

УДК 501.1

Н. Ю. Аншваева, Д. А. Бредихин

О КЛАССАХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП ОТНОШЕНИЙ С ДИОФАНТОВЫМИ ОПЕРАЦИЯМИ

Под *алгеброй отношений* мы понимаем упорядоченную пару (Φ, Ω) , где Φ – множество бинарных отношений, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними. Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [1,2].

Операции над отношениями могут быть заданы с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции называются *логическими*. Важным классом логических операций является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой* [3,4] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [5]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования. Отношение теоретико-множественного включения \subset является стабильным относительно диофантовых операций, следовательно, всякая алгебра отношений (Φ, Ω) с диофантовыми операциями может быть рассмотрена как упорядоченная (Φ, Ω, \subset) этим отношением.

К числу диофантовых относится операция умножения отношений \circ . Эта операция является ассоциативной. Алгебра отношений вида (Φ, \circ) образует полугруппу отношений, и всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе отношений. Существует ряд других ассоциативных диофантовых операций над отношениями, поэтому с точки зрения теории полугрупп естественно возникает задача изучения свойств этих операций.

Сосредоточим внимание на следующих ассоциативных операциях над отношениями, определяемых следующим образом. Для всякой пары бинарных отношений ρ и σ , определенных на множестве U , положим

$$\rho\omega_1\sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t, w)(u, s) \in \rho \wedge (t, w) \in \sigma\};$$

$$\rho\omega_2\sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists s, t, w)(s, t) \in \rho \wedge (w, v) \in \sigma\};$$

$$\rho\omega_3\sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w, t)(u, w) \in \rho \wedge (u, t) \in \sigma\};$$

$$\rho\omega_4\sigma = \{(u, v) \in U \times U : (\exists w, t)(w, v) \in \rho \wedge (t, v) \in \sigma\}.$$

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр), изоморфных алгебрам (упорядоченным алгебрам) отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) – многообразие и $Q\{\Omega\}$ ($Q\{\Omega, \subset\}$) – квазимногообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

При изучении алгебр отношений, как правило, рассматриваются следующие проблемы.

1. Найти базис тождеств (квазитождеств) многообразия $Var\{\Omega\}$ (квазимногообразия $Q\{\Omega\}$) и выяснить вопрос о конечной базисуемости этого многообразия (квазимногообразия).

2. Выяснить, является ли квазимногообразие $Q\{\Omega\}$ многообразием?

3. Найти систему элементарных аксиом для класса $R\{\Omega\}$ и выяснить вопрос о его конечной аксиоматизируемости.

4. Выяснить, является ли класс $R\{\Omega\}$ квазимногообразием (многообразием)?

Аналогичные проблемы формулируются для классов упорядоченных алгебр отношений.

Основные полученные результаты, касающиеся указанных выше проблем, приведены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Для упорядоченной полугруппы $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leq)$ следующие условия эквивалентны:*

1. \mathbf{A} принадлежит квазимногообразию $Q\{\omega_1, \subset\}$;

2. \mathbf{A} принадлежит многообразию $Var\{\omega_1, \subset\}$;

3. \mathbf{A} удовлетворяет тождествам

$$xy = x^2y = xy^2, \tag{1}$$

$$xyz = xzy, \tag{2}$$

$$x \leq x^2, \tag{3}$$

$$xy \leq x^2. \tag{4}$$

Теорема 1*. *Для упорядоченной полугруппы $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leq)$ следующие условия эквивалентны:*

1. \mathbf{A} принадлежит квазимногообразию $Q\{\omega_2, \subset\}$;
2. \mathbf{A} принадлежит многообразию $Var\{\omega_2, \subset\}$;
3. \mathbf{A} удовлетворяет тождествам (1), (3) и тождествам

$$xyz = yxz, \quad (2^*)$$

$$xy \leq y^2. \quad (4^*)$$

Теорема 2. Класс $R\{\omega_1, \subset\}$ не является квазимногообразием. Упорядоченная полугруппа $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{\omega_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям теоремы 1 и следующим аксиомам:

$$xy = x^2 \vee yz = zy = y, \quad (5)$$

$$xy = x^2 \vee y \leq z. \quad (6)$$

Теорема 2*. Класс $R\{\omega_2, \subset\}$ не является квазимногообразием. Упорядоченная полугруппа $\mathbf{A} = (A, \cdot, \leq)$ принадлежит классу $R\{\omega_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям теоремы 2 и следующим аксиомам:

$$xy = y^2 \vee xz = zx = x, \quad (5^*)$$

$$xy = y^2 \vee x \leq z. \quad (6^*)$$

Теорема 3. Класс $R\{\omega_3, \subset\}$ образует многообразие в классе всех упорядоченных полугрупп и совпадает с классом $R\{\omega_4, \subset\}$. Упорядоченная полугруппа (A, \cdot, \leq) принадлежит классу $R\{\omega_3, \subset\}$ ($R\{\omega_4, \subset\}$) тогда и только тогда, когда она коммутативна и удовлетворяет тождествам (1), (3), (4).

Теорема 4. Класс $R\{\omega_3, \cap\}$ образует многообразие и совпадает с классом $R\{\omega_4, \cap\}$. Алгебра (A, \cdot, \wedge) типа (2, 2) принадлежит классу $R\{\omega_3, \cap\}$ ($R\{\omega_4, \cap\}$) тогда и только тогда, когда (A, \cdot) – коммутативная полугруппа, удовлетворяющая тождеству (1), (A, \wedge) – полурешетка и выполняются тождества

$$x \wedge x^2 = x, \quad (7)$$

$$xy \wedge x^2 = xy, \quad (8)$$

$$x(x \wedge y) = x \wedge y, \quad (9)$$

$$(x^2 \wedge y)z = xyz. \quad (10)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Tarski A.* On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 4. P. 73 –89.
2. *Tarski A.* Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188 –189.
3. *Бредихин Д. А.* О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
4. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. РАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
5. *Böner F., Pöschel F. R.* Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 514.133

Л. В. Бессонов, Л. Н. Ромакина

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТЫХ КОВРОВ НА ПРОСТОМ 4-КОНТУРЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

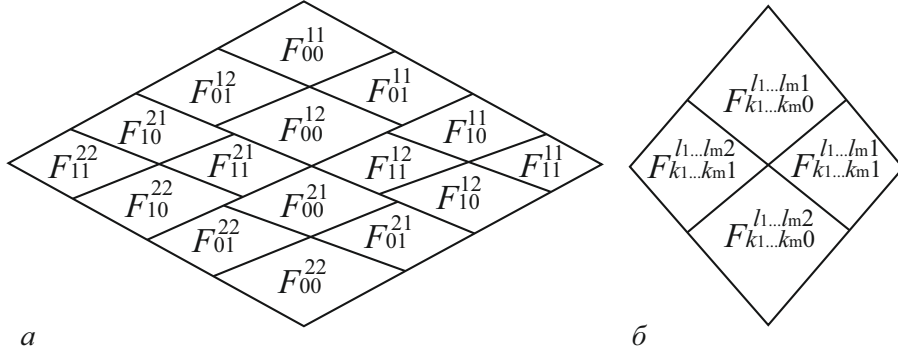
В статье [1] (см. также книгу [2, гл. 4]) в геометрии гиперболической плоскости \widehat{H} положительной кривизны построено особого вида разбиение простого 4-контура, так называемое *диссекториальное* разбиение, в результате которого на простом 4-контуре возникают объекты, не имеющие аналогов в классических пространствах постоянной кривизны, в частности, простые ковры. В данной работе предложен способ изображения простых ковров.

Напомним, что с каждым простым 4-контуром плоскости \widehat{H} можно связать его *основной инвариант* Δ , $|\Delta| \in I = (0; 1)$, равный отношению, в котором точка пересечения противоположных сторон 4-контура делит его ребро, считая от эллиптической вершины. В случае прямого 4-контура $|\Delta| = 1/2$.

Параболическую прямую, проходящую через центр простого 4-контура, называем *диссектрисой*. Две диссектрисы разбивают простой 4-контур F на две пары конгруэнтных в паре простых 4-контура. Причем основной инвариант Δ_1 (Δ_0) контуров F_1^1, F_1^2 (F_0^1, F_0^2) разбиения, гиперболические (эллиптические) диагонали которых принадлежат гиперболической (эллиптической) диагонали контура F , определен основным инвариантом Δ контура F :

$$|\Delta_1| = a_1 = \frac{1 + \sqrt{a}}{2} \quad \left(|\Delta_0| = a_0 = \frac{2\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \right), \quad a = |\Delta|. \quad (1)$$

Каждый из полученных контуров $F_1^1, F_1^2, F_0^1, F_0^2$ разобьем его диссектрисами на две пары конгруэнтных в паре простых 4-контуров. Сохраняя логику введенных обозначений, основные инварианты контуров, конгруэнтных в группах $(F_{00}^{11}, F_{00}^{12}, F_{00}^{21}, F_{00}^{22}), (F_{01}^{11}, F_{01}^{12}, F_{01}^{21}, F_{01}^{22}), (F_{10}^{11}, F_{10}^{12}, F_{10}^{21}, F_{10}^{22}), (F_{11}^{11}, F_{11}^{12}, F_{11}^{21}, F_{11}^{22})$, обозначим соответственно $\Delta_{00}, \Delta_{01}, \Delta_{10}, \Delta_{11}$, а их модули – соответственно $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$. Процесс диссекториального разбиения простого 4-контур F продолжим неограниченно (см. рисунок).



Второй шаг диссекториального разбиения контура F (а).
Разбиение 4-контур $F_{k_1...k_m}^{l_1...l_m}$ (б) на шаге $m + 1$

Применяя выражения (1), для всевозможных наборов $k_1 \dots k_m$ из нулей и единиц получим формулы рекурсивного задания модулей $a_{k_1...k_m 1}, a_{k_1...k_m 0}$ основных инвариантов $\Delta_{k_1...k_m 1}, \Delta_{k_1...k_m 0}$ простых 4-контуров разбиения на шаге $m + 1$ [1, 2]:

$$a_{k_1...k_m 1} = \frac{1 + \sqrt{a_{k_1...k_m}}}{2}, \quad a_{k_1...k_m 0} = \frac{2\sqrt{a_{k_1...k_m}}}{1 + \sqrt{a_{k_1...k_m}}}. \quad (2)$$

Рассмотрим m -й шаг диссекториального разбиения простого 4-контур F с основным инвариантом Δ , где $|\Delta| = a$.

Пару чисел (m, a) , $m \in \mathbb{N}$, $a \in I$, однозначно определяющую по закону диссекториального разбиения (2) набор чисел $a_{k_1...k_m}$, назовем *простым ковром* на контуре F . Число m назовем *уровнем*, а число a – *инвариантом* простого ковра (m, a) .

