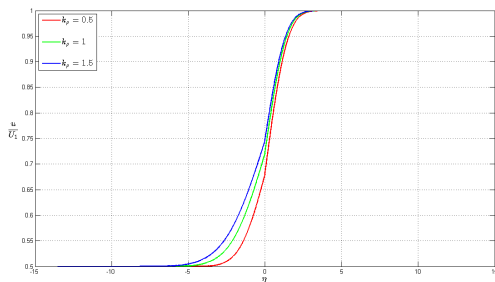


Рис. 1

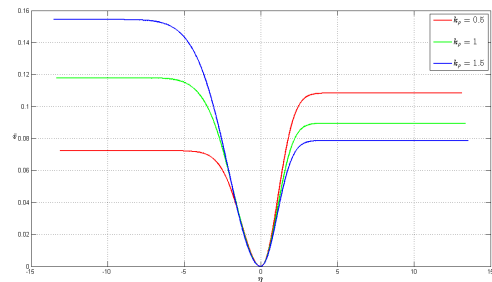


Рис. 2

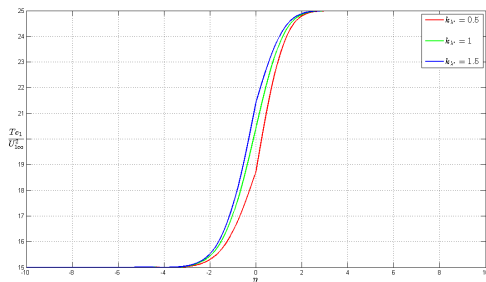


Рис. 3

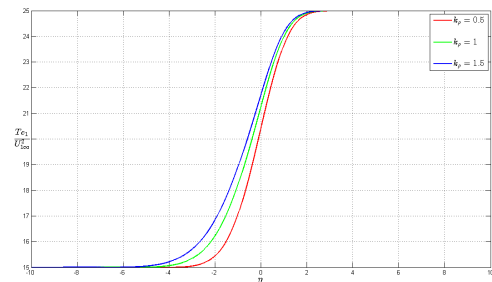


Рис. 4

Результаты решения задачи, модифицированной с помощью метода преобразования, совпадают с результатами решения исходной задачи, однако трудоёмкость решения уменьшается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач : пер. с англ. М. : Мир, 1982. 296 с.

УДК 629

Е. А. Козлов, Ю. Н. Челноков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ЗНАЧЕНИЙ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В данной работе исследуется задача переориентации плоскости орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты с использованием теории нелинейной стабилизации. Для решения задачи используется дифференциальное кватернионное уравнение ориентации орбиты в отклонениях. Работа является развитием [1].

Введем систему координат η , связанную с центром масс КА, таким образом, чтобы ось η_1 была направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось η_3 – перпендикулярно плоскости орбиты КА, а η_2 образовывала правую тройку с осями η_1 и η_3 . Введем также систему координат ξ , которая в инерциальной системе координат X характеризует собой ориентацию орбиты КА и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I , угловым расстоянием перицентра от узла ω_π . Система координат ξ связана с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O притяжения Земли, ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора \mathbf{c} момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 – так, чтобы орты осей ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 образовывали правую тройку.

Считается, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости орбиты КА. Тогда орбита КА в процессе управления движения центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления \mathbf{u} как неизменяемая фигура.

Требуется найти управление \mathbf{u} , переводящее плоскость орбиты КА, движение центра масс которого описывается дифференциальными уравнениями

$$2 \frac{d\mathbf{\Lambda}}{dt} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi, \quad \frac{d\varphi_{tr}}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{tr}}, \quad c = \text{const}, \quad (1)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{\Omega}_\xi = u \frac{r}{c} (\cos \varphi_{tr} \mathbf{i}_1 + \sin \varphi_{tr} \mathbf{i}_2),$$

из любого заданного начального состояния

$$t = t_0, \quad \mathbf{\Lambda}(t_0) = \mathbf{\Lambda}^0$$

в требуемое конечное состояние

$$t = t^*, \quad \mathbf{\Lambda}(t^*) = \mathbf{\Lambda}^*,$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); $\mathbf{\Omega}_\xi$ – отображение вектора $\mathbf{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты КА на базис ξ ; φ_{tr} – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); p и e – параметр и эксцентриситет орбиты КА; u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА; Λ_j – компоненты кватерниона (параметры Эйлера), характеризующие ориентацию орбиты КА в инерциальной системе координат X ; \mathbf{i}_j – векторные мнимые единицы Гамильтона; \circ – символ кватернионного умножения.

Для решения исследуемой задачи в рамках теории нелинейной стабилизации [2] нами используются дифференциальные уравнения возмущенного движения центра масс КА в параметрах Эйлера, получающиеся из (1):

$$2 \frac{d\Delta\mathbf{\Lambda}}{dt} = \Delta\mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{\Omega}_\xi = u \frac{r(\varphi_{tr}(t))}{c} \Delta\mathbf{\Lambda} \circ (\cos \varphi_{tr}(t) \mathbf{i}_1 + \sin \varphi_{tr}(t) \mathbf{i}_2), \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_{tr}(t)}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{tr}(t)}, \quad c = \text{const}.$$

Здесь $\Delta\mathbf{\Lambda} = \cos(\frac{1}{2}\Delta\varphi) + \sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi) \mathbf{e}_\Delta$ – отклонение углового положения орбиты КА от ее требуемого положения $\mathbf{\Lambda}^*$, которое определяется кватернионной формой:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^* \circ \Delta\mathbf{\Lambda},$$

где $\Delta\varphi$ и \mathbf{e}_Δ – эйлеров угол и единичный вектор эйлеровой оси возмущенного конечного поворота орбиты КА относительно ее невозмущенного углового положения, задаваемого кватернионом поворота Λ^* .

Невозмущенному движению центра масс КА соответствует частное решение $\Delta\Lambda = 1$ кватернионного уравнения при управляющем воздействии $u = 0$. Этому частному решению отвечают нулевое значение эйлерова угла $\Delta\varphi$ и любые значения проекций $e_{\Delta i}$ ($i = 1, 2, 3$) единичного вектора \mathbf{e}_Δ эйлерова поворота на оси системы координат, связанной с орбитой.

Задача переориентации орбиты с использованием теории нелинейной стабилизации формулируется следующим образом: требуется построить стабилизирующее управление \mathbf{u} , при котором невозмущенное движение $\Delta\Lambda(t) = 1$ центра масс КА при управляющем воздействии $u = 0$ будет устойчивым.

Для построения стабилизирующего управления будем использовать функцию Ляпунова (второй метод теории устойчивости движения), применяя подход Бранца–Шмыглевского [3].

Рассмотрим положительно определенную функцию Ляпунова:

$$W = 1 - \Delta\Lambda_0^2 = \frac{1}{2}[(1 - \Delta\Lambda_0^2) + \Delta\Lambda_1^2 + \Delta\Lambda_2^2 + \Delta\Lambda_3^2].$$

Производная от этой функции с учетом (2) примет вид

$$\dot{W} = u \frac{r}{c} \Delta\Lambda_0 (\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi).$$

Выберем управление u в виде

$$u = -k \Delta\Lambda_0 (\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi), \quad k > 0. \quad (3)$$

Для выбранного управления u производная \dot{W} примет вид

$$\dot{W} = -k \Delta\Lambda_0^2 (\Delta\Lambda_1 \cos \varphi + \Delta\Lambda_2 \sin \varphi)^2.$$

Эта функция является знакопостоянной отрицательной, и процесс переориентации орбиты будет устойчив не асимптотически в соответствии с теоремой устойчивости Ляпунова.

Таким образом, управление u , имеющее вид (3), обеспечивает сходимость процесса коррекции к положению равновесия во всей области изменения $\Delta\Lambda$, кроме точки $\Delta\Lambda_0 = 0$, когда угол эйлерова поворота равняется π радиан или 180° .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М. : Физматлит, 2011. 560 с.
3. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.

УДК 629

К. Ю. Коннов, И. А. Панкратов

НАИСКОРЕЙШИЕ МАНЁВРЫ САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Движение центра масс летательного аппарата (самолёта) в горизонтальной плоскости с постоянной по величине скоростью описывается системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V} \operatorname{tg} \gamma. \quad (1)$$

где t – время, θ – угол между осью Ox и направлением вектора скорости V , g – ускорение свободного падения, γ – угол крена летательного аппарата.

Угол крена летательного аппарата является управляющим параметром, изменяя его можно изменять направление вектора скорости и переводить летательный аппарат из одного состояния в другое. Величины x , y , ϑ являются фазовыми координатами управляемой системы.

В начальный момент времени положение центра масс летательного аппарата и направление вектора скорости определяются соотношениями

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad \theta = \theta_0. \quad (2)$$

В конечный момент времени центр масс летательного аппарата должен находиться на заданной прямой в плоскости Oxy (вектор его скорости направлен вдоль этой прямой):

$$t = t^* : \quad y = y_k + x \operatorname{tg} \theta_k, \quad \theta = \theta_k. \quad (3)$$

Требуется определить оптимальное управление $\gamma = \gamma(t)$, которое переводит управляемую систему (1) из начального состояния (2) на многообразии (3) за минимальное время.

Поставленная задача является задачей оптимального управления с подвижным правым концом траектории и нефиксированным промежуток времени. При этом на управляющий параметр наложено ограничение

$$-\gamma_{\max} \leq \gamma \leq \gamma_{\max}. \quad (4)$$

Для численного решения задачи удобно ввести безразмерные переменные для фазовых координат, времени, управляющего параметра и функционала:

$$x = Lx_1, \quad y = Lx_2, \quad \theta = x_3, \quad t = T\tau, \quad u = \operatorname{tg} \gamma, \quad J = TJ^b, \quad (5)$$

где L, T – масштабы длины и времени соответственно. Подставим соотношения (5) в уравнения (1), получим

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \cos x_3, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = \sin x_3, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = u. \quad (6)$$

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума [2]. Функция Гамильтона–Понтрягина в безразмерных переменных имеет вид

$$H = -1 + \psi_1 \cos x_3 + \psi_2 \sin x_3 + \psi_3 u.$$

Сопряженные переменные ψ_1, ψ_2, ψ_3 удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = \psi_1 \sin x_3 - \psi_2 \cos x_3. \quad (7)$$

Оптимальное управление с учетом ограничения (4) имеет вид

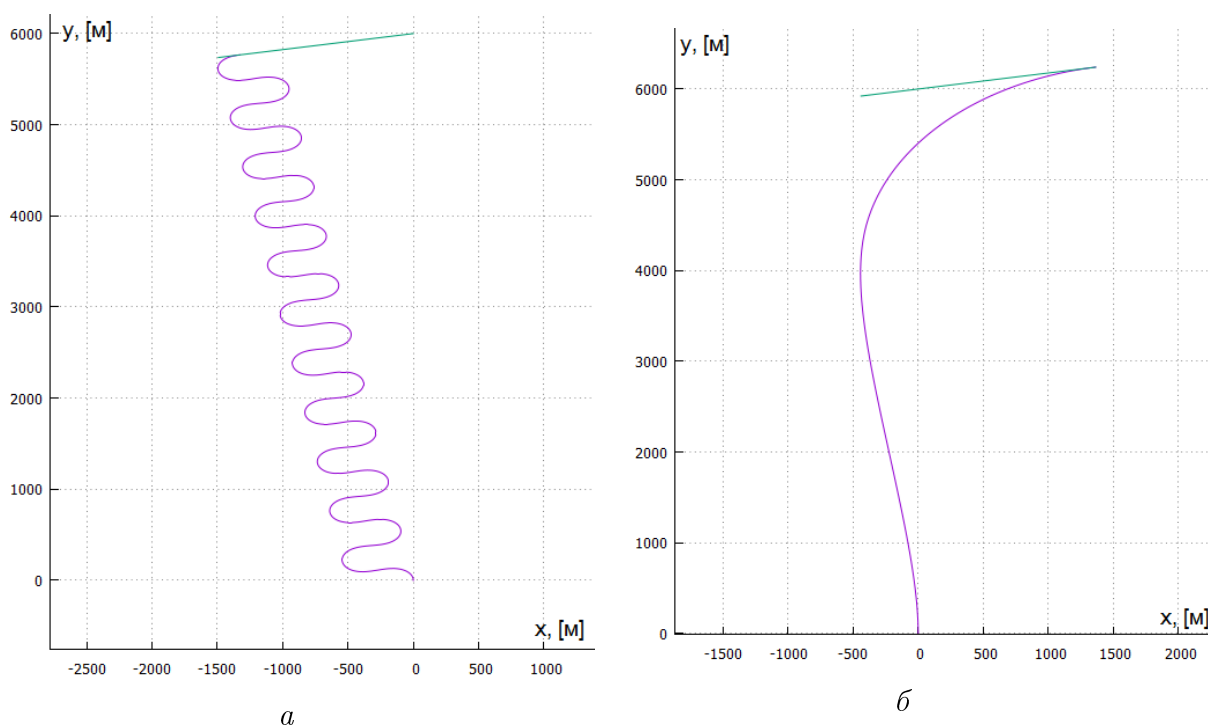
$$u^{opt} = \operatorname{tg} \gamma_{\max} \cdot \operatorname{sign} \psi_3. \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи оптимального управления сведено к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений шестого порядка, которую необходимо дополнить условием трансверсальности и равенством функции Гамильтона–Понтрягина нулю в конце движения.

Для численного решения задачи была составлена программа на языке C++. Реализованный в ней оригинальный алгоритм решения краевой задачи является комбинацией методов Рунге–Кутты четвертого порядка точности, модифицированного метода Ньютона и градиентного спуска [3]. Указанный алгоритм был успешно применён ранее в работах [4, 5] для решения задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата.

На рисунке в размерных переменных показаны траектории движения летательного аппарата для случая, когда управление является ограниченным и нет (при этом решена задача, близкая к задаче быстродействия).

Следует отметить, что если ставится задача обеспечения быстродействия и при этом самолет в начальный момент времени летит не перпендикулярно конечному многообразию, то тогда наблюдается активная раскачка самолета по крену на всем рассматриваемом промежутке времени. Такой характер движения на практике сопровождается быстроизменяющимися знакопеременными перегрузками, которые негативно влияют как на летчиков и пассажиров, так и на саму конструкцию самолета.



Случай быстродействия: *a* – неограниченное управление, *б* – ограниченное управление

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я. Г. Численное исследование систем автоматического управления. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2001. 24 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
3. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 434 с.
4. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.

5. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

УДК 532

А. С. Лебедев, И. А. Панкратов

РАСЧЁТ ЦИРКУЛЯЦИИ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕТРА МЕТОДОМ ЧАСТИЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Известно, что при расчёте течений в бассейнах, озёрах и других водоёмах может быть применена упрощённая модель циркуляции [1]. При этом в уравнениях количества движения отбрасываются инерционные члены, а уравнение неразрывности полагается стационарным. В работах [2–5] было показано, что в этом случае решение задачи сводится к уравнению Пуассона относительно функции тока ψ :

$$W = \gamma \nabla^2 \psi. \quad (1)$$

Здесь $W = \partial \tau_1|_s / \partial x_2 - \partial \tau_2|_s / \partial x_1$ – величина, зависящая от ветрового воздействия; γ – коэффициент ветрового напряжения. Величины $\tau_1|_s$, $\tau_2|_s$ обусловлены ветровыми напряжениями.