Каждому значению $a_{k_1...k_m}$ по определенному закону поставим в соответствие цвет, в который окрасим все 2^m контуров $F_{k_1...k_m}^{l_1...l_m}$ с инвариантом $\Delta_{k_1...k_m} = -a_{k_1...k_m}$. Полученную на простом 4-контуре фигуру плоскости \hat{H} назовем *изображением* простого ковра (m, a) .

При любом исходном контуре F одинаково окрашенными на изображении простого ковра окажутся 2^m конгруэнтных контуров $F_{k_1...k_m}^{l_1...l_m}$, каждые два из которых либо не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину.

На евклидовой плоскости простые ковры плоскости \widehat{H} можно изобразить схематично разбиениями, например, ромба. Предлагаем следующий **алгоритм** построения изображения простого ковра. На старте имеем контанту `Contur`, содержащую начальный 4-контур. Организуем цикл от 0 до максимального номера внутреннего разбиения. На каждом m -м шаге этого цикла будем получать по 4^m простых 4-контуров, образующих диссекториальное разбиение исходного простого 4-контура.

```

conturs_list = [{'-1': Contur}]
for i in range(0, dimension):
    new_conturs = []
    for contur in conturs_list:
        k, c = contur.popitem()
        dissect = get_dissect(c)
        draw_dissect(painter, dissect)
        new_conturs.extend(get_new_conturs({k: c}, \
[Point(dissect[0].x,dissect[0].y),Point(dissect[1].x,dissect[1].y),\
Point(dissect[2].x,dissect[2].y),Point(dissect[3].x,dissect[3].y)]))
    conturs_list = new_conturs

```

После отработки этого алгоритма получим список словарей 4-контуров. Каждый элемент списка – словарь, составленный из 4-контуров соответствующего по номеру шага разбиения. Каждый элемент словаря помечен соответственно нижнему индексу 4-контура. Начальный 4-контур для определенности помечен символом -1.

```

def get_new_conturs(contur_dict, mid):
    intersectionPoint = get_intersects(mid)
    key, contur = contur_dict.popitem()
    if key == '-1':
        key = ''
    c = [contur[0], mid[0], contur[1], mid[1], \
contur[2], mid[2], contur[3], mid[3]]
    conturs = []
    conturs.append({'%s%s' % (str(key), str(1)): \
[c[0], c[1], intersectionPoint, c[7]]})
    conturs.append({'%s%s' % (str(key), str(0)): \
[c[1], c[2], c[3], intersectionPoint]})
    conturs.append({'%s%s' % (str(key), str(1)): \
[intersectionPoint, c[3], c[4], c[5]]})
    conturs.append({'%s%s' % (str(key), str(0)): \
[c[7], intersectionPoint, c[5], c[6]]})
    return conturs

```

Для раскраски простого ковра на простом 4-контуре с основным инвариантом Δ ($|\Delta| = a$) по формулам (2) построим набор модулей $a_{k_1 \dots k_m}$, где $k_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$. Затем вычислим максимальное

и минимальное значения модулей и построим линейное отображение $[a_{min}; a_{max}] \rightarrow [c_{min}; c_{max}]$, где c_i – непрерывно занумерованные оттенки одного цвета. Для определённости выберем зелёный цвет в цветовой модели RGB, при этом отступим на 80 вправо от границы минимальной светимости. Указанное отображение в данном случае имеет вид $[a_{min}; a_{max}] \rightarrow [80; 255]$. Предложенного отступа от наиболее тёмных оттенков зелёного цвета вполне достаточно для того, чтобы близкие по цвету тёмные 4-контуры не сливались при изображении в один чёрный ромб. Формализуем описанный алгоритм.

```

min_m, max_m = min(modules), max(modules)
color_min, color_max=80, 255
for contour in contours_list:
    k, c = contour.popitem()
    path = QPainterPath()
    path.moveTo(QPoint(c[0].x, c[0].y))
    for t in c:
        path.lineTo(QPoint(t.x, t.y))
    path.lineTo(QPoint(c[0].x, c[0].y))
    color = (modules[k] - min_m)/(max_m - min_m)* \
(color_max-color_min) + color_min
    qp.fillPath(path, QBrush(QColor().fromRgb(0, color, 0)))

```

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ромакина Л. Н. Ковры на простых 4-контурах гиперболической плоскости положительной кривизны // Дискретная математика. 2014. Т. 26, вып. 1. С. 118–132.
2. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратовского университета, 2013. 274 с.

УДК 517.984

Н. П. Бондаренко

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ ИЗ КЛАССА W_2^1

В данной работе дается характеристика спектральных данных краевой задачи $L = L(Q(x), h, H)$ для матричного уравнения Штурма—Лиувилля

$$\ell Y := -Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi), \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$U(Y) := Y'(0) - hY(0) = 0, \quad V(Y) := Y'(\pi) + HY(\pi) = 0.$$

Здесь $Y(x) = [y_k(x)]_{k=\overline{1,m}}$ – вектор-столбец, λ – спектральный параметр, $Q(x)$ – $m \times m$ матрица с элементами из $W_2^1(0, \pi)$, называемая *потенциалом*, h и H – комплексные $m \times m$ матрицы. Рассмотрим самосопряженный случай, когда $Q = Q^*$, $h = h^*$, $H = H^*$.

Ранее характеристика, или, иначе говоря, необходимые и достаточные условия на спектральные данные матричных операторов Штурма–Лиувилля были получены в работах [1], [2] для потенциала из класса L_2 и в работе [3] для потенциала из класса W_2^{-1} . Одной из ключевых идей при исследовании матричных операторов является разбиение собственных значений на группы по асимптотике. Чем выше гладкость потенциала, тем более сложную структуру имеют эти группы. В данной работе получен результат для потенциала более высокой гладкости – из класса Соболева W_2^1 .

Пусть ω – некоторая эрмитова $m \times m$ матрица. Будем писать $L(Q(x), h, H) \in A(\omega)$, если $h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(x) dx = \omega$. Без ограничения для общности можно считать, что ω принадлежит классу диагональных матриц \mathcal{D} , поскольку ее можно привести к диагональному виду путем применения к задаче L стандартного унитарного преобразования.

Лемма 1. Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega = \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$. Задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nq}\}$, которые с учетом кратностей можно занумеровать таким образом, чтобы выполнялись асимптотические формулы

$$\sqrt{\lambda_{nq}} = n + \frac{\omega_q}{\pi n} + \frac{\varkappa_{nq}}{n^2}, \quad n \geq 0, \quad q = \overline{1, m}, \quad \{\varkappa_{nq}\}_{n \geq 0} \in l_2.$$

Пусть $\Phi(x, \lambda)$ – матричное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $U(\Phi) = I_m$, $V(\Phi) = 0_m$. Здесь I_m – единичная $m \times m$ матрица, 0_m – нулевая $m \times m$ матрица. Обозначим $M(\lambda) := \Phi(0, \lambda)$. Матричные функции $\Phi(x, \lambda)$ и $M(\lambda)$ называются *решением Вейля* и *матрицей Вейля* задачи L соответственно. Матрица Вейля является мероморфной функцией переменной λ с простыми полюсами, которые совпадают с собственными значениями задачи L [1].

Введем *весовые матрицы* $\alpha_{nq} := \text{Res}_{\lambda=\lambda_{nq}} M(\lambda)$. Величины $\Lambda = \{\lambda_{nq}, \alpha_{nq}\}_{n \geq 0, q = \overline{1, m}}$ называются *спектральными данными* краевой задачи L .

Лемма 2. Пусть $L \in A(\omega)$, $\omega \in \mathcal{D}$. Тогда справедливы асимптоти-

ческие формулы

$$\sum'_{\omega_q=\omega_s} \alpha_{nq} = \frac{2}{\pi} I^{(s)} + \frac{K_n}{n}, \quad s = \overline{1, m}, \quad n \geq 0,$$

$$\sum_{q=1}^n \alpha_{nq} = \frac{2}{\pi} \left(I_m + \frac{P}{n^2} + \frac{K_n}{n^2} \right), \quad n \geq 0,$$

$$(I_m - I^{(s)})\alpha_{nq} = K_n, \quad n \geq 0, \quad s = \overline{1, m}, \quad q: \omega_q = \omega_s,$$

где

$$I^{(s)} = [I_{jk}^{(s)}]_{j,k=\overline{1,m}}, \quad I_{jk}^{(s)} = \begin{cases} 1, & j = k, \omega_j = \omega_s, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{2}Q(0) + Wh - hW - W^2 - \omega^2 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega^3}{3}, \quad W := H + \frac{1}{2} \int_0^\pi Q(t) dt,$$

символ K_n обозначает различные последовательности $m \times m$ матриц, таких что $\{\|K_n\|\}_{n \geq 0} \in l_2$. Штрих над суммами означает, что при наличии кратных собственных значений соответствующие им одинаковые весовые матрицы учитываются в сумме только один раз (подробности см. в [2]).

Будем писать $\Lambda \in Sp$, если из $\lambda_{nq} = \lambda_{kl}$ следует $\alpha_{nq} = \alpha_{kl}$.

Теорема 1. Пусть $\omega = \omega^* \in \mathcal{D}$. Для того чтобы величины $\Lambda \in Sp$ были спектральными данными некоторой задачи $L \in A(\omega)$ с потенциалом из класса W_2^1 , необходимо и достаточно выполнение следующих условий.

1. Справедливы асимптотические формулы лемм 1 и 2.

2. Все числа λ_{nq} вещественны. Ранги матриц α_{nq} совпадают с кратностями соответствующих значений λ_{nq} (под кратностью в данном случае мы понимаем количество раз, которое значение встречается в наборе), и $\alpha_{nq} = (\alpha_{nq})^*$, $\alpha_{nq} \geq 0$ для всех $n \geq 0$, $q = \overline{1, m}$.

3. Для любого вектора-строки $\gamma(\lambda)$, который является целой функцией и удовлетворяет оценке

$$\gamma(\lambda) = O(\exp(|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}| \pi)), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

из выполнения условия $\gamma(\lambda_{nq})\alpha_{nq} = 0$ для всех $n \geq 0$, $q = \overline{1, m}$ следует, что $\gamma(\lambda) \equiv 0$.

Согласно результатам работы [2] по данным Λ , удовлетворяющим условиям теоремы 1, можно однозначно восстановить Q , h и H . Чтобы показать принадлежность построенного потенциала Q классу W_2^1 , нужно выбрать модельную задачу $\tilde{L} = L(\tilde{Q}(x), \tilde{h}, \tilde{H}) \in A(\omega)$, $\tilde{Q} \in W_2^1$, для

спектральных данных которой верны асимптотические формулы лемм 1 и 2 с теми же константами, что и для данных Λ . Такую задачу можно подобрать в виде $\tilde{Q}(x) = Cx$, $h = H = 0_m$, где C – некоторая константная $m \times m$ матрица.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014K) и РФФИ (проекты № 13-01-00134 и № 14-01-31042).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Bondarenko N.* Spectral analysis for the matrix Sturm–Liouville operator on a finite interval // *Tamkang J. Math.* 2011. Vol. 42, № 3. P. 305–327.
2. *Bondarenko N.* An inverse problem for the non-self-adjoint matrix Sturm–Liouville operator. URL: <http://arxiv.org/abs/1407.3581> (дата обращения: 15.07.2014).
3. *Mykytyuk Ya.V., Trush N.S.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with matrix-valued potentials // *Inverse Problems.* 2010. Vol. 26. P. 015009.

УДК 517.51

Л. В. Борисова

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ В ТОЧКЕ ЛЕБЕГА РЯДОВ ФУРЬЕ—ЛЕЖАНДРА

Пусть $\{L_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ – последовательность многочленов Лежандра, ортонормированных на отрезке $[-1; 1]$ с единичным весом. Для любой функции $f \in L[-1; 1]$ через $W_n(f, x) = \sum_{k=0}^n a_k L_k(x)$, где

$a_k = \int_{-1}^1 f(t) L_k(t) dt$, обозначим n -ю частную сумму ряда Фурье—Лежандра.

Цель статьи – найти необходимые и достаточные условия сходимости ряда Фурье—Лежандра суммируемой с весом функции в точке Лебега этой функции. Отметим, что вопрос о сходимости в точке Лебега сингулярных интегралов и рядов Фурье суммируемых функций исследован в работах [1–4]. Аналогичный вопрос для рядов Фурье—Лежандра не решался.

Для рядов Фурье—Лежандра имеет место следующая лемма.

Лемма 1 [5, с. 154]. *Для всякого x из интервала $(-1; 1)$ выполняется условие*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [W_n(f, x) - (1 - x^2)^{(-1/4)} S_n(F, \arccos x)] = 0, \quad (1)$$

причем сходимость равномерная на всяком сегменте $[-1 + \varepsilon; 1 - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

Замечание. Как обычно, здесь считаем $x = \cos \theta$ при $0 \leq \theta \leq \pi$ и $F(\theta) = \sqrt{\sin \theta} f(\cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, причем функцию $F(\theta)$ на весь сегмент $[-\pi, \pi]$ распространяем по закону четности. Через $S_n(F, \theta)$ обозначим n -ю частную сумму ряда Фурье функции F по тригонометрической системе.

Эта лемма о равносходимости решает вопрос об условиях сходимости ряда Фурье—Лежандра внутри интервала ортогональности $[-1; 1]$ так, что из этой леммы следует, что ряд Фурье—Лежандра функции $f(t)$ в точке x сходится тогда и только тогда, когда в соответствующей точке $\theta = \arccos x$ сходится ряд Фурье по косинусам вспомогательной функции $F(\tau) = \sqrt{\sin \tau} f(\cos \tau)$, причем ряд Фурье—Лежандра сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, где $-1 \leq a \leq b \leq 1$, если и вышеупомянутый ряд Фурье по косинусам сходится равномерно на соответствующем сегменте $[A; B]$, где $A = \arccos b$ и $B = \arccos a$.

Лемма 2. Пусть функция $f \in L[-1; 1]$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \left[\Phi(\theta, t) - \Phi\left(\theta, t + \frac{\pi}{n}\right) \right] \frac{\sin nt}{t + \frac{\pi}{n}} dt = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 \left[\Phi\left(\theta, \frac{t+2k}{n}\pi\right) - \Phi\left(\theta, \frac{t+2k+1}{n}\pi\right) \right] \sin \pi t dt, \end{aligned}$$

где

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \left[\cos\left(\pi - \frac{2k\pi}{n}\right); \cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \right] \quad (2)$$

при $\Phi(\theta, t) = F(\theta + t) - F(\theta - t)$, $F(\theta) = \sqrt{\sin \theta} f(\cos \theta)$.

Методами работ [3–5] получаем:

Теорема 1. Пусть функция $f \in L[-1; 1]$ и $x \in (-1; 1)$ – точка Лебега функции f . Для того чтобы ряд Фурье—Лежандра этой функции сходился в точке x , необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{2(k+1)} \int_0^1 \left[\Phi\left(\theta, \frac{t+2k}{n}\pi\right) - \Phi\left(\theta, \frac{t+2k+1}{n}\pi\right) \right] \sin \pi t dt = 0, \quad (3)$$

где $\Phi(\theta, t) = F(\theta + t) - F(\theta - t)$, $F(\theta) = \sqrt{\sin \theta} f(\cos \theta)$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f, x) = f(x)$.

Доказательство теоремы 1 опирается на леммы 1–2.

Теорема 2. Пусть функция $f \in L[-1; 1]$. Если в точке $x \in (-1; 1)$ существуют пределы функции $f(x+0)$ и $f(x-0)$, то для того чтобы ряд Фурье–Лежандра этой функции сходилась в точке x , необходимо и достаточно выполнение равенства (3). При этом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Теорема 3 (Аналог признака Салема). Пусть функция f непрерывна на $[-1; 1]$. Если выражение

$$\begin{aligned} t_n(x) = & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \frac{1}{2k+1} \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \cos \frac{2\pi k}{n} + x \sin \frac{2\pi k}{n} \right)^{1/2} \times \right. \\ & \times f \left(x \cos \frac{2\pi k}{n} - \sqrt{1-x^2} \sin \frac{2\pi k}{n} \right) - \\ & - \left(\sqrt{1-x^2} \cos \frac{\pi(2k+1)}{n} + x \sin \frac{\pi(2k+1)}{n} \right)^{1/2} \times \\ & \left. \times f \left(x \cos \frac{\pi(2k+1)}{n} - \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi(2k+1)}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ для $-1 < x < 1$, то ряд Фурье–Лежандра функции $f(x)$ сходится равномерно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Romanovski M. P.* Quelques considerations sur la theorie des integrales singulieres // *Math.Z.* 1931. Bd. 34. N. 1. P.35–49.
2. *Фадеев Д. Л.* О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a // *Мат. сб.* 1936. Т. 1(43), № 3. С 351–367.
3. *Коровкин П. П.* Критерий сходимости ряда Фурье в точке Лебега функции // *Прикладные вопросы математического анализа : сб. науч. тр. Тула : Изд-во Тульского пед. ин-та.* 1972. С 69–72.
4. *Борисова Л. В.* Критерий сходимости рядов Фурье–Лаггера в точке Лебега // *Саратов, 1988.* 16 с. Деп. в ВИНТИ 25.07.1988. № 5892–В88.
5. *Борисова Л. В.* О необходимых и достаточных условиях сходимости в точке рядов Фурье–Лаггера // *Теория функций и приближений : тр. 3-й Сарат. зимней школы.* 27 янв. – 7 февр. 1986 : Ч 2. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1988. С. 52–56.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. // *М.ЖФизматгиз.* 1962. 500 с.
7. *Salem R.* Essais sur les series trigonometriques? actual/ sci et Industr. № 862. Paris, 1940.

КОГОМОЛОГИИ ОСНАЩЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Задание оснащенного распределения на гладком многообразии позволяет рассмотреть линейное пространство внешних форм, замкнутое относительно операции внешнего дифференцирования. Для таких форм можно естественным образом ввести аналоги групп когомологий. Подобные конструкции рассматривались ранее в работах [1–3]. В настоящей работе показывается, что когомологии оснащенных распределений могут быть отождествлены с «обычными» когомологиями некоторых пространств, естественным образом возникающих на многообразиях с оснащенными распределениями. Указанное отождествление, в частности позволяет исследовать вопрос существования контактной структуры.

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности n , $\Xi(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется *тензором*.

Определим совокупность $(\vec{\xi}, \eta)$ тензорных полей на M , где $\vec{\xi}$ и η соответственно вектор и ковектор так, что $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0$ для всех $\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(M)$.

Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$ – его оснащение. Будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker \omega = \text{span}(\vec{\xi})$ и называется *вектором Руба*.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$) ($a, b, c, e = 1, \dots, n - 1$) на многообразии M будем называть *адаптированной к неголономному многообразию D* , если $D^\perp = \text{Span}(\frac{\partial}{\partial x^n})$.

Пусть $P : TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D : $D = \text{span}(\vec{e}_a)$ [4]. Таким образом, мы имеем на многообразии M неголономное поле базисов (\vec{e}_a, ∂_n) и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. *Адаптированным* будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой.

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем *допустимым* (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению D^\perp , а ковекторный аргумент коллинеарен форме η . Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p, q) в адаптированной карте имеет вид $t = t_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \vec{e}_{a_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{a_p} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b_q}$.

Назовем допустимое тензорное поле *интегрируемым*, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Необходимым условием интегрируемости допустимого поля t является обращение в нуль производных $\partial_n t$ [4].

Пространство замкнутых форм степени k на многообразии M обозначим $Z^k(M)$, пространство точных форм – $B^k(M)$.

Под *допустимой полубазисной формой* (к распределению D) будем понимать форму, заданную на многообразии M , если 1) она обращается в нуль каждый раз, когда ее векторный аргумент принадлежит оснащению D^\perp , 2) оператор $L_{\vec{\xi}}$ дифференцирования Ли вдоль поля $\vec{\xi}$ от формы равен нулю.

Теорема 1. *Внешний дифференциал допустимой полубазисной формы является допустимой полубазисной формой.*

Доказательство. Если λ – допустимая полубазисная форма, то в адаптированных координатах $\lambda = \lambda_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$. Рассмотрим дифференциал $d\lambda = d\lambda_{a_1 \dots a_p} \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$. Так как по условию теоремы $\partial_n \lambda_{a_1 \dots a_p} = 0$, то $d\lambda = \partial_a \lambda_{a_1 \dots a_p} dx^a \wedge dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если внешний дифференциал допустимой формы равен нулю, то она интегрируема.*

Доказательство.

$$d\omega(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \frac{1}{3}(\vec{X}\omega(\vec{Y}, \vec{Z}) + \vec{Y}\omega(\vec{Z}, \vec{X}) + \vec{Z}\omega(\vec{X}, \vec{Y}) - \omega([\vec{X}, \vec{Y}], \vec{Z}) - \omega([\vec{Y}, \vec{Z}], \vec{X}) - \omega([\vec{Z}, \vec{X}], \vec{Y})). \quad (1)$$

Сделаем замену в (1):

а) $\vec{X} = \partial_n, \vec{Y} = \vec{e}_a, \vec{Z} = \vec{e}_b$, получим

$$d\omega(\partial_n, \vec{e}_a, \vec{e}_b) = \frac{1}{3}\partial_n \omega_{ab}, \quad d\omega = 0 \Rightarrow \partial_n \omega_{ab} = 0;$$

б) $\vec{X} = \vec{e}_a, \vec{Y} = \vec{e}_b, \vec{Z} = \vec{e}_c$, получим

$$d\omega_{abc} = \frac{1}{3}(\partial_a \omega_{bc} + \partial_b \omega_{ca} + \partial_c \omega_{ab}) = 0.$$

Последнее равенство означает, что выбирая подходящим образом адаптированную систему координат, утверждение теоремы можно свести к известному результату из геометрии симплектических многообразий.