Предполагается, что составляющие напряжения трения на дне $\tau_1|_b$ и $\tau_2|_b$ прямо пропорциональны компонентам средних значений массового расхода q_1 и q_2 :

$$\tau_1|_b = \gamma q_1; \quad \tau_2|_b = \gamma q_2.$$

На береговых границах производная по нормали от функции тока равна нулю, а на входе в водоём функция тока известна.

Рассмотрим прямоугольное озеро $ABCD$: $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, которое подвержено воздействию ветра так, что W в уравнении (1) определяется как $(x = x_1, y = x_2)$

$$W/\gamma = Ax, \quad A = \text{const.}$$

Пусть граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

при $x = 0$ и $x = 1$;

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = 1.$$

Применим метод частичной дискретизации [6]. Будем искать решение $\psi \approx \bar{\varphi}$ уравнения (1) в виде линейной комбинации базисных функций

$$\bar{\varphi} = y + \sum_{m=1}^M a_m(y) N_m(x), \quad \text{где } N_m(x) = \cos(\pi m x).$$

Подставляя $\bar{\varphi}$ в (1) и выбирая весовые функции по методу Галёркина (весовые функции совпадают с базисными), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $a_m(y)$:

$$\sum_{m=1}^M \int_0^1 \left[\frac{d^2 a_m}{dy^2} - a_m(\pi m)^2 \right] \cos(\pi m x) \cos(\pi l x) dx = \int_0^1 (A/\gamma) \cos(\pi l x) dx.$$

Вычисляя интегралы с учётом ортогональности системы базисных функций на отрезке $[0, 1]$, имеем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений $m = \overline{1, M}$:

$$\frac{d^2 a_m}{dy^2} - a_m(\pi m)^2 = \frac{2A}{\gamma \pi m} [1 + (-1)^{m+1}].$$

При этом граничные условия имеют вид $a_m(0) = a_m(1) = 0$.

Общее решение указанной системы есть [7]

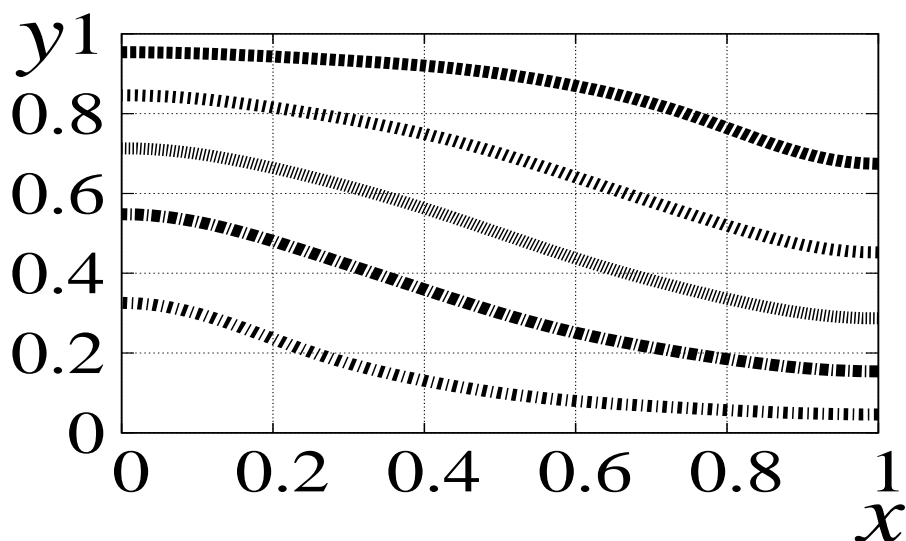
$$a_m = C_m^1 e^{\pi m y} + C_m^2 e^{-\pi m y} - \frac{2A}{\gamma(\pi m)^3} [1 + (-1)^{m+1}].$$

Отметим, что граничные условия на входе в водоём удовлетворяются точно за счёт первого слагаемого в $\bar{\varphi}$. При этом произвольные постоянные интегрирования C_m^1, C_m^2 легко находятся из условий для a_m .

Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab [8].

На рисунке приведены результаты решения задачи о циркуляции воды в озере с учётом потока от втекающей в озеро реки и ветровой нагрузки для следующих значений параметров: $A/\gamma = 3, M = 5$. Показаны линии тока для $\psi = 0.1, \psi = 0.3, \dots, \psi = 0.9$ (снизу вверх).

Отметим, что в отличие от работ [2–4, 9] при применении метода частичной дискретизации приближённое решение задачи задаётся аналитическими формулами и не требуется численно решать систему алгебраических уравнений. Было установлено, что при увеличении количества базисных функций последнее слагаемое в общем решении, а также произвольные постоянные C_m^1, C_m^2 быстро стремятся к нулю. При этом брать



Линии тока (учтены поток от реки и ветровая нагрузка)

$M > 5$ нецелесообразно, так как в этом случае приближённое решение уже практически не изменяется.

В дальнейшем предполагается применить рассмотренный выше метод для случая, когда внутри озера находится остров.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л. : Судостроение, 1979. 264 с.
2. Маркелова О. И., Панкратов И. А. Расчет циркуляции воды в озере // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 114–117.
3. Ильясова Т. А., Панкратов И. А. Математическое моделирование циркуляции воды в озере // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 101–104.
4. Панкратов И. А. Изчисляване на линията на тока по време на циркуляция, предизвикана от ветрове [Электронный ресурс] // Парадигма : электрон. науч. журн. 2016. Т. 1, № 1. С. 115–119. URL: <http://paradigma.science/publics/index.php/paradigma/article/view/96/99> (дата обращения: 15.03.2016).
5. Панкратов И. А. Численная аппроксимация линий тока методом Галёркина // *Juvenis scientia*. 2016. № 2. С. 4–6.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир, 1986. 318 с.
7. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
8. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Рудченко Е. А. Scilab : Решение инженерных и математических задач. М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 260 с.
9. Панкратов И. А., Рымчук Д. С. Расчёт течений мелкой воды // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 120–124.

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИЦИИ ИЗ ДВУХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ГЛАДКО СОПРЯЖЕННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ

В работе [1] в условиях безмоментной теории получены замкнутые интегралы сингулярных уравнений осесимметричной упругости для композиции из двух элементов (конус-сфера), гладко сопряженных между собой, находящихся под внутренним давлением (рис. 1). В данной работе приведено решение при воздействии на такую оболочку сжимающих усилий.

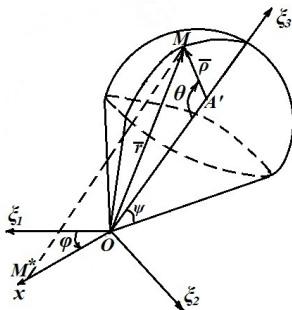


Рис. 1

Для композиции из двух элементов, конуса и сферы, гладко сопряженных между собой, получен вид вектора положения любой точки срединной поверхности

$$\begin{aligned} \bar{r}(\theta, \varphi) = R \left(\frac{\sin \theta}{\sin(\psi+\theta)} + \left(\sin \theta - \frac{\sin \theta}{\sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) (\cos \varphi \bar{\xi}_1 + \sin \varphi \bar{\xi}_2) + \\ + R \left(\frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \psi \sin(\psi+\theta)} + \left(\frac{1 - \sin \psi \cos \theta}{\sin \psi} - \frac{\sin \theta}{\operatorname{tg} \psi \sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) \bar{\xi}_3, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \psi$. На основании стандартных процедур компоненты метрического тензора и главные кривизны запишутся:

$$G_{11} = R^2 \left(\frac{1}{\sin^4(\psi+\theta)} + \left(1 - \frac{1}{\sin^4(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right), \quad G_{12} = 0,$$

$$G_{22} = R^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2(\psi+\theta)} + \left(\sin^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right), \quad (2)$$

$$k_{11} = \frac{1}{R} (0 + (1 - 0)H(\theta - \theta_1)),$$

$$k_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\cos \psi \sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} + \left(1 - \frac{\cos \psi \sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right). \quad (3)$$

Система уравнений равновесия композиции в усилиях преобразуется к виду

$$\begin{cases} T_{\theta}^{11} + \left(\frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi+\theta)} + \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{\sin \psi}{\sin \theta \sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) T^{11} = \\ = \tilde{q}_3 R \left(\frac{\sin \psi}{\cos \psi \sin^2(\psi+\theta)} + \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{\sin \psi}{\cos \psi \sin^2(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) - \\ - \tilde{q}_1 R \left(\frac{1}{\sin^2(\psi+\theta)} + \left(1 - \frac{1}{\sin^2(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right), \\ T^{22} = \tilde{q}_3 R \left(\frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\psi+\theta)} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) - \\ - (0 + (1 - 0)H(\theta - \theta_1)) T^{11}. \end{cases} \quad (4)$$

Решение первого уравнения системы (4) разыскиваем в виде [2]

$$T^{11}(\theta) = T_1^{11}(\theta) + (T_2^{11}(\theta) - T_1^{11}(\theta))H(\theta - \theta_1), \quad (5)$$

и для случая $\tilde{q}_3 = q_3 = \text{const}$, $\tilde{q}_1 = 0$ получили:

$$\begin{aligned} T_1^{11} &= \frac{c_1 \sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \frac{Rq_3(1-\cos(2\theta+\psi) \cos \psi)}{\cos \psi \sin \theta \sin(\theta+\psi)}, \\ T_2^{11} &= \frac{c_2}{\sin^2 \theta} - \frac{Rq_3}{2} \operatorname{ctg}^2 \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Связывая постоянные интегрирования c_l ($l = 1, 2$) с учетом условий $T_2^{11}(\theta_1) = T_1^{11}(\theta_1)$ и полученных интегралов (6) решение (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{q_3 R}{2 \cos \psi} \left(\frac{\sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} + \left(\frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right) + \\ &+ \frac{q_3 R}{2} \left(\frac{(1-\cos(2\theta+\psi) \cos \psi)}{\cos \psi \sin \theta \sin(\theta+\psi)} + \left(\frac{(2-\cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{(1-\cos(2\theta+\psi) \cos \psi)}{\cos \psi \sin \theta \sin(\theta+\psi)} \right) H(\theta - \theta_1) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В этом случае T^{22} примет вид

$$\begin{aligned} T^{22} &= q_3 R \left(\frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\psi+\theta)} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\cos \psi \sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) + \\ &+ \frac{q_3 R}{2} \left(0 + \left(\frac{3-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 0 \right) H(\theta - \theta_1) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В случае, когда $\tilde{q}_1 = 2\pi R_3 \cos \psi q_1 (H(\theta - \theta_2) - H(\theta - \theta_3))$, $\tilde{q}_3 = q_3$, выражение для T^{11} запишется в виде

$$\begin{aligned} T^{11} &= -\frac{q_3 R}{2 \cos \psi} \left(\frac{\sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} + \left(\frac{\cos \psi}{\sin^2 \theta} - \frac{\sin(\psi+\theta)}{\sin \theta} \right) H(\theta - \theta_1) \right) + \\ &+ \frac{q_3 R}{2} \left(\frac{(1-\cos(2\theta+\psi) \cos \psi)}{\cos \psi \sin \theta \sin(\theta+\psi)} + \left(\frac{(2-\cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta} - \frac{(1-\cos(2\theta+\psi) \cos \psi)}{\cos \psi \sin \theta \sin(\theta+\psi)} \right) H(\theta - \theta_1) \right) + \\ &+ \frac{\pi R_3 q_1 \operatorname{ctg} \psi}{2} \left(\frac{(2-\cos 2\theta_2 - \cos 2(\psi+\theta_2)) \sin(\psi+\theta)}{\sin^2(\psi+\theta_2) \sin \theta} + \frac{-2+\cos 2\theta+\cos 2(\psi+\theta)}{\sin \theta \sin(\psi+\theta)} \right) H(\theta - \theta_2) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \frac{\pi R_3 q_1 \operatorname{ctg} \psi}{2} \left(\frac{(-2 + \cos 2\theta_3 + \cos 2(\psi + \theta_3)) \sin(\psi + \theta)}{\sin^2(\psi + \theta_3) \sin \theta} + \frac{2 - \cos 2\theta - \cos 2(\psi + \theta)}{\sin \theta \sin(\psi + \theta)} \right) H(\theta - \theta_3).$$

На основании замкнутых интегралов (7), (8) и (9) исходных уравнений на рис. 2–5 приводятся графики усилий для различных значений углов ψ . Количественный анализ полученных решений показал следующие закономерности.

1. С увеличением угла ψ значение усилия T^{11} (см. рис. 2) на конусе растет, но на сфере не меняется.
2. Усилие T^{22} (см. рис. 3) в месте сопряжения имеет ограниченный скачек. Таким образом, при гладком сопряжении строгое безмоментное состояние не выполняется. Полученные результаты не противоречат исследованиям В. В. Новожилова [3]. Значения усилий на конусе мало чувствительно к углу ψ даже в зоне сопряжения.

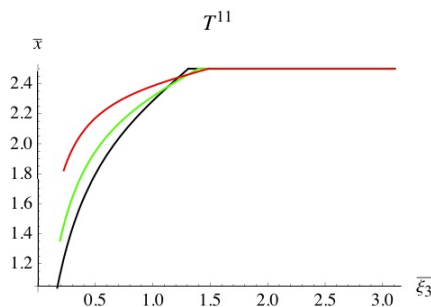


Рис. 2

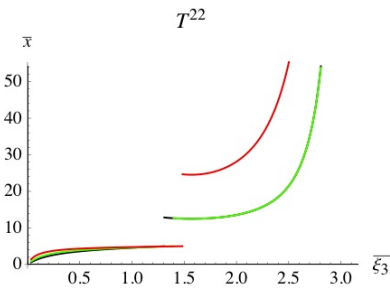


Рис. 3

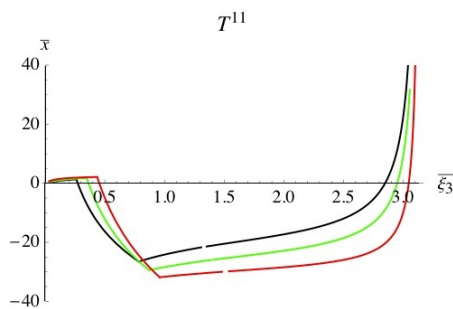


Рис. 4

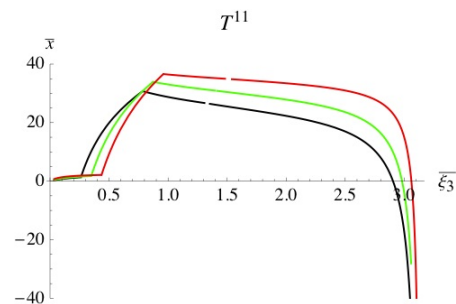


Рис. 5

3. При изменении направления действия \tilde{q}_1 усилие T^{11} меняет знак (см. рис. 4, 5).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белосточный Г. Н., Мыльцина О. А. К вопросу статической устойчивости композиции из различных по геометрическим свойствам оболочек вращения // Докл. Академии военных наук (Поволжское отделение) / ОАО «КБ Электроприбор». Саратов, 2012. № 5. С. 21–24.

2. Белосточный Г. Н. Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Докл. Академии военных наук (Поволжское отделение) / ОАО «КБ Электроприбор». Саратов, 1999. № 1. С. 14–26.

3. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек. Л. : СУДПРОМ ГИЗ, 1962. 213 с.

УДК 539.3,534.1

К. О. Орлова, И. В. Папкина, Е. Ю. Крылова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СЛОИСТЫХ БАЛОК В ПОЛЕ БЕЛОГО ШУМА С УЧЕТОМ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В работе получены уравнения контактного взаимодействия двух слоистых геометрически и физически нелинейных балок. Влияние знакопеременной нагрузки на колебания слоистых балок было исследовано в статьях [1, 2]. В данной работе изучается влияние аддитивного белого шума на колебания пакета балок.

1. Постановка задачи. Для создания математической модели колебаний многослойного пакета слоистых балок делаем следующие предположения относительно геометрии балочной конструкции, свойств материалов, слоев и условий эксплуатации: любое поперечное сечение, нормальное к срединной поверхности до деформации, остается после деформации прямым и нормальным к срединной поверхности, вместе с тем высота сечения не изменяется; инерция вращения элементов балки не учитывается, однако учитываются силы инерции, отвечающие за перемещения вдоль нормали к срединной поверхности; внешние силы не меняют своего направления при деформации балки; продольный размер балки значительно превышает ее поперечные размеры; геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана, физическая – на основе теории малых упруго-пластических деформаций; решение контактной задачи нелинейной теории балок базируется на исключении из числа неизвестных функций контактного давления с помощью винклеровой связи. Будем рассматривать тонкие гибкие балки и, следуя [3], запишем деформации в произвольном слое балки в виде $e_{xx}^z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^z}{\partial x} \right)^2$, $e_{xz}^z = \frac{\partial u^z}{\partial z} + \frac{\partial w^z}{\partial x}$. Считаем, что тангенциальные перемещения u^z , w^z распределены по толщине многослойной балки по линейному закону: $u^z = u - z \frac{\partial^2 w^z}{\partial x^2}$, $w^z = w$. Тогда $e_{xx}^z = \epsilon_{11} - z \frac{\partial^2 w^z}{\partial x^2}$, где $\epsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w^z}{\partial x} \right)^2$,

$z \in [-h^j, h^j]$. Запишем закон Гука для i -го слоя j -й балки: $\sigma_{xx}^{i,j} = E^{i,j} e_{xx}^i$, $\sigma_{zz}^{i,j} = E^{i,j} e_{zz}^i$, здесь h^j – толщина j -й балки, $E(x, z)$ – модуль упругости. Согласно статистической гипотезе $\sigma_{zz}^{i,j} = 0$. Таким образом, выражение для напряжений будет иметь вид: $\sigma_{zz}^{i,j} = E^{i,j} \epsilon_{11} - z E^{i,j} \frac{\partial^2 w^{i,j}}{\partial x^2}$.

Уравнения движения балки и граничные условия получим исходя из энергетических предпосылок: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta' W) dt = 0$, где K – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, $\delta' W$ – сумма элементарных работ внешних сил. После соответствующих преобразований получим уравнения движения элемента срединной линии i -го слоя j -й балки:

$$\frac{\partial T_{11}^{i,j}}{\partial x} - (2h^j) \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u^{i,j}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}^{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{11}^{i,j} \frac{\partial w^{i,j}}{\partial x} \right) + q^j - (2h^j) \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w^{i,j}}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь $T_{11}^{i,j} = \epsilon_{11} \int_{-h^j}^{h^j} E^{i,j} dz$ – нормальные усилия, $M_{11}^{i,j} = \frac{\partial^2 w^{i,j}}{\partial x^2} \int_{-h^j}^{h^j} E^{i,j} z^2 dz$ – изгибающие моменты, $q^j = q_k + q_n$, q_k отвечает за контактное взаимодействие балок, q_n – внешняя нормальная нагрузка, $q_k = (-1)^j K \frac{E^j}{h^j} \left(w^j + hk - w^{j+1} \frac{h^j}{h^{j+1}} \right) \psi$, $j = (1, \dots, n-1)$, n – количество балок, $\psi = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sing} \left(w^j + hk - w^{j+1} \frac{h^j}{h^{j+1}} \right) \right]$, γ – удельный вес материала, g – ускорение свободного падения.

К полученной системе присоединим граничные условия жесткой заделки торцов рассматриваемой балочной структуры: $w^j = 0$, $u^j = 0$, $\frac{\partial w^j}{\partial x} = 0$ и нулевые начальные условия. Полученную дифференциальную задачу приведем к безразмерному виду на основании теории подобия и размерностей.

2. Методы решения. Для сведения распределенной системы к системе с сосредоточенными параметрами воспользуемся методом конечных разностей с аппроксимацией $O(c^2)$ по пространственной координате x . Число разбиений в методе конечных разностей $n = 40$ выбрано по принципу Рунге, обоснование приведено в статье [4]. После сведения задачи к нормальному виду задачу Коши будем решать методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности по времени относительно функции прогиба w и перемещения u . Шаг по времени выбирался по правилу Рунге.

3. Численный эксперимент. Исследуем нелинейные колебания слоистой балки Эйлера–Бернулли, находящейся под действием

знакопеременной нормальной нагрузки и аддитивного белого шума $q_n = q_{nois} + q_0 \text{Sin}(\omega_p t)$, q_0 – амплитуда внешней нормальной нагрузки, ω_p – ее частота. Аддитивный шум добавлен в систему в виде постоянного слагаемого с постоянной интенсивностью $q_{nois} = q_{n0} \left[\frac{2.0 \text{rand}()}{(RAND_{MAX} + 1.0) - 1.0} \right]$, q_{n0} – интенсивность шума, $\text{rand}()$ – стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое значение от 0 до $RAND_{MAX}$ – константа, равная 65535. В результате без амплитуды выражение принимает произвольные дробные значения в диапазоне $(-1; 1)$. Параметры численного эксперимента: отношение линейных размеров балки $\lambda = 50$, коэффициент диссипации среды $\epsilon = 1$, амплитуда внешней нормальной нагрузки $\omega_p = 5$, амплитуда вынуждающей нагрузки менялась на интервале $q_0 \in [50; 23000]$, материал внутреннего слоя – стеклопластик, внешних слоев – сталь. Исследования проводились с позиции нелинейной динамики и качественной теории дифференциальных уравнений. Были построены сигналы, фазовые портреты и спектры мощности Фурье, вейвлет-спектры, автокорреляционная функция, отображения Пуанкаре, ляпуновские показатели. Приведены результаты численного эксперимента для толщины внешнего слоя $h = 1/2$. При нагрузке $q_0 = 50$ колебания на частоте возбуждения $\omega_p = 5$. Шумовое поле интенсивности $q_{n0} = 10$ приводит к хаотическому спектру Фурье. Увеличение амплитуды нагрузки до $q_0 = 1500$ влечет появление частоты $a_1 = 0.83449$. Присутствие внешних флуктуаций той же интенсивности приводит к зашумлению спектра в области частоты a_1 . Дальнейший рост управляющего параметра до $q_0 = 16500$ провоцирует появление серии линейно-зависимых частот a_2, a_3, b_1, b_2 ($\omega_p - b_1 = a_3 - a_2 + a_2 - a_1 = b_1 - b_2 = b_2 - a_3 = 0.93$) и хаотической составляющей в сигнале. Шум в данном случае способствовал очищению спектра колебаний от хаотической составляющей. При воздействии полем белого шума на колебания системы, переходящей в хаос по сценарию Рюэля–Такенса, появление частоты уменьшало шумовое воздействие на сигнал, притягивая шумовую составляющую к фазовой траектории динамической системы. Шум также приводил к переходу хаотических колебаний системы в квазипериодические.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Saltykova O. A., Zhigalov M. V., Krysko V. A. Investigations of chaotic dynamics of multi-layer beams using taking into account rotational inertial effects // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2014. Vol. 19, № 8. P. 2568–2589.

2. Крылова Е. Ю., Панкова И. В., Крысько В. А. Нелинейная динамика параметрических колебаний двухслойных распределенных систем // Вестн. Саратов. гос. техн. ун-та. 2013. Т. 1, № 1. С. 7–11.

3. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. С. 272.

4. Krysko A. V., Awrejcewicz J., Kutepov I. E., Dobriyan V., Krysko V. A. Chaotic dynamics of flexible Euler-Bernoulli beams // Chaos. 2014. Vol. 34, № 4. P. 1–25.

УДК 519.6, 531

И. А. Панкратов

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Постановка задачи

Пусть управляемая система описывается линейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A_{n \times n} \mathbf{x} + B_{n \times 1} u,$$

где управление u есть скалярная функция, на которую не наложены ограничения.

Требуется перевести систему из начального положения

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

в конечное

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^k.$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^T u^2 dt,$$

характеризующий затраты энергии на управление; время окончания управляемого процесса T считается заданным.

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина [1]. Введем вектор сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$. Известно [2], что сопряженная система имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -A^T \boldsymbol{\psi}.$$

При этом оптимальное управление имеет вид

$$u^{opt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j \psi_j.$$

Таким образом, задача сведена к краевой задаче с закрепленным правым концом траектории, описываемой системой $2n$ линейных дифференциальных уравнений, и $2n$ краевыми условиями.

Метод взвешенных невязок

Ранее в работах [3–7] приближённое решение рассматриваемой задачи оптимального управления искалось в виде

$$\begin{aligned} x_j &\approx \hat{x}_j = x_j^0 + \sum_{k=1}^M a_{j,k} N_{j,k}(t), \\ \psi_j &\approx \hat{\psi}_j = \sum_{k=1}^M a_{n+j,k} N_{n+j,k}(t); \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Здесь $N_{j,k}(t)$, $j = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$, – система линейно независимых базисных функций, удовлетворяющих определенным условиям.

Подставляя указанные разложения в фазовые и сопряжённые уравнения, получим невязки $R_{[0;T]}^{x_i}$, и $R_{[0;T]}^{\psi_i}$. Для получения приближённых равенств $R_{[0;T]}^{x_i} = 0$ и $R_{[0;T]}^{\psi_i} = 0$ при $t \in [0; T]$ потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} W_{s,k} dt = 0, \quad s = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, M}.$$

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt + (\hat{x}_{s-n} - x_{s-n}^k) \widetilde{W}_{s,k} \Big|_{t=T} = 0, \quad n < s \leq 2n; \quad k = \overline{1, M}.$$

Эти соотношения представляют собой систему $2Mn$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных. Решив её, мы закончим процесс построения приближённого решения фазовых и сопряжённых уравнений, удовлетворяющих заданным условиям.

В общем случае весовые функции $W_{s,k}$ и $\widetilde{W}_{s,k}$ могут быть выбраны независимо, но из результатов численного решения задачи следует, что удобно взять

$$\widetilde{W}_{s,k} = -N_{s,k}, \quad s = \overline{n+1, 2n}; \quad k = \overline{1, M}.$$

Отметим также, что при аппроксимации различных фазовых и сопряженных переменных можно использовать одинаковые базисные функции:

$$\begin{aligned} N_{1,k} &= N_{2,k} = \dots = N_{n,k} = N_k^x; \\ N_{n+1,k} &= N_{n+2,k} = \dots = N_{2n,k} = N_k^\psi, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

В качестве примера была рассмотрена задача о прямолинейном движении материальной точки массы m кг под действием управляющей силы $F(t)$ и силы сопротивления движению, пропорциональной скорости точки $F = -kv$.

Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab [8].

В результате исследования задачи было установлено, что при фиксированном количестве базисных функций погрешность тем меньше, чем меньше время окончания управляемого процесса T и параметр k/m .

Было рассмотрено два варианта выбора весовых функций: в первом из них весовые функции совпадали с базисными (метод Галёркина), во втором в качестве весовых функций были взяты дельта-функции Дирака (метод поточечной коллокации).

В результате численного решения задачи было установлено, что погрешность метода поточечной коллокации несколько выше, чем у метода Галёркина. В то же время в этом случае проще построить систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения решения по базисным функциям, так как не нужно искать первообразную. Следовательно, метод поточечной коллокации может с успехом применяться для грубой оценки решения краевой задачи. Стоит также отметить, что при решении задачи методом поточечной коллокации при одних и тех же параметрах задачи для достижения приемлемой точности приходилось брать больше базисных функций, чем в методе Галёркина.

В дальнейшем рассмотренный метод будет применён к решению задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата [9, 10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М. : Наука, 1971. 396 с.
3. Панкратов И. А. Решение задач оптимального управления методом взвешенных невязок // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2014. Вып. 16. С. 117–120.
4. Панкратов И. А. Применение метода Галёркина к решению линейных задач оптимального управления // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 340–349.
5. Панкратов И. А. Об одном методе решения задач оптимального управления // Международна научна школа «Парадигма». Лято-2015 : в 8 т. Т. 2 : Информационни технологии : сборник научни статии. Варна : ЦНИИ «Парадигма», 2015. С. 204–212.
6. Панкратов И. А. Применение метода поточечной коллокации в задачах оптимального управления // Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика, 2015. Т. 3, № 8 - 3 (19 - 3). С. 365–368.

7. Панкратов И. А. Об аппроксимации оптимальных траекторий методом поточечной коллокации // Современная наука : актуальные проблемы теории и практики. Сер. : Естественные и технические науки. 2016. № 1. С. 49–52.

8. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. Scilab : Решение инженерных и математических задач. М. : АЛТ Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 269 с.

9. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация орбиты космического аппарата, оптимальная в смысле минимума интегрального квадратичного функционала качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 8. С. 74–78.

10. Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Переориентация круговой орбиты космического аппарата с тремя точками переключения управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 70–73.

УДК 539.3

Ю. О. Растегаев

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА СИГНАЛА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПЬЕЗОГИРОСКОПА В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Введение. Рассматривается датчик инерциальной информации, использующий как прямой, так и обратный пьезоэффекты [1, 2] в условиях нестационарного температурного поля. При температурном воздействии могут изменяться линейные размеры деталей и физические свойства материалов, из которых они изготовлены, что оказывает отрицательное влияние на стабильность работы, точность прибора, выходной сигнал и алгоритмы его обработки (см. [1]). Существенным является моделирование поведения пьезогироскопа при возможном в реальных условиях случайном характере изменения внешней температуры.

Проводится анализ качества сигнала пьезогироскопа при различных температурных режимах. Особое внимание уделяется рассмотрению функционирования датчика при резких перепадах температуры в заранее не известные моменты времени. Даются оценки распределения качества сигнала для всего спектра температур.

Математическая модель. Рассматриваемый пьезогироскоп включает в себя чувствительный элемент, который состоит из двух взаимно перпендикулярных пьезопластин 3 и 4 (рис. 1) и присоединённой к ним массы 7. Каждая пластина с одной стороны закреплена, а другая сторона находится в контакте с грузом 7 массы М, причем от груза на пластинки передаются только нормальные составляющие усилий. На пластину 3

подаётся переменное напряжение, возбуждающее в ней за счет обратного пьезоэффекта упругие волны и, как следствие, колебания присоединенной массы. При вращении платформы с пьезогироскопом на присоединенную массу действует кориолисова сила и присоединенная масса воздействует на пластину 4. За счет прямого пьезоэффекта в этой пластине генерируется электрический ток, пропорциональный измеряемой угловой скорости.