Теорема доказана.

Замечание. В частности, из теоремы 2 следует, что для допустимых дифференциальных форм понятие интегрируемости в обычном смысле и понятие интегрируемости в нашем смысле совпадают.

Факторпространство замкнутых допустимых полубазисных форм по точным назовем группой когомологий оснащенного распределения $Z^k(D)/B^k(D)$.

Пусть \mathcal{F} – слоение, определяемое оснащением D^\perp . Предположим, что множество слоев F этого слоения образует компактное многообразие.

Рассмотрим естественную проекцию $p : M \rightarrow F$, $p : x \mapsto \mathcal{F}_x$. Очевидно, что многообразие F наделяется структурой симплектического многообразия с формой $\Omega : p^*\Omega = \omega$.

Следующая теорема (см., напр., [5]) дает необходимое условие существования симплектической структуры на компактном многообразии на языке групп когомологий.

Теорема 3. Если на компактном многообразии M^{2k} существует симплектическая структура, то все четномерные группы когомологий $H^{2s}(M^{2k}, \mathbb{R})$ многообразия M^{2k} отличны от нуля, $s = 0, 1, \dots, k$.

Группа когомологий многообразия F изоморфна введенной нами группе когомологий оснащенного распределения: $Z^k(M)/B^k(M) \cong \cong Z^k(D)/B^k(D)$. Этот изоморфизм позволяет сформулировать теорему, которая является следствием теоремы 3.

Теорема 4. Если F компактное симплектическое многообразие с формой Ω , то все четные когомологии оснащенных распределений отличны от нуля.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Balan V., Manea A. Leafwise 2-jet cohomology on foliated Finsler manifolds // Proceedings 16. The Int. Conf. of Diff. Geom. and Dynamical Systems and The V-th Int. Colloq. of Mathematics in Engineering and Numerical Physics - math. sections. August 29 - September 2. 2008. Mangalia. Romania. P. 28–41.
2. Bejancu A., Farran H. R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle // Reports on Mathematical Physics. 2006. Vol. 58, № 1. P. 131–146.
3. Manea A. Cohomology of foliated Finsler manifolds // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics. Informatics. Physics. 2011. Vol. 4(53), № 2. P. 23–30.
4. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.

5. Трофимов В. В. Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск; Горки : Факториал : Изд-во Удм. ун-та: Просперус, 1995. 448 с.

УДК 517.518.82, 519.65

И. Ю. Выгодчикова

О ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДВУЗНАЧНОЙ ФУНКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$, $\Phi(t_k) = \{y_{1,k}; y_{2,k}\}$, $k = \overline{0, N}$, – образы двузначной функции $\Phi(\cdot)$, $A = t(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ($n \geq 0$). Рассмотрим задачу:

$$C(A) = \max_{k=\overline{0, N}} c(A, t_k) \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \quad (1)$$

где $c(A, t_k) = |(p_n(A, t_k) - y_{1,k})(p_n(A, t_k) - y_{2,k})|$, $k = \overline{0, N}$.

Для определенности считаем $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k = \overline{0, N}$. В [1] доказан факт существования решения задачи (1). Там же рассмотрен случай, когда $N < n + 1$. Пусть далее $N \geq n + 1$.

Обозначим $C^* = \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} C(A)$. Ясно, что $C^* \geq 0$.

Задача (1) является обобщением известной задачи П. Л. Чебышева [2, с. 14] и сводится к ней в случае $y_{1,k} = y_{2,k}$, $k = \overline{0, N}$ [см. 1]. Задача П. Л. Чебышева является частным случаем еще одной задачи (напр., [3]):

$$\rho(A) = \max_{k=\overline{0, N}} \max\{y_{2,k} - p_n(A, t_k), p_n(A, t_k) - y_{1,k}\} \longrightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2)$$

Обозначим $\rho^* = \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}} \rho(A)$.

Целью статьи является характеристика решения задачи (1).

2. Далее под coB и $intB$ понимаем соответственно выпуклую оболочку и внутренность множества B , $0_{n+1} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Очевидно, что если $C(A) = 0$, то A будет одним из решений задачи (1). Эта ситуация является тривиальной для анализа. Интерес представляет случай $C(A) > 0$. Тогда множество

$$I(A) = \{k \in \overline{0, N} : C(A) = c(A, t_k)\} \quad (3)$$

можно представить как $I(A) = I^+(A) \cup I^-(A)$, где

$$I^\pm(A) = \{k \in I(A) : \pm((p_n(A, t_k))^2 -$$

$$-p_n(A, t_k)(y_{1,k} + y_{2,k}) + y_{1,k}y_{2,k} > 0\}. \quad (4)$$

Дифференциальную характеристику функции $C(A)$ дает следующая теорема.

Теорема 1. *Функция $C(A)$ является субдифференцируемой (в смысле определения В. Ф. Демьянова – А. М. Рубинова в [4, с. 128]) в любой точке $A \in \mathbb{R}^{n+1}$. Если при этом $C(A) > 0$, то её субдифференциал может быть выражен в виде*

$$\underline{dC}(A) = \text{co}\{\xi(A, t_k)(1, t_k, \dots, t_k^n) : k \in I(A)\}, \quad (5)$$

где

$$\xi(A, t_k) = \begin{cases} 2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}), & k \in I^+(A), \\ -2p_n(A, t_k) + y_{1,k} + y_{2,k}, & k \in I^-(A). \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Отметим, что функция $c(A, t)$ как функция максимума двух гладких функций является (см. [4, с. 132]) субдифференцируемой по A . Поэтому и функция $C(A)$ как функция дискретного максимума от таких функций также является субдифференцируемой (см. [4, с. 135]). Если $C(A) > 0$, то в точках $t = t_k$ для $k \in I(A)$ функция $c(A, t)$ является гладкой по A , причем ее градиенты имеют вид

$$c'(A, t_k) = \begin{cases} (2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}))(1, t_k, \dots, t_k^n), & k \in I^+(A), \\ (-2p_n(A, t_k) + y_{1,k} + y_{2,k})(1, t_k, \dots, t_k^n), & k \in I^-(A). \end{cases}$$

Далее, чтобы получить (5–6), осталось воспользоваться правилом субдифференциального исчисления (см. [4, с.136]).

Теорема 1 доказана.

3. В [5] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $n \geq 1$, $x_0 < \dots < x_{n+1}$, $A \neq 0_{n+1}$, $p_n(A, x_q) = 0$, $q = \overline{1, n}$, $\exists s \in \overline{1, n+1}$, $\exists z_s \in (x_{s-1}; x_s)$ такие, что $(-1)^s p_n(A, z_s) < 0$. Тогда $(-1)^q p_n(A, x) < 0$ при любом $x \in (x_{q-1}; x_q)$, $q = \overline{1, n+1}$.*

Обозначим через

$$\begin{aligned} R_1(A) &= \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k}) \cup ((y_{1,k} + y_{2,k})/2; y_{2,k})\}, \\ R_2(A) &= \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; (y_{1,k} + y_{2,k})/2) \cup (y_{2,k}; +\infty)\}, \\ \hat{R}_1(A) &= \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k})\}, \\ \hat{R}_2(A) &= \{k \in I(A) : p_n(A, t_k) \in (y_{2,k}; +\infty)\}. \end{aligned}$$

Как и в [1], базисом назовем множество $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$.

Теорема 2. *Пусть $C(A) > 0$. Для того чтобы вектор $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо, чтобы для некоторого базиса*

$\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$ выполнялось условие

$$j_k \in R_1(A)(R_2(A)) \Rightarrow j_{k+1} \in R_2(A)(R_1(A)), \quad k = \overline{0, n}, \quad (7)$$

и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$j_k \in \hat{R}_1(A)(\hat{R}_2(A)) \Rightarrow j_{k+1} \in \hat{R}_2(A)(\hat{R}_1(A)), \quad k = \overline{0, n}. \quad (8)$$

При выполнении (8) A является единственным решением задачи (1).

Доказательство. Необходимость. В соответствии с [4, с. 247], необходимым условием решения задачи (1) является $0_{n+1} \in \underline{\partial C}(A)$.

1. Пусть $p_n(A, t_k) \neq (y_{1,k} + y_{2,k})/2, \forall k \in I(A)$. Из формулы (5) и [5, теор.1] вытекает, что существует $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, где $j_k \in I(A), k = \overline{0, n+1}, \xi(A, t_{j_k}) \xi(A, t_{j_{k+1}}) < 0, k = \overline{0, n}$. Запишем множества (4) в виде

$$I^\pm(A) = \{k \in I(A) : \pm(p_n(A, t_k) - y_{1,k})(p_n(A, t_k) - y_{2,k}) > 0\},$$

тогда, ввиду (6) для $k \in I(A)$ имеем

$$\xi(A, t_k) = \begin{cases} 2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}), & p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k}) \cup (y_{2,k}; +\infty), \\ -2p_n(A, t_k) + y_{1,k} + y_{2,k}, & p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; y_{2,k}). \end{cases} \quad (9)$$

Пусть $\xi(A, t_k) > 0$. Ввиду (9) либо $2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}) > 0, p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k}) \cup (y_{2,k}; +\infty)$, либо $2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}) < 0, p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; y_{2,k})$, то есть либо $p_n(A, t_k) > y_{2,k}$, либо $p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; (y_{1,k} + y_{2,k})/2)$.

Пусть $\xi(A, t_k) < 0$. Ввиду (9) либо $2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}) < 0, p_n(A, t_k) \in (-\infty; y_{1,k}) \cup (y_{2,k}; +\infty)$, либо $2p_n(A, t_k) - (y_{1,k} + y_{2,k}) > 0, p_n(A, t_k) \in (y_{1,k}; y_{2,k})$, то есть либо $p_n(A, t_k) < y_{1,k}$, либо $p_n(A, t_k) \in ((y_{1,k} + y_{2,k})/2; y_{2,k})$. Тем самым получено (7).

2. Пусть $\exists k_0 \in I(A), p_n(A, t_{k_0}) = (y_{1,k_0} + y_{2,k_0})/2$. Если при этом $\exists \sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T \setminus \{t_{k_0}\}$, для которого выполняется (7), необходимость доказана. В противном случае $\exists S_0 \cup \dots \cup S_r = I(A), 0 \leq r \leq n, S_q = \{k_{q,1} < \dots < k_{q,d_q}\}, q = \overline{0, r}, k_{q,d_q} < k_{q+1,1}, q = \overline{0, r-1}$ такие, что если $S_q \subset R_1(A)(R_2(A))$, то $S_{q+1} \subset R_2(A)(R_1(A)), q = \overline{0, r-1}$. Возьмем $x_0 < t_0, x_{q+1} \in (t_{k_{q,d_q}}, t_{k_{q+1,1}}), q = \overline{0, r-1}, x_q \neq t_{k_0}, q = \overline{1, r}, x_q > t_N, q = \overline{r+1, n}, x_{n+1} > x_n$. Если $S_0 \subset R_1(A)(R_2(A))$, для малого $\epsilon > 0$ решаем относительно A_ϵ систему $p_n(A_\epsilon - A, x_q) = 0, q = \overline{1, n}, p_n(A_\epsilon - A, t_{k_{0,1}}) = \epsilon (p_n(A_\epsilon - A, t_{k_{0,1}}) = -\epsilon)$. По лемме 1, $(-1)^q p_n(A_\epsilon - A, t_k) > 0 ((-1)^q p_n(A_\epsilon - A, t_k) < 0) \forall k \in S_q, q = \overline{0, r}$.

Отсюда и из ([4], лем.2), вытекает $C(A_\epsilon) < C(A)$, что противоречит оптимальности A . Следовательно, (7) выполняется и в данном случае.

Достаточность. Утверждение (8) доказано в [1].

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Пусть на дуопольном рынке с лидирующим производителем объем спроса за три последовательных периода соответственно 7, 5 и 7. Объемы выпуска лидера соответственно 6, 5, 5. Пусть $T = \{1 < 2 < 3\}$, $y_{1,0} = 1$, $y_{1,1} = 2$, $y_{1,2} = 2$ и $y_{2,0} = 6$, $y_{2,1} = 5$, $y_{2,2} = 5$, $n = 1$. Решением задачи (1) является (6.376, 0.589) (например, (0,2) тоже удовлетворяет (7), но не является решением).

Замечание 1. Ввиду [5, теор.2], $0_{n+1} \in \underline{\partial}C(A) \Leftrightarrow 0_{n+1} \in \text{int}\underline{\partial}C(A)$. Из теоремы 2 и [4, с. 247] вытекает, что решение задачи (1) является точкой строгого локального (а при единственности и глобального) минимума функции $C(\cdot)$ на \mathbb{R}^{n+1} .

Замечание 2. Задача (1) имеет конечное множество решений ввиду конечного числа вариантов выполнения (7).

4. Положим $m = \max_{k=0, \overline{n}} (y_{2,k} - y_{1,k})/2$. Из теоремы 2 и [3] вытекает следствие.

Следствие. Пусть $\sigma = \{t_{j_0} < \dots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, $y_{2,j_k} - y_{1,j_k} = 2m$, $k = \overline{0, n+1}$. Тогда A , удовлетворяющее (8), является единственным решением задач (1) и (2), при этом $\rho^* > 2m$.

Пример 2. Пусть в игре двух игроков общий выигрыш (проигрыш) 10 (-10) по четным (нечетным) дням. Выигрыши (проигрыши) доминирующего игрока: 9, (-1), 9, (-0,5). Возьмем $T = \{1 < 2 < 3 < 4\}$, $y_{1,0} = 1$, $y_{1,1} = -9$, $y_{1,2} = 1$, $y_{1,3} = -9.5$ и $y_{2,0} = 9$, $y_{2,1} = -1$, $y_{2,2} = 9$, $y_{2,3} = -0.5$, $n = 1$. По теореме 2 и следствию решением задач (1) и (2) является (0,0). Полученное решение показывает, что почти весь выигрыш достается доминирующему игроку, а проигрыш — его компаньону.

5. Пусть $y_k = y_{1,k} + y_{2,k}$, $k = \overline{0, n+1}$, A — решение задачи (1). Приближенными значениями величин $y_{2,k}$ и $y_{1,k}$ (с точки зрения задачи (1)) являются соответственно $y_k^+ = \max\{p_n(A, t_k), y_k - p_n(A, t_k)\}$ и $y_k^- = \min\{p_n(A, t_k), y_k - p_n(A, t_k)\}$. Это может быть полезно, например, в целях сжатия объёма исходных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-00175).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И. Ю. О среднегеометрическом приближении сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 11–15.
2. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.

3. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 11–19.

4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М. : Наука, 1990. 432 с.

5. *Дудов С. И.* О двух вспомогательных фактах для исследования задач полиномиального приближения // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 22–26.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

ВНУТРЕННЯЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫМ ЛЕЖАНДРОВЫМ СЛОЕНИЕМ

В работах [1,2] было показано, что симплектические связности на симплектическом многообразии (M^{2m}, ω) можно использовать для построения обобщенных классов Маслова лагранжевых подмногообразий $N^m \subset M^{2m}$. Наиболее предпочтительной для этой цели является плоская связность, сохраняющая симплектическую структуру. В то же время в работе [1] В.В. Трофимов рассматривает связность с кручением, подчиняющуюся условиям следующей теоремы:

Теорема 1 [1]. Пусть (M^{2m}, ω) – симплектическое многообразие, на котором имеются такие n векторных полей $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$, что для любой точки $x \in M^{2m}$ векторы $\vec{v}_1(x), \dots, \vec{v}_m(x)$ линейно независимы и $\omega(\vec{v}_a, \vec{v}_b) = 0, 1 \leq a, b \leq m$. Тогда на M^{2m} существует такая плоская связность абсолютного параллелизма ∇ , что ковариантная производная $\nabla_a \omega_{bc}$ относительно ее равна нулю и распределение $L_x = \text{Span}(\vec{v}_1(x), \dots, \vec{v}_m(x))$ параллельно относительно ∇ . В частности, если L_x – интегрируемое распределение, то его интегральные подмногообразия вполне геодезические относительно ∇ . Слоение F на симплектическом многообразии M^{2m} называется лагранжевым [3], если каждый его слой является лагранжевым подмногообразием в M^{2m} . Слоение F называется интегрируемым, если существует такой набор векторных полей $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$, что во всех точках x из области определения векторы $\vec{v}_a(x)$ образуют базис касательного пространства $T_x F$ к слою, проходящему через точку F .

Следствие 1. Для любого интегрируемого лагранжева слоения F симплектического многообразия M^{2m} существует такая плоская связность ∇ абсолютного параллелизма, что $\nabla_a \omega_{bc} = 0$ и все слои слоения

F – вполне геодезические подмногообразия. В частности, M^{2m} – параллелизуемое многообразие. В настоящей работе идеи В.В. Трофимова используются для построения внутренней связности, ассоциированной с вполне интегрируемым лежандровым слоением. Лежандрово слоение является аналогом [4–6] лагранжева слоения в случае многообразия с контактной структурой. Для продолжения результатов, полученных В.В. Трофимовым, на случай контактного многообразия, мы используем полученные ранее конструкции допустимых симплектических связностей [7]. Следуя работе [6], мы вводим понятие контактного гамильтонова векторного поля и интегрируемого лежандрова слоения, после чего формулируем и доказываем основной результат работы. Пусть M^n – гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞ .

Пусть $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ – почти контактная метрическая структура на M^n [7]. Пусть, далее, D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η , $D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ – его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1, \ker\omega = \text{Span}(\vec{\xi})$ и называется вектором Руба. Будем называть распределение D распределением почти контактной метрической структуры.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой будем понимать отображение $\perp : \Gamma D \times \Gamma D \rightarrow \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\nabla_{f_1\vec{u}_1 + f_2\vec{u}_2} = f_1\nabla_{\vec{u}_1} + f_2\nabla_{\vec{u}_2}$, где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты внутренней линейной связности в адаптированных координатах [7, 8] определяются из соотношения $\nabla_{e_n} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Кручение S и кривизна R (по Схоутену) внутренней линейной связности представлены допустимыми тензорами $S(\vec{u}, \vec{v}) = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - \nabla_{\vec{v}} \vec{u} p[\vec{u}, \vec{v}]$, $R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_u \nabla_v \vec{w} - \nabla_v \nabla_u \vec{w} - \nabla_{p[u,v]} \vec{w} - p[q[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$, где p и q – проекторы на распределения D и D^\perp соответственно. В адаптированных координатах имеем соответственно $S_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c - \Gamma_{ba}^c$, $R_{abc}^d = 2\vec{e}_{[a}\Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a||e||} \Gamma_{b]c}^e$. Внутренняя связность допускает следующую интерпретацию. Говорят, что задана связность над распределением D , если распределение $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \rightarrow X$ – естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D . Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта

$G_b^a(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = Span(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \delta_a - \Gamma_a^n \delta_n - G_a^b \delta_{n+b}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$). Легко проверить, что всякая внутренняя линейная связность определяет связность над распределением и, наоборот, связность над распределением D определяет внутреннюю линейную связность, если имеют место равенство $G_b^a(x^a, x^{n+a}) = \Gamma_{bc}^a(x^a, x^{n+a})x^{n+c}$.

Внутренняя связность определяет параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых. Продолженная связность осуществляет параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых. Продолженная связность может быть получена с помощью равенства $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. Таким образом, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Всякая продолженная связность отождествляется с парой (∇, \vec{u}) , где ∇ – внутренняя связность, а \vec{u} – векторное поле на D такое, что $\pi_*(\vec{u}) = \vec{\xi}$. В адаптированных координатах $\vec{u} = \delta_n - G_n^a \delta_{n+a}$. Легко установить, что объект G_n^a преобразуется по тензорному закону и, в частности, мы можем положить его равным нулю. Полученную таким образом продолженную связность обозначим ∇^1 и до конца работы других продолженных связностей рассматривать не будем.

Внутреннюю связность очевидным образом можно применять к любому допустимому тензорному полю [7, 8]. Будем называть внутреннюю связность симплектической, если $\nabla\omega = 0$, где $\omega = d\eta$. В отличие от голономного случая, замкнутость формы не эквивалентна существованию совместимой с ней симметричной допустимой связности (см. [7]).

Как известно [6], существует изоморфизм линейного пространства векторных полей, сохраняющих контактную структуру, на пространство гладких функций. Можно показать, что если при таком изоморфизме полю \vec{v} соответствует функция f , то в адаптированных координатах выполняется равенство $L_{\vec{v}}\eta = (\delta_n f)\eta$. Векторные поля, сохраняющие контактную структуру, называются контактными гамильтоновыми векторными полями. Всякое контактное гамильтоново векторное поле \vec{v} , соответствующее функции f , представимо в виде [6] $\vec{v} = \vec{v}_1 + f\vec{\xi}$, где \vec{v}_1 – допустимое векторное поле: $\vec{v}_1 \in \Gamma D$ (в другой терминологии – горизонтальная часть поля \vec{v}). Пусть F – вполне интегрируемое лежандрово слоение [6] на многообразии с контактной метрической структурой. В этом случае определены m допустимых, линейно независимых в каждой точке определения векторных полей $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ (горизонтальных частей соответствующих контактных гамильтоновых векторных полей) таких, что $\omega(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0, i, j = 1, \dots, m$. Назовем эти поля *допустимыми гамильтоновыми системами вполне интегрируемого лежандрова сло-*

ения.

Теорема 2. Пусть $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ – допустимые гамильтоновы системы. Тогда существует такая внутренняя симплектическая связность ∇ , относительно которой распределение $L_x = \text{Span}(\vec{v}_1(x), \dots, \vec{v}_m(x))$ параллельно.