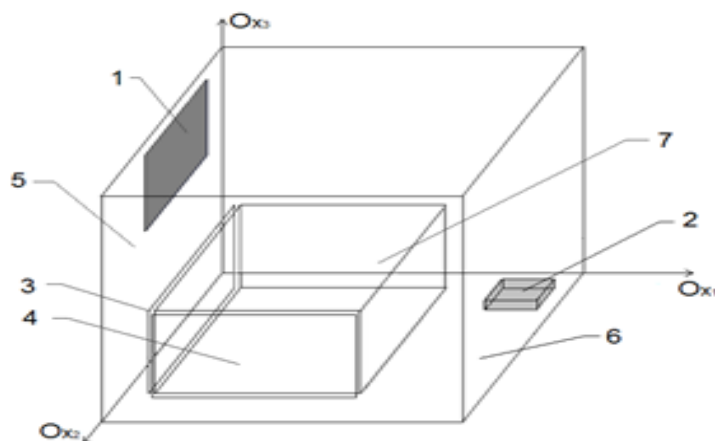


Рис. 1. Схема пьезогироскопа:
 1 – поверхность теплового контакта,
 2 – внутренний источник тепла,
 3, 4 – пьезопластины, 5, 6 – стенки корпуса, 7 – присоединенная масса

В рамках этой работы был проведен анализ температур наиболее приемлемых для функционирования прибора. Рассмотрен случай изменения внешней температуры в случайные, не известные программе расчета сигнала моменты времени в заданном интервале. С учетом зависимости величины сигнала от температуры, наибольший вклад в которую вносит зависимость модуля Юнга [3] от температуры, были найдены полосы температур с отличным, хорошим, слабым и плохим сигналом соответственно 100–90%, 90–50%, 50–10%, 10–0% от максимальной величины сигнала. Заметим, что максимальное значение получается при подаче на пьезопластину колебаний с частотой, равной резонансной. В данном случае расчеты велись при резонансной частоте для 20° С.

Для группы генераций серии случайных изменений температуры в заданном диапазоне был проведен статистический анализ. Генерировались 100 серий по 90 значений случайных температур с шагом по времени 1 мин в диапазоне -40°С – 120°С. Для каждого значения температуры была вычислена процентная доля сигнала от максимального. На основе полученного массива данных выявились следующие закономерности.

При $15^{\circ}\text{C} - 27^{\circ}\text{C}$ наблюдается отличный сигнал. В среднем в эту зону попадает 8%–10% времени функционирования прибора. В зону хорошего сигнала, которая наблюдается в диапазоне $3^{\circ}\text{C} - 42^{\circ}\text{C}$ попадает от 16 до 20% времени работы. В зоне слабого сигнала $-20^{\circ}\text{C} - 75^{\circ}\text{C}$ прибор функционирует в среднем до 51% времени работы. Зона плохого сигнала, где температуры превышают 75°C , достигает 15% времени (рис. 2).

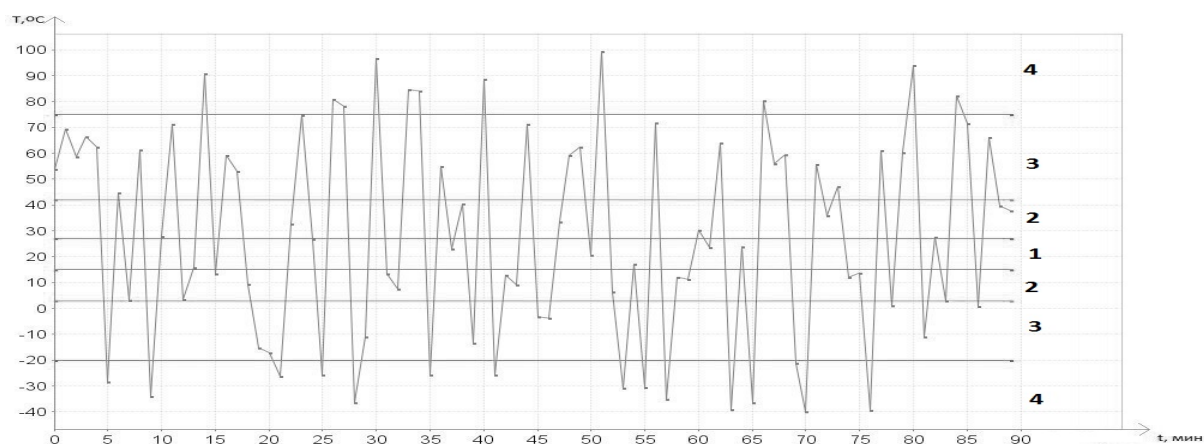


Рис. 2. График качества сигнала для серии случайных изменений температуры: 1 – зона отличного сигнала, 2 – хорошего, 3 – слабого, 4 – зона плохого сигнала

Заключение. Таким образом, можно сделать вывод, что при резких изменениях внешней температуры большую часть времени выходной сигнал слабый или практически отсутствует. Для повышения стабильности работы пьезогироскопа, его энергоэффективности и точности необходимо решать задачи снижения негативного влияния температурного поля на функционирование пьезогироскопа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нагар Ю. Н., Ольшанский В. Ю., Панкратов В. М., Серебряков А. В. Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. 80 с.
2. Афонин С. М. Параметрическая структурная схема пьезопреобразователя // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2002. № 6. С.101–107.
3. Perrirer A. Roger de Mandrot Elasticite' et syme' trie du Quartz aux temp' eratures e' leve' es // Impr. Re' unies S. A., 1924.

ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

Приведены результаты компьютерного моделирования тазобедренного сустава для реального пациента. Построение модели проводилось в специализированном программном обеспечении Mimics Innovation Suite на основе данных компьютерной томографии. Методом конечных элементов произведен численный расчет биомеханических параметров.

Заболевания тазобедренного сустава (ТБС) приводят к ограничениям подвижности и дискомфорту. Встречаются случаи, когда при одних и тех же причинах патология присутствует, а иногда нет. Использование специализированного программного обеспечения (СПО) позволяет создавать математические модели, описывающие поведение анатомических частей тела пациента при различных условиях [1].

Для построения трёхмерной модели были импортированы в СПО Mimics Innovation Suite и скорректированы в 3-matic Medical данные компьютерной томографии ТБС реального пациента [2]. Численный расчет проводился в программном комплексе ANSYS Workbench с использованием метода конечных элементов [3, 4]. Были решены две задачи.

1. Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), когда нагрузка приложена к бедренной кости (БК);

2. Анализ НДС, когда нагрузка приложена к тазовой кости.

Для описания движения системы таз – бедренная кость в ANSYS Workbench использовалось уравнение движения сплошной среды (Навье – Ламе), записанное в виде

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho F_x, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \rho F_y, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho F_z, \quad (3)$$

где ρ – плотность сплошной среды, v_x, v_y, v_z – проекции вектора скоростей, p_{ij} – компоненты тензора напряжений, F_z – компоненты вектора массовой плотности объемных сил, действующих на сплошную среду.

Модель тканей костей рассматривалась как линейная, изотропная и идеально упругая с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,33$, плотностью $\rho =$

2027 кг/м³ и модулем Юнга $E = 1,8 \cdot 10^{10}$ Па. В первой задаче было наложено условие жесткого закрепления тазовой кости, то есть для неё $dx=dy=dz=0$. Во второй же задаче жесткое закрепление накладывалось на нижнюю торцевую поверхность диафиза бедренной кости.

В результате компьютерного моделирования системы таз – бедренная кость были получены картины распределения значений модуля вектора перемещения и эквивалентных напряжений (ЭН) при различных типах нагрузки (табл. 1, 2).

При реализации задачи 1 наибольшие значения модуля вектора перемещения локализуются в области диафиза БК (рис. 1). Максимальные значения ЭН достигаются в зоне контакта вертлужной впадины и головки бедренной кости ($9,9 \cdot 10^6$ Па).

При реализации задачи 2 максимальные значения ЭН ($15,493 \cdot 10^6$ Па) также концентрируются в зоне контакта вертлужной впадины и головки БК (рис. 2). Кроме того, выявлены зоны высоких значений ЭН на диафизе ($10,95 \cdot 10^6$ Па) и на шейке БК ($6,2 \cdot 10^6$ Па). Наибольшие значения модуля вектора перемещения локализуются в зоне контакта вертлужной впадины и головки бедренной кости.

Данный метод имеет потенциал применения для изучения биомеханики ТБС. Персонализированное моделирование является удобным инструментом исследования анатомических частей тела пациента. Работа с виртуальным образом позволяет исследовать биомеханические параметры объекта и его поведение в различных модельных ситуациях.

Таблица 1

Значения модуля вектора перемещения

Номера задач	Типы нагрузок	Значение модуля вектора перемещения, м	
		максимальное	среднее
1.	Фронтальная ось перемещения	$8,18 \cdot 10^{-2}$	$4,09 \cdot 10^{-2}$
	Профильная ось перемещения	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$4,26 \cdot 10^{-2}$
2.	В зоне контакта вертлужной впадины и головки БК	$0,26 \cdot 10^{-2}$	$0,131 \cdot 10^{-2}$
	На диафизе БК	0	0
	На шейке БК	$0,15 \cdot 10^{-2}$	$0,77 \cdot 10^{-2}$

Значения эквивалентных напряжений

Номера задач	Типы нагрузок	Значение ЭН, Па	
		максимальное	среднее
1.	Фронтальная ось перемещения	$9,53 \cdot 10^6$	$4,74 \cdot 10^6$
	Профильная ось перемещения	$9,9 \cdot 10^6$	$4,96 \cdot 10^6$
2.	В зоне контакта вертлужной впадины и головки БК	$15,49 \cdot 10^6$	$7,67 \cdot 10^6$
	На диафизе БК	$10,95 \cdot 10^6$	$5,47 \cdot 10^6$
	На шейке БК	$6,2 \cdot 10^6$	$3,11 \cdot 10^6$

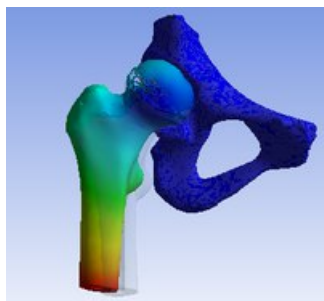


Рис. 1. Распределение значений модуля вектора перемещения (задача 1)

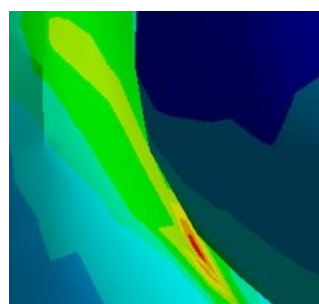


Рис. 2. Распределение значений ЭН в зоне контакта вертлужной впадины и головки БК (задача 2)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Официальный сайт центра травматологии и ортопедии [Электронный ресурс]. URL: <http://lechenie-sustavov.ru/> (дата обращения: 21.05.2016).
2. Иванов Д. В., Доль А. В. Применение томографических изображений для создания трехмерных индивидуальных реалистичных моделей биологических объектов // Кардио-ИТ. (Саратов). 2015. Вып. 2 (4).
3. Иванов Д. В., Доль А. В., Голядкина А. А., Полиенко А. В. Практические задания по применению пакета ANSYS Mechanical APDL к задачам биомеханики сердечно-сосудистой системы : учеб.-метод. пособие для студ. естест.-науч. дисциплин. Саратов : Буква, 2015. 56 с.
4. Сагдеева Ю. А., Копысов С. П., Новиков А. К. Введение в метод конечных элементов : метод. пособие. Ижевск : Изд-во Удмурт. ун-та, 2011. 44 с.

ОПТИМАЛЬНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ОРБИТЫ КА С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА НАПРАВЛЕНИЕ ТЯГИ

Рассматривается задача об оптимальной переориентации орбиты космического аппарата (КА) с помощью двигателя большой тяги (импульсная тяга). Размер, форма и ориентация орбиты КА определяются классическими элементами: большой полуосью a , эксцентриситетом e , углом наклона орбиты I , углом восходящего узла Ω_u , угловым расстоянием до перицентра ω_π . Ниже в таблицах результаты расчетов для времени движения и импульса тяги, отнесенного к единице массы КА, будут представлены в безразмерном виде. Для возвращения к размерным значениям этих величин необходимо использовать масштаб времени T и масштаб скорости V , которые определяются по формулам

$$R = a_{\text{н}}^{\text{разм}}(1 - e_{\text{н}}^2), \quad V = \sqrt{\gamma M/R}, \quad T = R(R/(\gamma M))^{1/2}. \quad (1)$$

где γ – гравитационная постоянная, M – масса центра притяжения. Безразмерная величина большой полуоси орбиты представляет собой отношение большой полуоси к полуоси начальной орбиты КА.

Размер, форма и ориентация начальной орбиты определяются следующими значениями элементов орбиты:

$$a_{\text{н}} = 1.0, \quad e_{\text{н}} = 0.1, \quad I_{\text{н}} = 5.0^\circ, \quad \Omega_{u\text{н}} = 30.0^\circ, \quad \omega_{\pi\text{н}} = 50.0^\circ. \quad (2)$$

Положение КА на орбите в начальный момент времени $t = 0$ определяется значением истинной аномалии $\varphi_{\text{н}} = 0.5$ рад, или 28.6479° .

Заданная конечная орбита определяется следующими значениями:

$$a_{\text{к}} = 1.0, \quad e_{\text{к}} = 0.1, \quad I_{\text{к}} = 8.0^\circ, \quad \Omega_{u\text{к}} = 34.0^\circ, \quad \omega_{\pi\text{к}} = 46.0^\circ. \quad (3)$$

Качество процесса переориентации орбиты определяется значением комбинированного функционала, учитывающего время и сумму величин импульсов, отнесенных к единице массы КА (характеристическая скорость), затраченных на процесс управления:

$$J = \alpha_1 t_{\text{к}} + \alpha_2 \sum_{i=1}^n |\text{imp}_i|, \quad (4)$$

где α_1 и α_2 – весовые множители, n – число импульсов.

В табл. 1, 2 сравниваются результаты решения задач об импульсной оптимальной переориентации орбиты для случая, когда на направление оптимальной тяги двигателя не налагается никаких условий, и для случая, когда тяга двигателя в каждый момент управления ортогональна мгновенной плоскости орбиты КА. В первом случае во время управления могут изменяться размер, форма и ориентация орбиты, во втором случае может изменяться только ориентация орбиты, а размер и форма орбиты (большая полуось и эксцентриситет) остаются неизменными. В первом случае задача оптимальной переориентации орбиты решалась с использованием KS-переменных (переменные Кустаанхеймо – Штифеля) [1], во втором случае с использованием кватерниона ориентации орбиты относительно неподвижной системы координат [2]. Задача оптимальной переориентации орбиты с помощью принципа максимума Понтрягина сведена к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений по определению фазовых и сопряженных переменных. Расчеты показали, что при заданной начальной и конечной ориентации орбит, оптимальное управление состоит из двух импульсов, которые сообщаются в начале и в конце процесса, и пассивного полета КА между ними. Для ортогональной тяги в случае, когда управление состоит из двух импульсов, удалось построить аналитическое решение задачи.

Сравнение решений задач об оптимальной переориентации орбит КА без условия ортогональности тяги к плоскости орбиты и с условием ортогональности проведено для пяти значений весового множителя α_1 ($\alpha_1 = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.0$). Значение множителя α_2 равно 1.