Доказательство. Выполнив в каждом пространстве D_x процесс ортогонализации Грамма–Шмидта относительно допустимой метрики, получим ортонормированный базис $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2m}$ такой, что $g(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \text{const}$, $\omega(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = \text{const}$. Осталось определить связность ∇ , полагая $\nabla_{\vec{u}} \vec{v} = (\vec{u} v^a) \vec{e}_a$, $\vec{v} = v^a \vec{e}_a$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимов В. В. О связностях абсолютного параллелизма на симплектическом многообразии // УМН 1993. Т. 48, № 1. С. 191–192.
2. Трофимов В. В. Индекс Маслова лагранжевых подмногообразий симплектических многообразий // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. 1988. Вып. 23. С. 190–194.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М. : Наука, 1979.
4. Boyer C. Completely integrable contact Hamiltonian systems and toric contact structures on $S^2 \times S^3$ // SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2011. Vol. 7. Paper 058, 22 pp. 53Dxx (37Jxx).
5. Khesin B., Tabachnikov S. Contact complete integrability // Regul. Chaotic Dyn. 2010. Vol. 15, № 4-5. P. 504-520.
6. Libermann P. Legendre Foliations on Contact Manifolds // Differential Geom. Appl., 1991, vol. 1, pp. 57–76.
7. Галаев С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 16–22.
8. Галаев С. В., Голман А. В., Хромов А. П. Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28–31.

УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

ТЕОРЕМА НАСЫЩЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

В работах [1, 2] была рассмотрена следующая последовательность операторов:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{g(z(x))^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \alpha_{k,n} \left[\frac{z(x)}{\psi(z(x))} \right]^k,$$

где $g(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в круге $|z| < a$, принимающие положительные значения на $[0; a]$ такие, что на $[0; a]$ $x\psi'(x) < \psi(x)$ и числа

$$\alpha_{0,n} = g(0)^n \text{ и } \alpha_{k,n} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\left(g(z)^n \right)' \psi(z)^k \right]_{z=0}, \quad k = \overline{1, \infty}$$

неотрицательны, а $x(z)$ – функция, обратная к функции

$$x(z) = \frac{z\psi(z)}{\psi(z) - z\psi'(z)} \cdot \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Частными случаями операторов L_n являются многие хорошо известные операторы, например, операторы Саса–Миракьяна, Баскакова, Каталана. Кроме того несложно указать пары функций g и ψ с требуемыми свойствами и получить новые последовательности операторов.

Было показано, что $x(z)$ монотонна на $[0; a]$, $x'(x) > 0$, $g'(z) > 0$ и получен следующий результат.

Теорема 1. *Обозначим $v(x) = \frac{xg(x)}{z'(x)g'(x)}$. Тогда для $f \in C[0; x(a)]$*

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right);$$

для $f \in C^1[0; x(a)]$

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq 2\sqrt{\frac{v(x)}{n}}\omega\left(f'; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right);$$

для $f \in C^2[0; x(a)]$

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{v(x)}{2n} \left[\omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) + \|f''\| \right]$$

и

$$\left| L_n(f; x) - f(x) - \frac{v(x)}{2n} \right| \leq \frac{v(x)}{n} \omega\left(f''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right).$$

Из теоремы 1 видно, что порядок приближения операторами L_n улучшается при переходе от класса непрерывных функций к дифференцируемым и от дифференцируемых к дважды дифференцируемым, но не дальше, и порядок приближения ν раз дифференцируемых функций при $\nu \geq 2$ есть $1/n$.

Для ν раз дифференцируемых функций ($\nu \geq 2$) в работах [3–4] была рассмотрена последовательность операторов

$$M_{n,\nu}(f; x) = L_n(f; x) - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!} L_n((t-x)^k; x) M_{n,\nu-k}(f^{(k)}; x),$$

$$M_{n,1}(f; x) = M_{n,2}(f; x) = L_n(f; x)$$

и для них доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если функция f ν раз дифференцируема ($\nu \geq 2$), то

$$|M_{n,\nu}(f; x) - f(x)| \leq n^{-\frac{\nu-1}{2}} \omega\left(f^{(\nu-1)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) W_\nu(x),$$

где $W_\nu(x)$ – функция, которая может быть выражена через $v(x)$.

Продолжая дальнейшее исследование операторов $M_{n,\nu}$, установим следующий факт.

Теорема 3. Если функция f ν раз дифференцируема ($\nu \geq 2$), то

$$\left| M_{n,\nu}(f; x) - f(x) - f^{(\nu)}(x) \beta_\nu(x) \right| \leq n^{-\frac{\nu}{2}} \omega\left(f^{(\nu)}; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) W_\nu(x),$$

где $v(x)$ то же, что и в теореме 1, $W_\nu(x)$ – функция, которая может быть выражена через $v(x)$, $\beta_1(x) = 0$, $\beta_2(x) = \frac{1}{2!} S_{n,k}(x)$, для $\nu > 2$

$$\beta_\nu(x) = \frac{1}{\nu!} S_{n,\nu}(x) - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!} S_{n,k}(x) \beta_{\nu-k}(x)$$

и

$$S_{n,k}(x) = L_n((t-x)^k; x).$$

Доказательство. Для $\nu = 2$ утверждение доказано в работе [3]. Для $\nu = 3$, разложив $f(t)$ по формуле Тейлора и применив к этому разложению оператор L_n , получаем

$$\begin{aligned} \left| M_{n,3}(f; x) - f(x) - f'''(x) \beta_3(x) \right| &\leq \frac{1}{2} \left| f''(x) - L_n(f''; x) \right| \left| S_{n,2}(x) \right| + \\ &+ \frac{1}{6} \left| L_n([f'''(\xi) - f'''(x)](t-x)^3; x) \right| \leq \end{aligned}$$

и, используя результаты из [1–4], получаем, что

$$\leq n^{-\frac{3}{2}} \omega\left(f'''; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) \left[v(x)^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{w_4(x)v(x)}}{6\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{w_7'(x)}}{n^3} \right],$$

где $w_2(x) = v(x)$, для $\nu \geq 3$ $w_\nu(x) = v(x)w'_{\nu-1}(x)$, $S_{n,k}(x) = \frac{w_k(x)}{n^{k-1}}$. Следовательно, для $\nu = 3$ утверждение теоремы выполнено.

Для $\nu > 3$, проведя аналогичные рассуждения, получим

$$\begin{aligned} & \left| M_{n,\nu}(f; x) - f(x) - f^{(\nu)}(x)\beta_\nu(x) \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(x) - M_{n,\nu-k}(f^{(k)}(x); x) + (f^{(k)}(x))^{\nu-k} \beta_{\nu-k}(x) \right| \left| S_{n,k}(x) \right| + \\ & \quad + \frac{1}{\nu!} \left| L_n([f^{(\nu)}(\xi) - f^{(\nu)}(x)](t-x)^\nu; x) \right| \leq \\ & \leq n^{-\frac{\nu}{2}} \omega\left(f^{(\nu)}; \sqrt{\frac{v(x)}{n}}\right) \left[\sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{W_{n,\nu-k}(x) v(x)}{k! n^{k/2-1}} + \frac{W_{n,\nu}^*(x)}{n^{\nu/2-1}} \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Следствие. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\nu+1}{2}} |M_{n,\nu}(f; x) - f(x)| \neq 0$, даже если f имеет более, чем ν производных.

Доказательство. Пусть f имеет $\nu + 1$ производную. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| M_{n,\nu}(f; x) - f(x) - f^{(\nu)}(x)\beta_\nu(x) \right| \leq \\ & \leq n^{-\frac{\nu+1}{2}} \|f^{(\nu+1)}\| \sqrt{v(x)} \left[\frac{W_{n,\nu-2}(x) v(x)}{2} + \frac{W_{n,\nu}^*(x)}{n^{\nu/2-1}} \right] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\nu+1}{2}} |M_{n,\nu}(f; x) - f(x) - f^{(\nu)}(x)\beta_\nu(x)| \neq 0. \end{aligned}$$

При $\nu = 3$ $n^2 \beta_2(x) = \frac{n^2 S_{n,3}(x)}{6} = \frac{1}{6} v(x) v'(x) \rightarrow 0$. Поэтому

$$n^{\frac{\nu+1}{2}} \beta_\nu(x) = \frac{w_\nu(x)}{\nu! n^{\frac{\nu-1}{2}}} - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{w_k(x) \beta_{\nu-k}(x)}{k! n^{k-\frac{\nu}{2}-\frac{3}{2}}} = o(1) - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{O(1)}{n^{\frac{k}{2}-1}} = O(1),$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

Следствие доказано.

Таким образом порядок приближения оператором $M_{n,\nu}$ класса функций, имеющих $\nu + 1$ производную, не может быть лучше, чем $n^{-\frac{\nu+1}{2}}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гудошникова Е. В. Конструкция линейных положительных операторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 20–22.

2. Гудошникова Е. В. Конструкции ЛПО и их аппроксимативные свойства. // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 18–20.

3. Гудошникова Е. В. Порядок приближения дифференцируемых функций классом линейных операторов. // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2009. Вып. 11. С. 19–21.

4. Гудошникова Е. В. Приближения классом линейных операторов. // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 17–20.

УДК 51-77

С. В. Иванилова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА, ФИНАНСИРУЮЩЕГО ИННОВАЦИОННУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

В статье будут рассмотрены основные существующие модели денежного потока в финансировании инновационной деятельности, а также их модернизация с учетом стадий жизненного цикла базисных инноваций.

Инновация – это процесс вложения средств не только в разработку новой техники, технологии и научные исследования, но и во внедрение в производство и в коммерциализацию инноваций.

Для финансирования инновационной деятельности необходимо сформировать нетипичный денежный поток, в котором притоки и оттоки денежных средств будут дозированными и для снижения рисков – многоканальными.

Если финансирование инновационной деятельности характеризуется тем, что за этапом первоначального инвестирования капитала, т. е. оттока денежных средств, следуют длительные поступления, т. е. приток денежных средств, то такой денежный поток будет называться релевантным (рис. 1,а), [1, 2]. Если отток и приток денежных средств в потоке чередуются неоднократно, то такой денежный поток будет являться нерелевантным (рис. 1,б), что выражается формулой

$$\chi(t) = \chi_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где χ – величина чистого денежного потока в момент времени t ; χ_{\max} – максимальное значение денежного потока; $\omega = \frac{2\pi n}{T}$ – частота смены притока денежных средств оттоком, n – число раз смены притока денежных

средств оттоком; T – временной период, в котором рассчитывается величина денежного потока; φ_0 – начальная фаза наблюдения, т. е. период времени, в который началось наблюдение.