Проведенные расчеты показали, что импульсы тяги, время процесса управления, классические элементы орбиты пассивного движения во время процесса управления, полученные при решении задачи об оптимальной переориентации орбиты КА без условия ортогональности тяги к плоскости орбиты, существенно зависят от значений весовых множителей в функционале качества процесса управления. В то же время эти же величины, полученные при решении задачи с условием ортогональности тяги к плоскости орбиты, не зависят от значений весовых множителей. Значения перечисленных величин, полученных при решении задачи об оптимальной переориентации орбиты КА при условии ортогональности тяги, близки к соответствующим величинам, полученным при решении задачи без условия ортогональности, при $\alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 1.0$.

В табл. 1 для различных значений α_1 для задачи без требования ортогональности тяги приведены величины начального и конечного вектора импульса тяги, их сумма, время пассивного полета, значения функционала (4). В последнем столбце приведены значения функционала для

Таблица 1

α_1	imp_H	imp_K	$\sum imp$	t_K	$J_{\text{без ортог}}$	$J_{\text{ортог}}$
0.4	0.10838	0.09841	0.20679	0.48100	0.39919	0.68831
0.2	0.07587	0.07209	0.14796	0.68951	0.28586	0.37685
0.1	0.04863	0.05490	0.10353	1.00551	0.20408	0.22113
0.05	0.01908	0.04660	0.06568	1.55113	0.14324	0.14326
0.0	0.00001	0.04883	0.04884	1.93768	0.04884	0.06540
Ортогональная тяга	0.01882	0.04658	0.06540	1.55729		

Таблица 2

α_1	a	e	$I, ^\circ$	$\Omega_u, ^\circ$	$\omega_\pi, ^\circ$
0.4	1.008736	0.106240	8.2808	72.4998	10.8221
0.2	1.004243	0.102826	6.9818	64.1522	17.8171
0.1	1.002024	0.101197	6.0474	54.5531	26.6209
0.05	1.000730	0.100321	5.2897	40.7377	39.8368
0.0	1.000021	0.100019	5.0003	30.0016	50.0015
Ортогональная тяга	1.0	0.1	5.2849	40.6089	39.4335

задачи с ортогональной тягой. В табл. 2 для задачи без требования ортогональности тяги приведены величины классических элементов орбиты пассивного полета КА после сообщения первого импульса для различных α_1 .

В последней строке табл. 1 и 2 приведены те же величины для оптимальной переориентации орбиты с помощью ортогональной тяги.

При выбранной начальной и конечной ориентации орбит вектора импульсов тяги в задаче об оптимальной переориентации орбиты КА без требования ортогональности оказались близкими к нормальям орбит. Из табл. 1 видно, что значение функционала для задачи без условия ортогональности тяги каждый раз меньше, чем для задачи с этим условием.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сапунков Я. Г. Решение задач оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной и импульсной тягой в KS-переменных // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 3. С. 73–78.

2. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 897–914.

УДК 531.38:629

Г. Д. Севостьянов

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СВОБОДНОГО ТЕЛА

Записаны уравнения и алгоритм определения ориентации управляемого тела с неподвижной точкой. Приведен тестовый пример.

В [1] нелинейные кинематические уравнения Эйлера приведены к уравнению второго порядка для угла нутации, конечному уравнению для угла собственного вращения и квадратуре для угла прецессии. В [2] такое упрощение сделано для вращения летательного аппарата (ЛА) и качки корабля. В [3, 4] приведены более ранние системы уравнений кинематики тела с неподвижной точкой.

Кинематические уравнения вращения ЛА, разрешенные относительно производных, имеют вид [5, с. 24]

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, & \dot{\Psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma),\end{aligned}\quad (1)$$

где (см. [5, с. 17]) ϑ – угол тангажа, Ψ – угол рыскания, γ – угол крена; $\bar{\omega}(t) (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ – известная мгновенная угловая скорость ЛА и её координаты на оси связанной системы $OX_k Y_k Z_k$. Основная система – $OX_g Y_g Z_g$.

Следуя [1], упростим систему (1). Обозначим:

$$\begin{aligned}\omega_y &= \Omega \sin \chi, & \omega_z &= -\Omega \cos \chi, & \Omega &> 0, \\ \Omega^2 &= \omega_y^2 + \omega_z^2, & \operatorname{tg} \chi &= -\frac{\omega_y}{\omega_z}, & \tau &= \int_{t_0}^t \Omega(t) dt, & f' &= \frac{df}{d\tau} = \frac{\dot{f}}{\Omega},\end{aligned}\quad (2)$$

τ – интегральное время.

Тогда из (1) имеем:

$$\begin{aligned}\Psi' \cos \vartheta &= \sin(\gamma + \chi), \quad \vartheta' = -\cos(\gamma + \chi), \\ \Psi' \sin \vartheta &= \frac{\omega_x}{\Omega} - \gamma'.\end{aligned}\quad (3)$$

Перемножим 1-е, 2-е уравнения и $\sin \vartheta$ и учтём третье:

$$-\left(\frac{\omega_x}{\Omega} - \gamma'\right) \cos \vartheta \cos(\gamma + \chi) = \sin \vartheta \sin(\gamma + \chi) \vartheta'.$$

Вычтя из обеих частей $(\gamma' + \chi') \cos \vartheta \cos(\gamma + \chi)$ имеем:

$$\sigma \cos \vartheta \cdot \vartheta' = -[\cos \vartheta \sin(\gamma + \chi)]',$$

где $\sigma(\tau) = \omega_x/\Omega + \chi' = (\varphi_x + \chi)'$ – известная функция. Для функции $s(\tau) = \sin \vartheta$:

$$1 - s^2 - s'^2 = \cos^2 \vartheta \sin^2(\gamma + \chi),$$

поэтому

$$\left(\sqrt{1 - s^2 - s'^2}\right)' = \pm \sigma \cdot s', \quad |s| \leq 1,$$

т.е. имеем [2] уравнение 2-го порядка для $s(\tau)$:

$$s^2 + s'^2 + \left(\frac{s'' + s}{\sigma}\right)^2 = 1, \quad s = \sin \vartheta. \quad (4)$$

Тогда $\vartheta = \arcsin s(\tau)$, из 2-го уравнения (3) $\gamma = -\chi + \arccos \vartheta' + 2\pi m$. Из 1-го уравнения (3) $\Psi' \cos^2 \vartheta = \cos \vartheta \sin(\gamma + \chi) = \pm \sqrt{1 - s^2 - s'^2}$, тогда

$$\Psi = \pm \int_0^\tau \frac{\sqrt{1 - s^2 - s'^2}}{1 - s^2} d\tau + \Psi_0. \quad (5)$$

Запишем уравнение (4) для угла тангажа в реальном времени:

$$(\text{л.ч.}) = \ddot{s} - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \dot{s} + \Omega^2 s = \text{sign}(\text{л.ч.}) |\sigma| \Omega \sqrt{\Omega^2 (1 - s^2) - \dot{s}^2}, \quad (6)$$

$$|\sigma| \Omega = |\omega_x + \dot{\chi}|.$$

Начальные условия для тела:

$$t = t_0 : \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \Psi = \Psi_0, \quad \gamma = \gamma_0. \quad (7)$$

Тогда начальные условия для уравнения (6):

$$\begin{aligned}t = t_0 : \quad s &= s_0 = \sin \vartheta_0, \quad \Omega_0 = \sqrt{\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2}, \\ \dot{s} &= \dot{s}_0 = -\Omega_0 \cos \vartheta_0 \cos(\gamma_0 + \chi_0).\end{aligned}\quad (8)$$

Обозначив $u = \operatorname{sign} u \cdot \sqrt{1 - s^2 - \frac{\dot{s}^2}{\Omega}}$, запишем (формула перед (4)):

$$\frac{\dot{u}}{\Omega} = \pm \sigma \cdot \frac{\dot{s}}{\Omega}.$$

Для s и u имеем систему ($|s|, |u| \leq 1$):

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \operatorname{sign} \dot{s} \sqrt{1 - s^2 - u^2}, \\ \dot{u} &= \operatorname{sign} \dot{u} |\sigma| \dot{s} = \operatorname{sign} \dot{u} |\sigma| \Omega \sqrt{1 - s^2 - u^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

с начальными условиями

$$t = t_0 : \quad s = s_0, \quad u = \operatorname{sign} u \sqrt{1 - s_0^2 - \frac{\dot{s}_0^2}{\Omega}} = u_0. \quad (10)$$

Решая (9), (10), одновременно найдём углы:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arcsin s(t) = \vartheta(t), \\ \gamma &= -\chi + \arccos \left(\frac{\sqrt{1 - s^2 - u^2}}{\sqrt{1 - s^2}} \right) + 2\pi m = \gamma(t), \\ \Psi &= \pm \int_{t_0}^t \frac{\Omega u}{1 - s^2} dt + \Psi_0 = \Psi(t). \end{aligned}$$

Ориентация ЛА определена.

При $s = \pm 1$, $w = 0$ (местная вертикаль OY_g) Ψ имеет особенность, а ϑ и γ – нет.

Уравнение (4) имеет бесконечный класс частных решений (задаём $s(\tau)$, $|s| \leq 1$ и определяем $\sigma(\tau)$).

Если $\sigma = \sigma_c = \operatorname{const}$, то имеем решение (4)

$$\begin{aligned} s &= \sin \vartheta = s_* + a \sin(k\tau + \alpha), \\ k^2 &= 1 + \sigma_c^2, \quad a > 0, \quad a^2 = \frac{1}{k^2} - \frac{s_*^2}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

В зависимости от значения постоянной s_* апекс оси X_k описывает разные траектории. Так, при $|s_*| = \sqrt{1 - k^{-2}}$ будет регулярная прецессия. Обозначив $s_1 = s$, $s_2 = s'$, $s_3 = \frac{s'' + s}{\sigma}$ ($s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$), для этого решения получим уравнение плоскости $\sigma_c s_1 + s_3 = \left(\sigma_c + \frac{1}{\sigma_c}\right) s_*$, перпендикулярной (s_1, s_3) . $\Psi' = \pm \frac{s_3}{1 - s_1^2}$, тогда при смене знака s_3 меняет знак скорость рыскания Ψ' , и апекс оси X_k описывает петли между двумя параллелями единичной сферы.

Дадим тест для программы (регулярная прецессия). Аналитическое решение:

$$\vartheta \equiv \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta} \equiv 0, \quad \Psi = n \cdot (t - t_0) + \Psi_0, \quad \gamma = n_1 \cdot (t - t_0) + \gamma_0.$$

Ввод начальный: $t_0, \vartheta_0, \gamma_0, \Psi_0, n, n_1$.

Ввод текущий:

$$\begin{aligned} \omega_x &= n \sin \vartheta_0 + n_1, & \omega_y &= n \cos \vartheta_0 \cos [n_1(t - t_0) + \gamma_0], \\ \omega_z &= -n \cos \vartheta_0 \sin [n_1(t - t_0) + \gamma_0]. \end{aligned}$$

Вычисления:

$$\Omega = |n \cos \vartheta_0|, \quad \dot{\Omega} \equiv 0, \quad \chi = -\arctg \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{\pi}{2} - n_1(t - t_0) - \gamma,$$

$$\dot{\chi} = -n_1, \quad \sigma\Omega = \omega_x + \dot{\chi} = n \sin \vartheta_0,$$

$$s_0 = \sin \vartheta_0, \quad \dot{s}_0 = 0, \quad u_0 = \pm \sqrt{1 - s_0^2} = \pm \cos \vartheta_0.$$

Система (9) имеет решение:

$$s \equiv s_0, \quad u \equiv \pm \cos \vartheta_0,$$

$$\dot{s} \equiv 0, \quad \dot{u} \equiv 0.$$

$$\vartheta = \arcsin s_0, \quad \gamma = -\chi + \frac{\pi}{2} = n_1(t - t_0) + \gamma_0,$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \pm \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{1 - s_0^2}}{1 - s_0^2} \Omega dt + \Psi_0 = \\ &= \pm \frac{\Omega}{|\cos \vartheta_0|} \cdot (t - t_0) + \Psi_0 = \pm n(t - t_0) + \Psi_0, \end{aligned}$$

т.е. получается регулярная прецессия около местной вертикали Y_g (OX_gZ_g – горизонтальная плоскость).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 195–198.
2. Севостьянов Г. Д. К кинематике тела с неподвижной точкой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 141–144.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М. : Физматгиз, 1961. 824 с.
4. Кузнецов Е. Б. Об одном подходе к интегрированию кинематических уравнений Эйлера // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, № 11. С. 1806–1813.
5. Аэромеханика самолёта : Динамика полёта : учебник для авиац. вузов А. Ф. Бочкарёв, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов [и др.] / под ред. А. Ф. Бочкарёва и В. В. Андреевского. 2-е изд. перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1985. 360 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ БАЛОК С УЧЕТОМ СВЯЗАННОСТИ ТЕМПЕРАТУРНОГО И ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОЛЕЙ

Изучение эффектов, связанных с влиянием динамических термосиловых воздействий на поведение механических систем, является чрезвычайно сложным и перспективным направлением научных исследований, поскольку фактором обуславливающим перестройку режимов динамических систем может являться не только изменение параметров силового (механического) нагружения [1], случайных флуктуаций [2], но и температурные воздействия со стороны окружающей среды. Интерес к подобным задачам связан с необходимостью разработки механических конструкций, способных работать в условиях неравномерного стационарного и нестационарного нагревов (например, в авиационной и ракетной технике, гироскопостроении, в системе защиты ядерных реакторов и т.д.). Использование модели связной термоупругости и учет случайных флуктуаций внешней среды существенно уточнит результаты, полученные при математическом и компьютерном моделировании динамики элементов пространственных конструкций.

В работе построена математическая модель колебаний гибких балок Бернулли–Эйлера в температурном поле под действием внешнего аддитивного белого шума и поперечной знакопеременной нагрузки. Геометрическая нелинейность учтена в форме Кармана. При этом никаких ограничений на распределение температуры по толщине балки не накладывалось, рассматривалось двумерное уравнение теплопроводности в параболическом виде. Соотношения для полной деформации системы с учетом принятых гипотез и допущений имеют вид

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \alpha_t \Theta(x, z, t), \quad (1)$$

здесь $u = u(x, z)$ – перемещение элемента балки в продольном направлении, $w = w(x, z)$ – прогиб элемента балки, α_t – коэффициент теплового расширения материала балки, $\Theta(x, z, t)$ – функция температуры. На основании закона Гука с учетом гипотезы Неймана запишем соотношения для нормальных усилий срединной линии (N_x) и изгибающих моментов (M_x):

$$N_x = Eh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) - E\alpha_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta(x, z, t) dz, \quad (2)$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E\alpha_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta(x, z, t) z dz, \quad (3)$$

h – толщина балки, E – модуль Юнга. Математическая модель строилась на основе вариационного принципа Остроградского–Гамельтона. Система уравнений движения элемента балки записывается следующим образом:

$$-\frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho \epsilon z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \rho \epsilon h \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0, \quad (5)$$

К уравнениям движения (4) и (5) присоединяется уравнение теплопроводности:

$$\frac{C_0}{T_0} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{\lambda_g}{T_0} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -E\alpha_t \frac{\partial \epsilon_x}{\partial t}. \quad (6)$$

Здесь T_0 – температура балки в исходном недеформированном состоянии, C_0 – объемная теплоемкость материала балки, λ_g – теплопроводность, γ – удельный вес материала, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала балки. Система (4) – (6) приводится к безразмерному виду с использованием следующих параметров: $t = \frac{h^2 \tau}{\alpha}$, $w = h\bar{w}$, $x = a\bar{x}$, $z = h\bar{z}$, $u = \frac{h^2}{a}\bar{u}$, $\epsilon_{11} = \frac{h^2}{a^2}\bar{\epsilon}_{11}$ – коэффициент диссипации среды, $\alpha_t = \alpha_{t0}\bar{\alpha}_t$, $\epsilon = \frac{\alpha}{h^2}\bar{\epsilon}$, $\Theta = \frac{h^2}{a^2\alpha_{t0}}\bar{\Theta}$, $M_x = \frac{Eh^4}{a^2}\bar{M}_x$, $N_x = \frac{Eh^4}{a^2}\bar{N}_x$, $\lambda = \frac{a}{h}$, $K = \frac{\gamma\alpha^2\lambda^4}{gh^2E}$, $L = \frac{\lambda_g}{C_0\alpha\lambda}$ и $D = \frac{ET_0\alpha_{t0}^2}{C_0}\alpha_t$ – безразмерные физико-геометрические параметры, α – коэффициент температуропроводности:

$$-\frac{K}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{M}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{N}_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) - K \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} - \lambda \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau \partial \bar{x}} - \bar{\epsilon} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \right) + \bar{q} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} - L \frac{\partial^2 \bar{\Theta}}{\partial \bar{x}^2} = -D \frac{\partial \bar{\epsilon}_x}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Балка находится под действием знакопеременной нормальной нагрузки и аддитивного белого шума $q = q_{nois} + q_0 \text{Sin}(\omega_p t)$, q_0 – амплитуда внешней нормальной нагрузки, ω_p – ее частота. Аддитивный шум добавлен в систему в виде постоянного слагаемого с постоянной интенсивностью $q_{nois} = q_{n0} \left[\frac{2.0 \text{rand}()}{(RAND_{MAX} + 1.0) - 1.0} \right]$, q_{n0} – интенсивность шума, rand – стандартная функция языка C++, принимающая случайное целое значение от 0 до $RAND_{MAX}$ – константа, равная 65535. В результате без амплитуды выражение принимает произвольные дробные значения в диапазоне $(-1; 1)$. Интегрирование уравнений (7) – (9) с начальными и граничными условиями проводится методом сеток. Для этого область $D = \{(x, z, t) | 0 \leq x \leq 1, -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq T\}$ покрывается прямоугольной сеткой $x_i = ih_x, t_j = jh_t, (i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots)$, где $h_x = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n_x}, h_z = \frac{1}{n_z}$ (n_x, n_z – целые числа) и $h_t = t_{j+1} - t_j$. На сетке x_i, t_j дифференциальные уравнения (7) – (9) приближенно заменяются соответствующими конечно-разностными соотношениями. С целью повышения точности использовались центральные разности для аппроксимации производных. Далее, на каждом шаге по времени для узла x_j вычисляются температурные моменты и напряжения по методу Симпсона. Был проведен численный эксперимент с целью установления оптимального числа разбиений в методе конечных разностей по пространственной и временной координате. Для этого строились сигналы и спектры Фурье при различных значениях n_x и h_t . Эксперимент показал, что $n_x = 60$ и $h_t = 0,0004882815$ достаточны для исследований нелинейной динамики геометрически нелинейных балок Бернулли–Эйлера с учетом связанности температурного и деформационного полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00092).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В., Папкова И. В., Крысько В. А. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, № 7. С. 57–64.
2. Крылова Е. Ю., Яковлева Т. В., Баженов В. Г. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане панелей в поле белого шума // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 1. С. 82–92.

К. К. Скрипаченко

ПЕРСОНАЛИЗИРОВАННОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУДНОГО ОТДЕЛА АОРТЫ

В данном исследовании приведены результаты компьютерного моделирования грудного отдела аорты с патологическими изменениями. Построение модели проводилось в системе автоматизированного проектирования SolidWorks на основе данных компьютерной томографии. Численный расчет проведен с использованием метода конечных элементов. Анализ результатов позволил выявить и оценить негативное влияние патологий аорты на гемодинамику системы.

Аорта является самым большим артериальным сосудом в организме человека и является основным проводником крови ко всем тканям и органам организма от сердца. Но встречается ряд патологий аорты, которые негативно влияют на работу сердечно-сосудистой системы в целом. Одними из распространенных заболеваний являются: аневризма, коарктации аорты, атеросклероз, расслоение стенки и многое другое [1]. С развитием современной техники появились различные методы визуализации и исследования патологий аорты. Исключением не является и компьютерное моделирование. В данном исследовании представлены результаты компьютерного моделирования с использованием метода конечных элементов. Для исследования были изучены данные компьютерной томографии (КТ) грудного отдела аорты реального пациента с наличием патологий: врожденный перегиб вершины дуги аорты и коарктация нисходящей дуги аорты. Коарктация характеризуется сегментарным (местным) сужением просвета аорты. Зачастую данная патология является врожденной, но встречаются случаи приобретенной коарктации аорты. Врожденная извитость дуги аорты – это врожденный порок сосуда, который отличается удлинением, извитостью и перегибами сосудистого русла при патологическом строении ее стенки [2]. На основе данных КТ была создана геометрия исследуемого объекта с использованием программного пакета Mimics. Последующее усовершенствование модели производилось в системе автоматизированного проектирования SolidWorks. В процессе перестроения модели устранялись неровности и искажения, построение осуществлялось командой «вытягивание бобышки по сечениям» [3]. Численный расчет проводился в программном комплексе Ansys Workbench с использованием метода конечных элементов

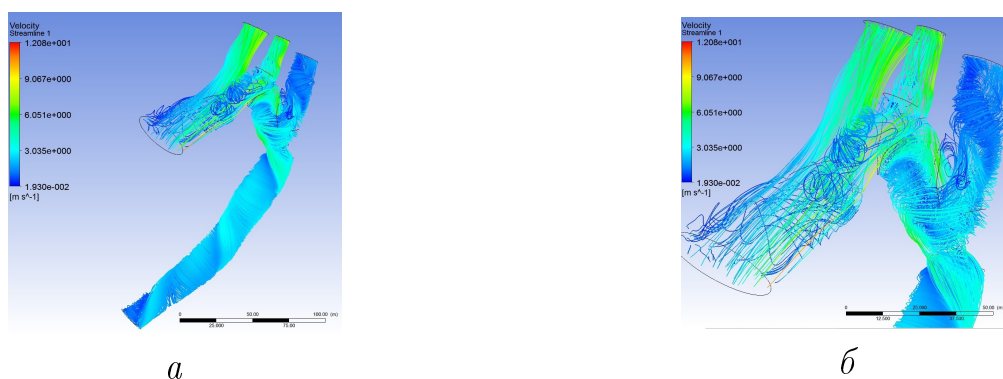
(МКЭ) [4]. Граничные условия были определены физиологическими показателями сердечно-сосудистой системы в норме [5]. Кровь моделировалась как ньютоновская жидкость с заданными плотностью 1050 кг/м^3 и динамической вязкостью $0,0037 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Движение крови описывалось уравнением Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} * \nabla) \bar{v} = \bar{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P + \eta \Delta \bar{v}, \quad (1)$$

где \bar{v} – вектор скорости, t – время, ρ – плотность, P – давление, η – динамическая вязкость [6].

Результаты компьютерного моделирования показали, что подобные патологии аорты негативно влияют на гемодинамические характеристики потока крови, вызывая закрученное беспорядочное течение (рисунок).

Проведённое конечно-элементное моделирование позволило определить зоны образования закрученного потока жидкости (рисунок, *а*), которое наблюдалось в дистальной области перегиба дуги аорты, а также в нисходящей аорте. В проксимальной области перегиба констатировали застой жидкости (рисунок, *б*) и резкое падение скорости кровотока до 35%. Данные изменения течения жидкости могут являться одной из возможной причиной развития тромбоза и увеличить риск развития инфаркта и инсульта [7].



Визуализация результатов компьютерного моделирования

На основе результатов исследования можно сделать вывод, что проведенное конечно-элементное моделирование на стадии предоперационного обследования пациента позволило наглядно увидеть и оценить влияние патологий на гемодинамическую картину системы. Данные, полученные в процессе компьютерного моделирования, могут учитываться при прогнозировании хирургического лечения. Таким образом, внедрения персонализированного моделирования в клиническую практику с целью выявления и прогнозирования влияния патологий

отдельных органов на работу организма человека позволит провести эффективное лечение, а также снизить послеоперационные риски и осложнения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Джалилова Д. А., Потешкина Н. Г., Хамитов Ф. Ф., Трошина А. А. Общая теория оптимальных алгоритмов. М. : Мир, 1983. 382 с.
2. Клиническая ангиология : Руководство / под ред. А. В. Покровского : в 2 т. Т. 1. М. : Медицина, 2004. 808 с.
3. Голядкина А. А., Иванов Д. В., Каменский А. В., Кириллова И. В., Сальковский Ю. В., Сафонов Р. А., Щучкина О. А. Практическое применение системы автоматизированного проектирования SolidWorks в моделировании кровеносных сосудов : учеб. пособие для студ. ест. дисциплин. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. 153 с.
4. Иванов Д. В., Доль А. В., Голядкина А. А., Полиенко А. В. Практические применения по применению пакета ANSYS Mechanical APDL к задачам биомеханики сердечно-сосудистой системы : учеб.-метод. пособие для студ. ест.-науч. дисциплин. Саратов : Буква, 2015. 56 с.
5. Мурылёв В. В., Комаров Р. Н., Белов Ю. В., Челнокова Н. О., Каравайкин П. А., Полиенко А. В. Математическое моделирование как метод прогнозирования вероятных осложнений при аневризме грудной аорты : материалы Всерос. конф. молодых ученых с междунар. участием / под ред. проф. Л. Ю. Коссовича. Саратов : Буква, 2015. С. 66–67.
6. Голядкина А. А., Полиенко А. В., Кириллова И. В., Челнокова Н. О., Серонова Ю. А., Павлова О. Е. Методические рекомендации по выбору оптимального хирургического лечения бифуркации сонной артерии человека : учеб.-метод. пособие для студ. ест.-науч. дисциплин. Саратов : Буква, 2015. 44 с.
7. Гольдина И. М. Ультразвуковая диагностика и оценка результатов лечения пациентов с тромбозом в системе нижней полой вены : автореф. дис.... д-ра мед. наук. М., 2011. 29 с.

УДК 517.51

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин

ОБ АДЕКВАТНОСТИ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ РЕФРАКЦИИ УДАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ГАЗОЖИДКОСТНЫХ СРЕД ПРИ РЕФРАКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ГАЗОВ

Анализируется физическая адекватность общей модели нелинейной рефракции ударных волн (УВ) на свободной поверхности, разделяющей различные газожидкостные среды (ГЖС/ГЖС) [1, 2] в предельном случае на поверхности, разделяющей газы (ГАЗ/ГАЗ). Полученные при расчетах основные характеристики в точке взаимодействия А (углы β, ω),

границы режимов течений (RR – регулярные рефракции (рис. 1, а); RW – рефракции с отраженной УВ AC (рис. 1, в); BPR – bound precursor с преломленной УВ AD, ортогональной свободной поверхности ($\omega = 0$, рис. 1, 2)) сопоставляются с экспериментальными результатами [3, 4].

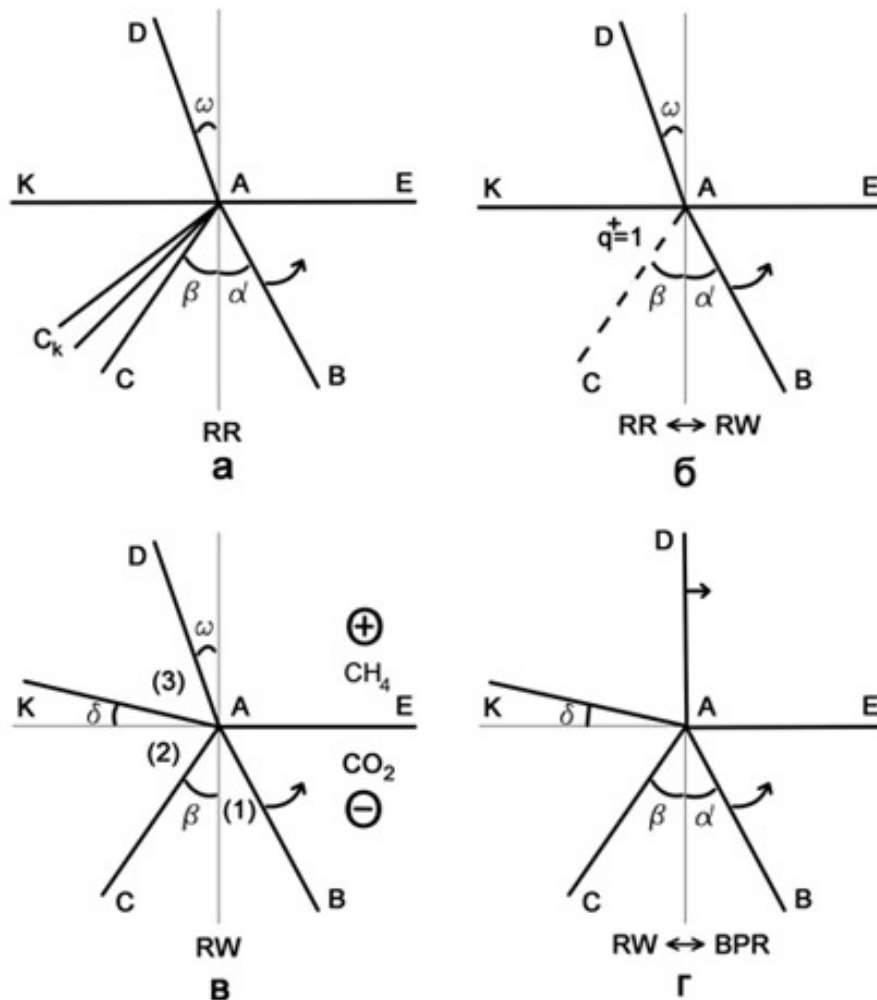


Рис. 1

При падении УВ АВ относительной интенсивности $P_{10}^- = (p_1 - p_0)/B_0^-$, $B_0^- = \rho_0^- c_0^{-2}(\rho_0^- - \text{плотность, } c_0^- - \text{скорость звука в нижней области})$ под углом α к вертикали на свободную поверхность АЕ, разделяющую газо-жидкостные среды (ГЖС/ГЖС, ГАЗ/ГАЗ) с газосодержаниями γ^+, γ^- , возникают различные режимы рефракции (см. рис. 1), характеризующиеся фронтами УВ (АВ – падающий, АС – отраженный, АД – преломленный), волной разрежения $САС_K$ и изломом свободной поверхности АК. Параметр $q^+ = (p_3 - p_0)/(p_1 - p_0)$ при $p_3 = p_2$ характеризует интенсивность преломленной УВ АД. При вырождении волны разрежения, $q^+ = 1$, имеем границу режимов RR ↔ RW (см. рис. 1. б); при $\omega = 0$ границу режимов RR ↔ BPR (см. рис. 1, 2).