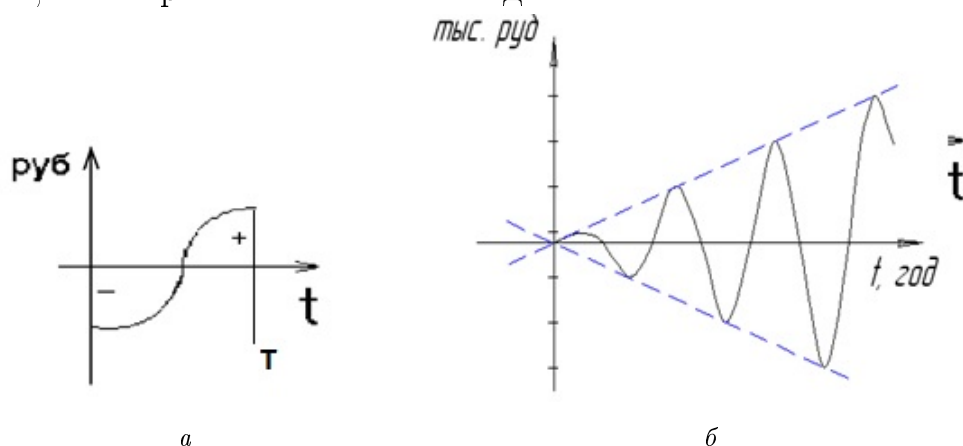


Рис. 1. Денежный поток: а – релевантный, б – нерелевантный

При нарастающей амплитуде колебаний денежных средств денежный поток будет называться антициклическим (рис. 2, а). При одинаковой амплитуде колебаний денежного потока со временем – проциклическим (рис. 2, б).

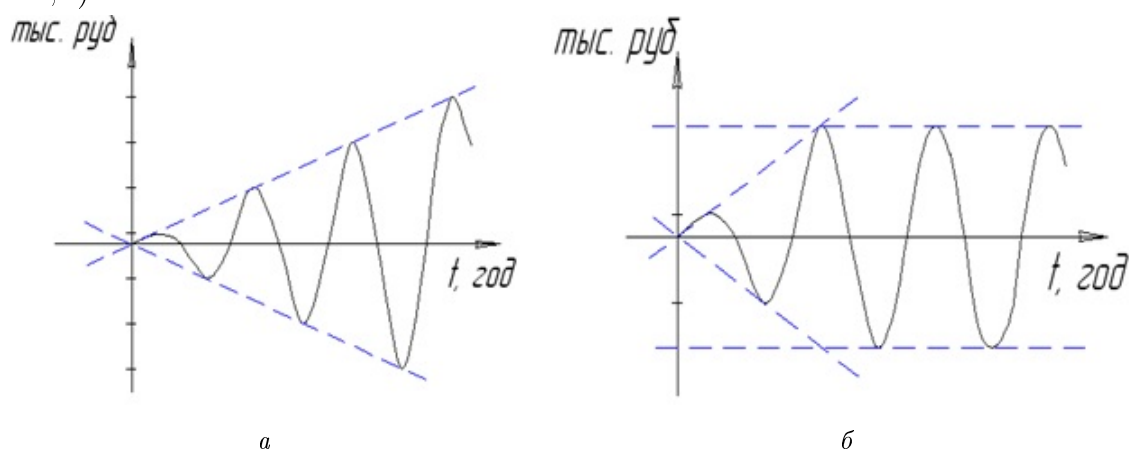


Рис. 2. Нерелевантный денежный поток: а – антициклический, б – проциклический

Для более точного определения вида денежного потока необходимо учитывать весь процесс инновационной деятельности, т. е. многоразовые притоки и оттоки денежных средств с учетом структуры инновационного процесса, вида инноваций, стадий их жизненного цикла и особенностей источников финансирования (рис. 3, а).

На стадии массового производства инновации начинают вносить определенный вклад в притоки денежных средств, следовательно, потребность во внешнем финансировании уменьшается (рис. 3, б).

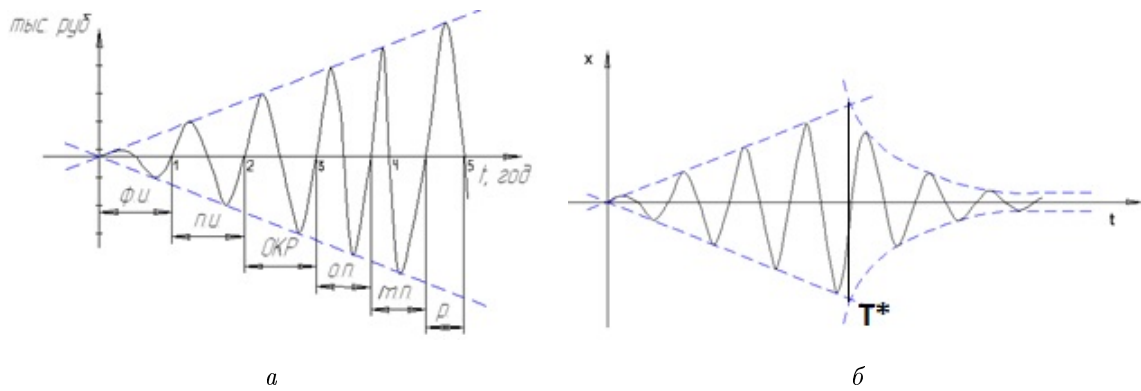


Рис. 3. Нерелевантный денежный поток с учетом жизненного цикла инновации: а – без учета первоначальной прибыли инновации (стадии жизненного цикла базисных инноваций: фундаментальные исследования (ф.и.), прикладные исследования (п.и.), опытно-конструкторские разработки (ОКР), опытное производство (о.п.), массовое производство (м.п.), реализация (р.и)), б – с учетом прибыли на стадии массового производства

При этом денежный поток до стадии массового производства, т. е. $t < T^*$, будет описываться формулой

$$\chi = \chi_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \frac{N}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (2)$$

где $N = \frac{M}{m}$ – коэффициент финансовой зависимости; M – величина заемного капитала; m – собственный капитал; n – число раз смены притока денежных средств оттоком.

Денежный поток в финансировании инновационной деятельности при $t \geq T^*$, т. е. на стадии массового производства и на стадии реализации будет описываться формулой

$$\chi = e^{ht} \chi_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

где $h = \frac{k_1}{2m}$ – показатель, характеризующий взаимовлияние факторов внешней среды и величины собственных средств на вид нерелевантного денежного потока в финансировании инновационной деятельности; $k_1 = \frac{F_{\text{сопр}}}{\nu}$ – показатель, характеризующий способность предприятия противостоять факторам внешней среды; $F_{\text{сопр}}$ – показатель, характеризующий факторы, влияющие на инновационное предприятие, численное значение которого можно определить с помощью EFAS – анализа; ν – скорость реакции предприятия на факторы внешней среды; m – собственный капитал; χ_{\max} – максимальное значение денежного потока, на первой фазе цикла, т. е. на фазе фундаментальных исследований; $\omega = \frac{2\pi n}{t}$ – частота смены притока денежных средств оттоком; t – временной период, в котором рассчитывается величина денежного потока; φ_0 – начальная фаза наблюдения, т. е. период времени, в который началось наблюдение.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бузова И. А. Коммерческая оценка инвестиций / И. А. Бузова, Г. А. Маховикова, В. В. Терехова; под ред. В. Е. Есипова. СПб. : Питер. 2003. 432 с.

2. Ендовицкий Д. А. Инвестиционный анализ в реальном секторе экономики : учеб. пособие / Д. А. Ендовицкий; под ред. Л. Т. Гиляровской. М. : Финансы и статистика. 2003. 352 с.

УДК 517.984

В. В. Корнев, А. П. Хромов

О МЕТОДЕ ФУРЬЕ В ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad (3)$$

где $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и комплекснозначная.

В данной работе показывается, что формальный ряд, построенный по методу Фурье, сходится к классическому решению $u(x, t) \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R})$, при этом не требуется сходимость рядов, получаемых почленным двукратным дифференцированием этого ряда по одной из переменных. Тем самым на функцию $\varphi(x)$ наложены минимальные требования гладкости. Кроме того, для существования классического решения функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\varphi(0) = \varphi''(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \varphi'(1). \quad (4)$$

Согласно методу Фурье уравнению (1) и краевым условиям (3) соответствует спектральная краевая задача для оператора L :

$$Ly = -y''(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'(1). \quad (5)$$

Лемма 1. *Собственными значениями оператора L являются числа*

$$\lambda_n = 4\pi^2 n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство этой леммы не представляет труда. Отметим также, что каждое ненулевое собственное значение является двукратным и для него существует присоединенная функция. Этот факт содержится в [1,

с. 148–156; 2, с. 144–147], и он создает основные трудности в исследовании задачи (1)–(3).

Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ (λ – спектральный параметр, E – единичный оператор) резольвенту оператора L и введем окружности $\gamma_n = \{\lambda | \lambda = \rho^2, |\rho - 2\pi n| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало настолько, чтобы γ_n не пересекались. Формальное решение задачи (1)–(3) в этом случае по методу Фурье есть (см., напр., [3])

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t), \quad (6)$$

где $u_n(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi)(x) \cos(\sqrt{\lambda} t) d\lambda$.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$R_\lambda f = \frac{1}{\rho(1 - \cos \rho)} \int_0^1 \cos \rho(1 - t) f(t) dt \sin \rho x + \\ + \frac{1}{\rho} \int_0^x \sin \rho(x - t) f(t) dt, \quad (7)$$

где $\rho = \sqrt{\lambda}$.

Эта формула легко следует из [4, с. 46–47].

Лемма 3. *Имеют место формулы*

$$u_0(x, t) = 2x \int_0^1 \varphi(\tau) d\tau, \\ u_n(x, t) = a_n \sin \rho_n x \cos \rho_n t + b_n x \cos \rho_n x \cos \rho_n t - \\ - b_n t \sin \rho_n x \sin \rho_n t, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $a_n = 4 \int_0^1 (1 - \tau) \varphi(\tau) \sin \rho_n \tau d\tau$, $b_n = 4 \int_0^1 \varphi(\tau) \cos \rho_n \tau d\tau$, $\rho_n = 2\pi n$.

Доказательство формул (8) получается из (7) по теории вычетов.

Лемма 4. *Для функций $u_n(x, t)$ справедливо представление*

$$u_n(x, t) = \frac{1}{2}(v_n(x + t) + v_n(x - t)),$$

где $v_0(x) = u_0(x, t)$, $v_n(x) = a_n \sin \rho_n x + b_n x \cos \rho_n x$, $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Используя формулы для умножения тригонометрических функций, из (8) имеем

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \frac{1}{2} \{ a_n (\sin \rho_n(x+t) + \sin \rho_n(x-t)) + b_n x (\cos \rho_n(x+t) + \\ &+ \cos \rho_n(x-t) - b_n t (\cos \rho_n(x-t) - \cos \rho_n(x+t)) \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ (a_n \sin \rho_n(x+t) + b_n(x+t) \cos \rho_n(x+t)) + \\ &+ (a_n \sin \rho_n(x-t) + b_n(x-t) \cos \rho_n(x-t)) \} = \\ &= \frac{1}{2} (v_n(x+t) + v_n(x-t)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \rho_n x$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \rho_n x$ и ряды, полученные из них почленным дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно при всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Интегрируя два раза по частям формулы для a_n и b_n , с учетом (4) имеем

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\rho_n^2}, \quad b_n = \frac{\alpha_n}{\rho_n^2},$$

где через α_n обозначены различные α_n , лишь бы $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. Отсюда легко получаем утверждение леммы, если воспользоваться неравенством Коши—Буняковского.