1. Общая модель рефракции УВ на свободной поверхности, разделяющей различные ГЖС с газосодержаниями γ^+, γ^- ($\gamma = \frac{m_{II}}{m_I}, m_{II}$ – масса газа, m_I – масса жидкости), использует для каждой из ГЖС уравнение термодинамического состояния смеси (см. [1, 2]):

$$p \left[\frac{a}{\rho} - \frac{b}{f(p)} \right] = c_v T, \quad c_v = \frac{c_{VI} + c_{VII}\gamma}{1 + \gamma}; \quad a = (1 + \gamma)b, \quad b = \frac{c_v}{\gamma R}. \quad (1)$$

В предельных случаях чистой жидкости $\gamma \rightarrow 0; a, b \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow \rho_1 = = f(p) = \rho^*(1 + \frac{p_1}{K})$ и чистого газа $\gamma \rightarrow \infty, \rho \rightarrow \rho_{11} = \frac{p}{RT_{11}}$ выполняется уравнение состояния сред [1, 5].

Для элемента фронта УВ, описываемого в автомодельных переменных $\xi = \frac{x}{c_0 t}, \eta = \frac{y}{c_0 t}$ уравнением $\xi = \xi(\eta)$, интенсивности $P_{ji} = \frac{(p_j - p_i)}{B_0^\pm}$, $B_0^\pm = \rho_0^\pm c_0^\pm$ (i – значение перед фронтом, j – за фронтом) имеем (см. [1,2]) условия динамической совместимости (u, v – компоненты скорости; $\xi' = d\xi/d\eta$):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta \xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right]^2 &= N(P_{ji}); \quad \frac{\rho_i}{\rho_j} = \frac{N(P_{ji}) - P_{ji}}{N(P_{ji})}; \\ P_{ji} &= \frac{\rho_i}{\rho_0} \left[(\xi - \eta \xi') - \left(\frac{u_i}{c_0} - \xi' \frac{v_i}{c_0} \right) \right] \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right); \\ \xi' \left(\frac{u_j}{c_0} - \frac{u_i}{c_0} \right) &= \frac{v_i}{c_0} - \frac{v_j}{c_0}; \quad N(P_{ji}) = \frac{(1 + 2a)(d_1 + P_{ji})(d_2 + P_{ji})}{2(d_3 + aP_{ji})}. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты d_1, d_2, d_3, a, b , зависят от газосодержания среды γ^+ или γ^- (см. [1,2])

$$d_1 = \frac{k + p_i}{B_0}, \quad d_2 = \frac{2(1 + a)}{1 + 2a} \frac{p_i}{B_0}, \quad d_3 = ad_1 - \frac{B\rho_i k^2}{B_0 \rho^*(k + p_i)}.$$

На фронте АВ в точке А ($\eta_A = 0$): $\xi'_1 = -\text{tg } \alpha, P_{ji} = P_{10}^-$ имеем из (2):

$$\xi_A^- = \frac{N^{\frac{1}{2}}(P_{10}^-)}{\cos \alpha}; \quad \frac{\rho_1^-}{\rho_0^-} = \frac{N(P_{10}^-)}{N(P_{10}^-) - P_{10}^-}; \quad \frac{u_1^-}{c_0^-} = \frac{P_{10}^-}{\xi_A^-}; \quad \frac{v_1^-}{c_0^-} = \text{tg } \alpha \frac{u_1^-}{c_0^-}. \quad (3)$$

На фронте АС в точке А: $\xi'_2 = \text{tg } \beta, P_{21}^- = P_{20}^- - P_{10}^-, P_{20}^- = \frac{(p_2 - p_0)}{B_0}$

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta &= \frac{-U_1 V_1 + A(U_1^2 + V_1^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}}{A^2 - V_1^2}; \quad A = \left(\frac{\rho_0^-}{\rho_1^-} \right) N(P_{21}^-); \\ U_1 &= \frac{u_1^-}{c_0^-} - \xi_A^-, \quad V_1 = \frac{v_1^-}{c_0^-}. \end{aligned} \quad (4)$$

На фронте АД в точке А: $\xi_3^{'+} = -\operatorname{tg} \omega$, $P_{30}^+ = \frac{(p_3 - p_0)}{B_0^+}$, $B_0^+ = \rho_0^+ c_0^{+2}$,

$$\xi_A^+ = \frac{N^{\frac{1}{2}}(P_{30}^+)}{\cos \omega}, \frac{\rho_3^+}{\rho_0^+} = \frac{N(P_{30}^+)}{N(P_{30}^+) - P_{30}^+}, \frac{u_3^+}{c_0^+} = \frac{P_{30}^+}{\xi_A^+}, \frac{v_3^+}{c_0} = \operatorname{tg} \omega \frac{u_3^+}{c_0^+}. \quad (5)$$

Условия совместимости течений на свободной поверхности (в верхних и нижних областях) в точке А ($\eta_A^+ = \eta_A^- = 0$, $\frac{X_A}{c_0 t} = \xi_A$) приводят (см. [2]) к записи двух инвариантов:

I инвариант:

$$c_0^+ \xi_A^+ = c_0^+ \xi_A^-, \frac{c_0^+ N^{\frac{1}{2}}(P_{30}^+)}{\cos \omega} = \frac{c_0^- N^{\frac{1}{2}}(P_{10}^-)}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

II инвариант: ($p_3 = p_2$, $u_{3n} = u_{2n}$)

$$\frac{u^+ - c_0^+ \xi_A^+}{v^+} = \frac{u^- - c_0^- \xi_A^-}{v^-}. \quad (7)$$

При исследовании ω из (6), (7) получим уравнение для q^+ ($\bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}$, $\bar{B} = \frac{B_0^-}{B_0^+}$):

$$\bar{c}^2 \frac{N(P_{30}^+)}{P_{30}^{+2}} \left[\frac{P_{10}^- \sin \alpha}{N^{\frac{1}{2}}(P_{10}^-)} - \frac{P_{21}^- \sin \beta}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{2}}(P_{21}^-)} \right]^2 = 1 - \frac{N(P_{30}^+)}{\bar{c}^2 N(P_{10}^-)} \cos^2 \alpha. \quad (8)$$

Здесь $\frac{\rho_1^-}{\rho_0}$, β – определяются согласно (3), (4). В целом (8) представляет зависимость q^+/P_{10}^- , \bar{c} , \bar{B} , где P_{10}^- , α характеризуют интенсивность и наклон падающей УВ, а \bar{c} , \bar{B} – относительные характеристики газожидкостных сред, определяемые газосодержателями γ^+ , γ^- . Например (см. [5]) при рефракции на поверхности океана (падение УВ со стороны жидкости) $0 \leq \gamma^- \leq 10^{-4}$, $\gamma^+ \rightarrow \infty$.

2. Рефракция на поверхности, разделяющей газы (ГАЗ/ГАЗ). При $\gamma \rightarrow \infty$, $a = \frac{1}{\varkappa - 1}$, $b = 0$ в (1) имеем $B_0^\pm = \rho_0^\pm c_0^{\pm 2} = \varkappa^\pm p_0$, $\varkappa^\pm = \frac{c_{P_{11}}^\pm}{c_{v_{11}}^\pm}$ и из (2) имеем выражения через интенсивность падающей УВ АВ

$$\varepsilon = \frac{(p_1 - p_0)}{p_0}, \quad P_{10}^- = \frac{1}{\varkappa^-} \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\rho_1^-}{\rho_0} = \frac{1 + \frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon}{1 + \frac{\varkappa^- - 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon}; \quad N(P_{10}^-) = 1 + \frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon; \quad q^+ = \frac{p_3 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0};$$

$$N(P_{30}^+) = 1 + \frac{\varkappa^+ + 1}{2\varkappa^+} q^+ \cdot \varepsilon; \quad P_{30}^+ = \frac{1}{\varkappa^+} \cdot q^+ \cdot \varepsilon; \quad (9)$$

$$N(P_{21}^-) = 1 + \varepsilon + \frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot (q^+ - 1) \cdot \varepsilon; \quad P_{21}^- = \frac{1}{\varkappa^-} \cdot (q^+ - 1) \cdot \varepsilon;$$

$$\xi_A^- = \frac{N^{\frac{1}{2}}(P_{10}^-)}{\cos \alpha}; \quad \xi_A^+ = \frac{N^{\frac{1}{2}}(P_{30}^+)}{\cos \omega}.$$

I и II инварианты (6), (7) (или II инвариант и уравнение (8)) совместно с уравнением (4) для β представляют систему уравнений для нахождения β , ω , $q^+/\alpha, \varepsilon$. Дополнительные условия ($q^+ = 1.0$; $\omega = 0$) позволяют найти границы областей существования режимов рефракции ($RR \leftrightarrow RW$; $RW \leftrightarrow BPR$).

3. Расчет основных параметров (β, ω) и границ областей существования при рефракции по поверхности ГАЗ/ГАЗ.

- Условия эксперимента (см. [3, 4]):

$$\begin{aligned} CO_2 - \rho_0^- &= 1.976 \text{ кг/м}^3; \quad c_0^- = 256 \text{ м/с}; \quad \varkappa^- = 1.3; \\ CH_4 - \rho_0^+ &= 0.717 \text{ кг/м}^3; \quad c_0^+ = 423 \text{ м/с}; \quad \varkappa^+ = 1.28; \\ \varepsilon &= 0.282 \quad (\xi = \frac{p_0}{p_1} = 0.78); \end{aligned}$$

$$\bar{c} = 0.605; \quad \bar{\varkappa} = 1.015; \quad \bar{\rho} = 2.756. \quad (10)$$

- Определение $\omega/\alpha, \varepsilon$.

Из (6) при $N(P_{10}^-)$, $N(P_{30}^+)$ по (9) имеем:

$$q^+ = \frac{\left[\bar{c}^2 \left(\frac{\cos \omega}{\cos \alpha} \right)^2 \left(1 + \frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon \right) - 1 \right]}{\left(\frac{\varkappa^+ + 1}{2\varkappa^+} \cdot \varepsilon \right)}. \quad (11)$$

Исключая β из (8) и (4), получим α/ε , q^+ , которая при использовании (11) дает ответ – $\omega(\alpha, \varepsilon)$.

- Определение $\beta/\alpha, \varepsilon$.

Записывая 1-е уравнение из (2) при $\xi' = \text{tg } \beta$ и используя (9), получим:

$$q^+ = 1 + \frac{(1 + \varepsilon)}{\frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon} + \frac{\cos^2 \beta}{\frac{\varkappa^- + 1}{2\varkappa^-} \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{\rho_1^-}{\rho_0^-} \right) \cdot \left[\xi_A^- - \left(\frac{u_1^-}{c_0^-} - \text{tg } \beta \cdot \frac{v_1^-}{c_0^-} \right) \right]^2. \quad (12)$$

При подстановке (12) в (8) получим зависимость $\beta/\alpha, \varepsilon$.

На рис. 2 представлено сравнение расчетных данных по настоящей теории с экспериментальными данными (см. [4]) при (10). L.F. Henderson (1991) на поверхности ГАЗ/ГАЗ (CH_4/CO_2).

Определение границ области существования

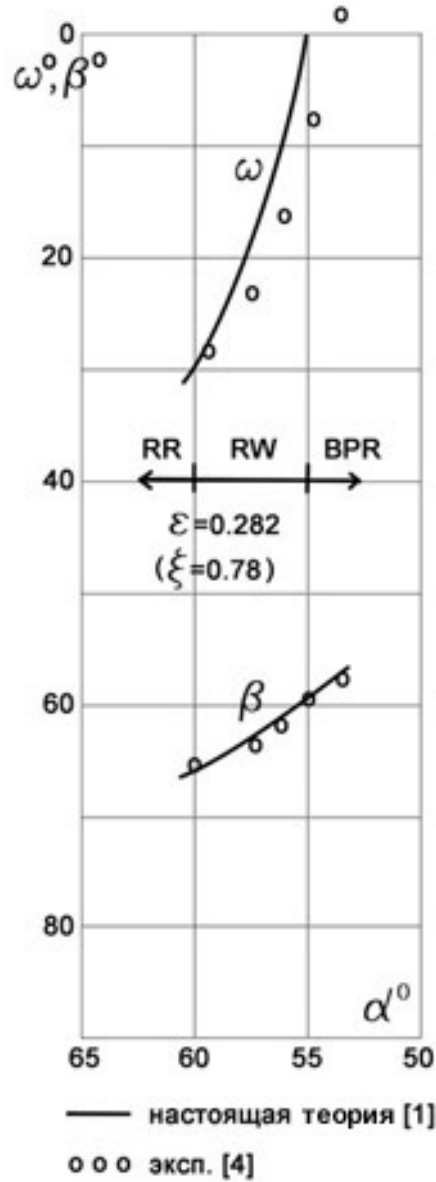


Рис. 2

- Граница $RR \leftrightarrow RW$ при $q^+ = 1.0$.

Имеем $P_{21}^- = 0$, тогда уравнение (8) упрощается и подставляется зависимость α/ε . Из нее в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \bar{c}^2}{1 - \bar{c}^4/\bar{\varepsilon}^2}; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^-}{\varepsilon^+}, \quad \bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}. \quad (13)$$

В эксперименте (см. [3]) при условиях (10) из (13) получим $\alpha^* = 58.6^0$. При режиме $RW \alpha \leq \alpha^*$.

- Граница $RW \leftrightarrow BPR$ при $\omega = 0$.

Из (6) при $\omega = 0$ получим

$$\cos^2 \alpha = \left(1 + \frac{\varepsilon^- + 1}{2\varepsilon^-} \cdot \varepsilon\right) \cdot \bar{c} / \left(1 + q^+ \frac{\varepsilon^+ + 1}{2\varepsilon^+} \cdot \varepsilon\right). \quad (14)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ из (14) имеем $\cos \alpha = \bar{c}$. В условиях эксперимента (см. [3]) из (10) имеем $\alpha^* = 52.6^\circ$. Для нахождения q^+ в (14), используя (7) (при $\omega = 0$ имеем $V^- = 0$), и согласно (2) на АС имеем $\frac{v_1^-}{c_0} = \operatorname{tg} \beta \left(\frac{u_2^-}{c_0} - \frac{u_1^-}{c_0} \right)$, получим зависимость

$$\sin^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{(q^+ - 1)^2} \cdot \frac{N(P_{21}^-)}{\left(1 + \frac{\alpha\varepsilon^- - 1}{2\alpha\varepsilon^-} \cdot \varepsilon\right)}. \quad (15)$$

Выражение (15) при исключении β с помощью (4) дает необходимое выражение для $q^+/\alpha, \varepsilon$ в (14) для определения зависимости α/ε при $\omega = 0$.

- Результаты расчета границ представлены на рис. 3.

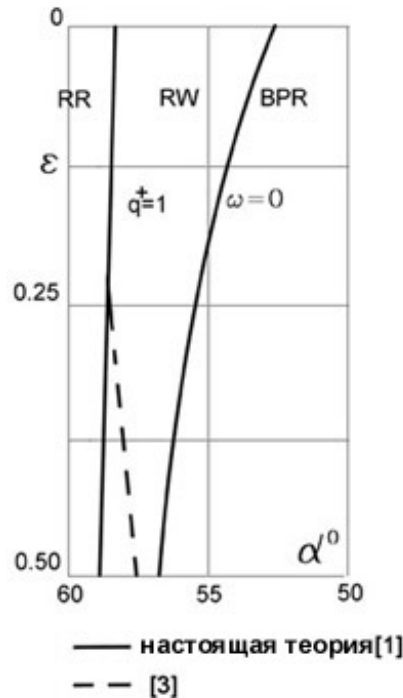


Рис. 3

Граница $RW \leftrightarrow BPR(\omega = 0)$ хорошо согласуется с результатами [3] Abd-El-Fattach. Граница $RR \leftrightarrow RW(q^+ = 1)$ также согласуется с [3], но при $\varepsilon > 0.25$ уточняет ее (очевидно поэтому в [3] границы нанесены пунктиром).

Основные выводы. Общая модель рефракции УВ в ГЖС (см. [1, 2]) физически адекватна при рефракции в газах, когда газосодержания γ^+, γ^- велики. Это позволяет использовать ее для анализа рефракции УВ в дисперсных (капельных средах), рассчитывать эффективные ударные нагрузки (q^+).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных в газовых и газожидкостных средах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.
3. Abd-El-Fattach A. M., Henderson L. F. Shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid. Mach. 1978. Vol.89, part 1. P. 79–95.
4. Henderson L. F., Colella P., Puckett E. G. On the refraction of shock waves at a slow-fast gas interface // J. Fluid. Mach. 1991. Vol. 224. P. 1–27.
5. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Влияние газосодержания водной среды на границы режимов рефракции ударных волн на поверхности океана // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2015. Вып. 17. С. 141–146.

УДК 629

Д. А. Шишков, Ю. Н. Челноков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В работе рассматривается аналитическое решение оптимальной двухимпульсной переориентации орбиты космического аппарата (КА). Работа является развитием [1, 2]. Для решения задачи переориентации орбиты КА используем уравнения орбитальной системы координат (ОСК) η в параметрах Эйлера:

$$2\frac{d\lambda}{dt} = \lambda \circ \omega_\eta, \omega_\eta = u\frac{r}{c}\mathbf{i}_1 + \frac{c}{r^2}\mathbf{i}_3, \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, c = \text{const}, \quad (1)$$

где $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации ОСК η в геоцентрической экваториальной системе координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в центре O притяжения Земли; $\lambda_j (j = 0, 1, 2, 3)$ – параметры Эйлера, характеризующие ориентацию ОСК; $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, \circ – символ кватернионного умножения, ω_η – отображение вектора ω абсолютной угловой скорости ОСК на базис η ; φ – истинная аномалия, характеризующая положение КА на орбите.

Кватернион λ связан с кватернионом Λ ориентации орбиты КА соотношением

$$\lambda = \Lambda \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

Требуется определить ограниченное по модулю управление \mathbf{u} :

$$(-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}, u \leq \pm|\mathbf{u}|),$$

ортогональное плоскости орбиты КА, переводящее орбиту КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (1), из заданного начального состояния

$$t = t_0 = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ (\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2})$$

в конечное состояние, принадлежащее многообразию

$$t = t_1 = ?, \varphi(t_1) = \varphi_1, \boldsymbol{\lambda}(t_1) = \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\Lambda}(t_1) \circ (\cos \frac{\varphi_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_1}{2})$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2); \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0.$$

В работах Ю. Н. Челнокова и Я. Г. Сапункова показано, что в случае двухимпульсной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, истинная аномалия φ_1 на правом конце траектории и углы поворотов ϑ_1, ϑ_2 орбиты КА при сообщении ему импульсов реактивной тяги, находятся из системы четырёх скалярных нелинейных алгебраических уравнений, которая в кватернионной записи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}(0) \circ [\cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2}] \circ [\cos \frac{\vartheta_1}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta_1}{2}] \circ [\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}] \circ \\ \circ [\cos \frac{\vartheta_2}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta_2}{2}] = \boldsymbol{\Lambda}(t_1) \circ [\cos \frac{\varphi_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_1}{2}], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\Lambda}(0)$ и $\boldsymbol{\Lambda}(t_1)$ – заданные начальное и конечное значения кватерниона ориентации орбиты КА.

Кватернионное уравнение (2) запишем в виде

$$\boldsymbol{\Lambda}(0) \circ \boldsymbol{\varphi}_0 \circ \boldsymbol{\vartheta}_1 \circ \Delta\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\vartheta}_2 = \boldsymbol{\Lambda}(t_1) \circ \boldsymbol{\varphi}_1, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0 = \cos \frac{\varphi_0}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_0}{2}, \boldsymbol{\vartheta}_1 = \cos \frac{\vartheta_1}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta_1}{2}, \Delta\boldsymbol{\varphi} = \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} + \\ + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}, \boldsymbol{\vartheta}_2 = \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \mathbf{i}_1 \sin \frac{\vartheta_2}{2}, \boldsymbol{\varphi}_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \mathbf{i}_3 \sin \frac{\varphi_1}{2}. \end{aligned}$$

Каждому множителю в кватернионном уравнении (3) можно поставить в соответствие матрицу направляющих косинусов:

$$\mathbf{\Lambda}(0) \sim C(0), \varphi_0 \sim C_{\varphi_0}, \vartheta_1 \sim C_{\vartheta_1}, \Delta\varphi \sim C_{\Delta\varphi}, \vartheta_2 \sim C_{\vartheta_2}, \\ \mathbf{\Lambda}(t_1) \sim C(t_1), \varphi_1 \sim C_{\varphi_1}.$$

Матрицы направляющих косинусов $C(0), C_{\varphi_0}, C_{\vartheta_1}, C_{\Delta\varphi}, C_{\vartheta_2}, C(t_1), C_{\varphi_1}$ имеют следующий вид:

$$C_{\varphi_0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ -\sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\varphi_1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1 - \varphi_0) & \sin(\varphi_1 - \varphi_0) & 0 \\ -\sin(\varphi_1 - \varphi_0) & \cos(\varphi_1 - \varphi_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ C_{\vartheta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 \\ 0 & -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 \end{bmatrix}, C_{\vartheta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta_2 & \sin \vartheta_2 \\ 0 & -\sin \vartheta_2 & \cos \vartheta_2 \end{bmatrix}.$$

Кватернионному уравнению (3) соответствует матричное уравнение:

$$C_{\vartheta_2} C_{\Delta\varphi} C_{\vartheta_1} C_{\varphi_0} C(0) = C_{\varphi_1} C(t_1). \quad (4)$$

Обозначим $A = C(t_1)C^T(0)C_{\varphi_0}^T$ и перепишем уравнение (4) в таком виде:

$$C_{\vartheta_2} C_{\Delta\varphi} C_{\vartheta_1} = C_{\varphi_1} A.$$

Перемножая матрицы в левой и правой частях этого уравнения и приравнявая отношения соответствующих элементов левой и правой результирующих матриц, получим соотношения для нахождения истинной аномалии φ_1 в конечный момент времени и углов поворотов ϑ_1, ϑ_2 орбиты КА при сообщении ему импульсов реактивной тяги:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a_{11} - \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0 - a_{21}}, \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{a_{13} \cos \varphi_1 + a_{23} \sin \varphi_1}{a_{12} \cos \varphi_1 + a_{22} \sin \varphi_1}, \quad (5) \\ \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{a_{31}}{a_{11} \sin \varphi_1 - a_{21} \cos \varphi_1},$$

где $a_{ij} (j = 1, 2, 3)$ – элементы матрицы A .

Используем полученные соотношения (5) для нахождения искомого $\varphi_1, \vartheta_1, \vartheta_2$. Для этого зафиксируем конечные значения угловых переменных Ω_u, I, ω_π , а их начальные значения будем варьировать.

В таблице приведены получившиеся результаты для конечных значений угловых переменных $I^* = -78.5080^\circ$, $\Omega_u^* = 229.9217^\circ$, $\omega_\pi^* = 359.7290^\circ$, для начального значения истинной аномалии $\varphi_0 = 0$ и для

заданных в таблице отклонений ΔI , $\Delta\Omega_u$, $\Delta\omega_\pi$ по угловым элементам орбиты.

ΔI	$\Delta\Omega_u$	$\Delta\omega_\pi$	φ_1	ϑ_1	ϑ_2
0	-0.25	0	28.15	-26.02222	25.90
0	-0.5	0	27.65	-26.02222	25.79308
0	-0.75	0	27.15	-26.02222	25.68134
0	-1	0	26.64	-26.02222	25.57153
-0.25	0	0	0.27	-0	0.25000
-0.5	0	0	0.27	0	0.49999
-0.75	0	0	0.27	0	0.75000
-1	0	0	0.27	0	0.99999

Примечание. Все величины приведены в градусах.

Из таблицы видно, что при увеличении отклонения по углу Ω_u конечное значение истинной аномалии φ_1 уменьшается, угол поворота орбиты ϑ_1 остаётся постоянным, а угол ϑ_2 уменьшается. При увеличении отклонения по углу I конечное значение истинной аномалии φ_1 остаётся неизменным, угол ϑ_1 равен нулю, а угол поворота орбиты ϑ_2 увеличивается. Видно также, что двухимпульсная переориентация орбиты КА более эффективна для управления наклонением орбиты I .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 1. С. 84–92.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АБРАМОВА В. В., ДУДОВ С. И. О внешней оценке компакта лебеговым множеством выпуклой функции	3
БОНДАРЕНКО Н. П., КУЗНЕЦОВА М. А. Асимптотические формулы для собственных значений оператора Штурма–Лиувилля на графе-звезде	6
БРЕДИХИН Д. А. О классах полурешеточно и решеточно упорядоченных группоидов отношений с диофантовыми операциями	9
БУКУШЕВА А. В. Инфинитезимальные автоморфизмы распределений контактных метрических многообразий с допустимой симплектической структурой	11
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю., ЗАВРАЖНОВ Ю. А. Об аппроксимации динамических рядов, представленных диапазонами	13
ГАЛАЕВ С. В. О геодезических преобразованиях К-контактных метрических структур	17
ГАЛАЕВ С. В., ШЕВЦОВА Ю. В. О геометрии кораспределения почти контактной метрической структуры с метрикой Сасаки	20
ГУДОШНИКОВА Е. В. Сходимость последовательности натуральных и дробных производных операторов Саса–Миракьяна	22
ИГНАТЬЕВ М. Ю. О задаче рассеяния для пучков дифференциальных операторов на простейшем некомпактном геометрическом графе с циклом	25
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. Об одной смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения	27
КОРОЛЕВА О. А. О сходимости средних Рисса разложений по собственным и присоединенным функциям одного интегрального оператора	30
КУЗНЕЦОВА И. А. Иерархические игры с постепенным многошаговым уточнением информации первого игрока о выборе второго	35
КУРДЮМОВ В. П., ХРОМОВ А. П. О решениях одной смешанной задачи для волнового уравнения с нулевой начальной функцией	38
МАКАРОВ А. В., ДУДОВ С. И. Об одной задаче полиномиального приближения вектор-функции	41
МОЛЧАНОВ В. А. Нестандартная теорема компактности для конечных алгебраических систем	44
МУШКО М. Д. О двоичных базисных сплайнах	48
НОВИКОВ В. Е. Изотонные отображения в однозначном контексте	51
ПОЛИКАРПОВ С. И. Разложение конечного детерминированного автомата в конечный ряд по системе функций Уолша	54
ПОПЛАВСКИЙ В. Б. Делимость идемпотентов полугруппы булевых матриц	57

РОЗЕН В. В. Допустимые исходы в играх с отношениями предпочтения . . .	60
РОМАКИНА Л. Н. О площади эллиптического орициклического n -реберника гиперболической плоскости положительной кривизны	63
РЫХЛОВ В. С. Разложение по корневым элементам нерегулярного дифференциального пучка третьего порядка с кратными характеристиками	66
ТРЫНИН А. Ю. Односторонний признак Дини–Липшица для исследования равномерной сходимости синк-аппроксимаций.	70
ХРОМОВ А. А. Оценка погрешности приближенного решения одной обратной задачи	73
ХРОМОВ А. А., ХРОМОВА Г. В. Регуляризирующее семейство операторов для уравнения Абеля с инволюцией	76
ШЕБАЛДИН В. Р. Необходимые условия экстремума в одной задаче оптимального управления с недифференцируемым критерием качества	78
ЮРКО В. А. Обратные задачи для пучков дифференциальных операторов на графе с корневым циклом	81

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

АНТОНЕНКО Э. В. Напряженно-деформируемое состояние цилиндрических емкостей	85
БОНДАРЕНКО Г. А., ПАНКРАТОВ И. А. Наискорейшее торможение вращающегося космического аппарата	91
ВИЛЬДЕ М. В., СЕРГЕЕВА Н. В. Моды наследственно-упругого слоя с перекрестными граничными условиями на лицевых поверхностях	94
ДОЛЬ Е. С. Моделирование функционального элемента позвоночника	97
ИСМАЙЛОВ Г. А., ПАНКРАТОВ И. А. О минимизации затрат энергии на управление угловым движением спутника	100
КАЛИНИНА А. В., КОНДРАТОВ Д. В., СТАРОСТИН Д. Д., БЛИНKOVA А. Ю. Моделирование гидроупругих колебаний ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации	103
КОЖАНОВ В. С., УСТУПКИН Е. С. Применение метода преобразования к решению автомодельной задачи о слое смещения	107
КОЗЛОВ Е. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Исследование задачи нелинейной стабилизации программных значений угловых элементов орбиты космического аппарата	110
КОННОВ К. Ю., ПАНКРАТОВ И. А. Наискорейшие манёвры самолёта в горизонтальной плоскости	113
ЛЕБЕДЕВ А. С., ПАНКРАТОВ И. А. Расчёт циркуляции жидкости под действием ветра методом частичной дискретизации	116
МЫЛЬЦИНА О. А., СТОЛБОВА Е. П. Решение осесимметричной упругости композиции из двух оболочек вращения, гладко сопряженных между собой	119
ОРЛОВА К. О., ПАПКОВА И. В., КРЫЛОВА Е. Ю. Математическое моделирование нелинейной динамики слоистых балок в поле белого шума с учетом контактного взаимодействия	122
ПАНКРАТОВ И. А. Сравнение эффективности различных методов взвешенных невязок в задачах оптимального управления	125
РАСТЕГАЕВ Ю. О. Анализ качества сигнала микромеханического пьезогироскопа в условиях нестационарного температурного поля	128
РЗАЕВ В. А. Персонализированное компьютерное моделирование тазобедренного сустава	131

САПУНКОВ Я. Г. Оптимальная импульсная переориентация орбиты КА с различными условиями на направление тяги	134
СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Новый алгоритм определения ориентации вращающегося свободного тела	137
СИНИЧКИНА А. О., ПАПКОВА И. В., КРЫЛОВА Е. Ю. Математическое моделирование колебаний гибких балок с учетом связанности температурного и деформационного полей	141
СКРИПАЧЕНКО К. К. Персонализированное компьютерное моделирование грудного отдела аорты	144
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А. Об адекватности общей модели рефракции ударных волн на поверхности раздела газожидкостных сред при рефракции на поверхности газов	146
ШИШКОВ Д. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Аналитическое решение задачи оптимальной двухимпульсной переориентации орбиты космического аппарата	153

Научное издание

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Сборник научных трудов

ВЫПУСК 18

Ответственный за выпуск *Ю. В. Матвеева*
Технический редактор *Т. А. Трубникова*
Корректор *Е. Б. Крылова*
Оригинал-макет подготовила *М. М. Попова*

Подписано в печать 07.12.2016.

Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 9.30 (10.0). Тираж 100 экз. Заказ 49-Т.

Издательство Саратовского университета. 410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета. 410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.