Лемма доказана.

Лемма 6. Суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \rho_n x$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \rho_n x$ дважды непрерывно дифференцируемы на всей оси.

Доказательство. Обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \rho_n x = \Phi_1(x)$, причем по лемме 5 $\Phi_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Данный ряд есть удвоенный тригонометрический ряд Фурье функции $\tilde{\varphi}_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(t) - \varphi_1(1-t))$, где $\varphi_1(t) = 2(1-t)\varphi(t)$, для которой в силу (4) выполняется условие $\tilde{\varphi}_1''(0) = \tilde{\varphi}_1''(1)$. Следовательно, $\Phi_1(x) = 2\tilde{\varphi}_1(x) \in C^2(\mathbb{R})$.

Обозначим $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \rho_n x = \Phi_2(x)$. По лемме 5 $\Phi_2(x) \in C^1(\mathbb{R})$. Рассматриваемый ряд с точностью до постоянного слагаемого есть удвоенный тригонометрический ряд Фурье функции $\tilde{\varphi}_2(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) + \varphi(1-t))$, для которой в силу (4) $\tilde{\varphi}_2''(0) = \tilde{\varphi}_2''(1)$. Следовательно, $\Phi_2(x) \in C^2(\mathbb{R})$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Формальное решение (6) дважды непрерывно дифференцируемо в $[0, 1] \times \mathbb{R}$ и справедлива формула*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(v(x + t) + v(x - t)), \quad (9)$$

где $v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$.

Утверждение леммы легко следует из лемм 4 и 6.

Теорема. *Формальное решение (6) является классическим решением задачи (1)–(3).*

Доказательство. В силу лемм 6 и 7 формальное решение $u(x, t)$ является решением уравнения (1). Легко видеть, что каждая $u_n(x, t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяет краевым условиям (3) и начальному условию $u_t(x, 0) = 0$. Поэтому, по лемме 5, функция $u(x, t)$ также удовлетворяет этим условиям. Кроме того, из (6) имеем

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_n} (R_\lambda \varphi)(x) d\lambda = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

и ряд сходится равномерно, так как краевые условия в (5) регулярны (см. [4, с. 73]) и функция $\varphi(x)$ принадлежит области определения оператора L . Следовательно, $u(x, t)$ – классическое решение.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильин В. А. О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного дифференциального оператора // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 148–156.
2. Ильин В. А. Избранные труды. М. : Макс-Пресс, 2008. 692 с.
3. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. М. : Наука, 1964. 462 с.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

О. А. Королева, А. П. Хромов

О ТЕОРЕМЕ ШТЕЙНГАУЗА

Обозначим через $S_n(f, x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе функций $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$, т. е.

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{2k\pi ix},$$

где $a_k = (f(\xi), e^{2k\pi i\xi}) = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i\xi} d\xi$.

Хорошо известна [1, с. 111] следующая теорема равносходимости Штейнгауза.

Теорема 1. *Если комплекснозначная функция $a(x)$ удовлетворяет условиям: $a(x) = a(1+x)$, $|a(x) - a(t)| \leq M|x-t|$, $x, t \in (-\infty, \infty)$, то для любой $f(x) \in L[0, 1]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-\infty < x < \infty} |a(x)S_n(f, x) - S_n(af, x)| = 0. \quad (1)$$

Мы дадим новое доказательство этой теоремы методом контурного интегрирования резольвенты $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ оператора дифференцирования $L: Ly = y'$, $y(0) = y(1)$ (λ – спектральный параметр и E – единичный оператор). Это доказательство базируется на формуле:

$$S_n(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r_n} R_\lambda f d\lambda, \quad (2)$$

где $r_n = n + \frac{1}{2}$. Точнее, мы покажем, что имеет место

Теорема 2. *Если $f(x) \in L[0, 1]$, $a(0) = a(1)$, $|a(x) - a(t)| \leq M|x-t|$, $x, t \in [0, 1]$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, 1]} |a(x)S_n(f, x) - S_n(af, x)| = 0, \quad (3)$$

где $S_n(f, x)$ определяется по формуле (2).

Легко видеть, что из теоремы 2 следует теорема 1. В самом деле, если обозначим через $\tilde{a}(x)$ периодическое с периодом 1 продолжение функции $a(x)$ из теоремы 2, то $\tilde{a}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и в силу периодичности $S_n(f, x)$ формула (3) переходит в (1).

Лемма 1. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda f = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left[\int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t) dt + \int_x^1 e^{\lambda(1+x-t)} f(t) dt \right], \quad (4)$$

где $\Delta(\lambda) = 1 - e^\lambda$.

Эта формула легко следует из формулы для резольвенты произвольного дифференциального оператора [2, с. 453]. Впрочем, справедливость (4) получается простой проверкой.

Лемма 2. *Обозначим через $\Omega_r(f, x)$ функцию*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [a(x)R_\lambda f - R_\lambda(af)] d\lambda,$$

где $x \in [0, 1]$ и $r = n + \frac{1}{2}$. Тогда имеет место оценка

$$\|\Omega_r(f, x)\|_{C[0,1]} \leq c \|f\|_1, \quad (5)$$

где $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, c не зависит от r и $f(x) \in L[0, 1]$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{a}(x)$ функцию, равную $a(x)$ при $x \in [0, 1]$ и $\tilde{a}(x) = \tilde{a}(1+x)$. Пусть $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда $|\Delta(\lambda)| \geq c|e^\lambda|$ (одним и тем же c обозначаем различные константы, встречающиеся в оценках). Имеем

$$\begin{aligned} |a(x)R_\lambda f - R_\lambda(af)| &\leq c \left[\int_0^x |e^{-\lambda(1-x+t)}| |a(x) - a(t)| |f(t)| dt + \right. \\ &+ \int_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}| |a(x) - a(t)| |f(t)| dt \left. \right] = c \left[\int_0^x |e^{-\lambda(1-x+t)}| |\tilde{a}(x) - \tilde{a}(1+t)| |f(t)| dt + \right. \\ &+ \int_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}| |\tilde{a}(x) - \tilde{a}(t)| |f(t)| dt \left. \right] \leq c \left[\int_0^x |e^{-\lambda(1-x+t)}| |1-x+t| |f(t)| dt + \right. \\ &\left. + \int_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}| |t-x| |f(t)| dt \right]. \end{aligned}$$

Пусть $\frac{3\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq 2\pi$ и \int' означает $\int_{|\lambda|=r}$ при $\frac{3\pi}{2} \leq \arg \lambda \leq 2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r}' \int_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}| |t-x| |f(t)| dt |d\lambda| &= \int_x^1 |f(t)| dt \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} e^{-(t-x)r \cos \varphi} (t-x)r d\varphi = \\ &= \int_x^1 |f(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-x)r \sin \theta} (t-x)r d\theta. \end{aligned}$$

Но $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$. Поэтому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-x)r \sin \theta} (t-x)r d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(t-x)r \frac{2}{\pi} \theta} (t-x)r d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2} r(t-x)} e^{-\frac{2}{\pi} \tau} d\tau \leq c.$$

Таким образом

$$\int_{|\lambda|=r}' \int_x^1 |e^{-\lambda(t-x)}| |t-x| |f(t)| dt |d\lambda| \leq c \int_x^1 |f(t)| dt \leq c \|f\|_1.$$

Эту же оценку, как теперь легко видеть, имеет и интеграл

$$\int_{|\lambda|=r}' \int_0^x |e^{-\lambda(1-x+t)}| |1-x+t| |f(t)| dt |d\lambda|,$$

а также подобные интегралы и при $\arg \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Тем самым имеет место оценка (5), когда $\int_{|\lambda|=r}$ заменяется

на $\int_{|\lambda|=r, \operatorname{Re} \lambda \geq 0}$. Случай $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ рассматривается аналогично.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(x) = e^{2k\pi ix}$. Тогда $S_n(f, x) = f(x)$ при $n \geq k$ и $S_n(f, x) = 0$ при $n < k$. Тогда при $r > k$ $\Omega_r(f, x) = a(x)f(x) - S_n(af, x)$. Но $a(x)f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе $\{e^{2n\pi ix}\}$. Поэтому формула (3) имеет место для таких функций $f(x)$. Пусть $f_0(x)$ какая-нибудь линейная комбинация из системы $\{e^{2n\pi ix}\}$. Тогда по лемме (2)

$$\|\Omega_r(f, x)\| \leq \|\Omega_r(f - f_0, x)\| + \|\Omega_r(f_0, x)\| \leq c \|f - f_0\|_1 + \|\Omega_r(f_0, x)\|, \quad (6)$$

где $\|\cdot\|$ есть $\|\cdot\|_{C[0,1]}$. Так как множество $\{f_0\}$ всюду плотно в $L[0, 1]$, то из (6) получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барн Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Физматгиз, 1961.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ОБ ОДНОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ФАКТОРАМИ

Иерархические игры – это модели конфликтных ситуаций с неравноправными участниками [1]. Исследование таких игр проводилось, в частности, в работах [2–7]. В настоящей работе предполагается, что функция выигрыша обоих игроков зависят от случайного фактора, находится наибольший гарантированный результат первого игрока и его оптимальная стратегия при данном предположении. Случай зависимости от случайного фактора только функции выигрыша второго игрока исследовался в [5], похожая постановка задачи для частного случая двух неопределенных факторов и квадратичных функций выигрыша игроков рассматривалась в [6].

Рассмотрим систему $\Gamma = (X, Y, I, F, G)$, где X – множество стратегий первого игрока, Y – множество стратегий второго игрока, $I = \{1, \dots, i, \dots, n\}$ – множество неопределенных факторов, $F : X \times Y \times I \rightarrow R$ – функция выигрыша первого игрока, $G : X \times Y \times I \rightarrow R$ – функция выигрыша второго игрока. Кроме того, на множестве I задано распределение вероятностей, т. е. набор чисел $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$, удовлетворяющий условиям $p_i \geq 0, i = 1 \dots n, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Здесь $p_i, i = 1 \dots n$ – вероятность того, что неопределенный фактор примет значение i . Будем считать, что множества X и Y конечны.

Рассмотрим следующее информационное расширение данной игры. Пусть $\tilde{\Gamma} = (\Phi_1, \Psi_2 \times Y, I, \tilde{F}, \tilde{G})$, где $\Phi_1 = \{\varphi_1\}, \varphi_1 : Y \rightarrow 2^X, \Psi_2 = \{\psi_2\}, \psi_2 : 2^X \rightarrow X$, причем при всех $T \subset X$ выполняется условие $\psi_2(T) \in T$, функции \tilde{F} и \tilde{G} задаются соотношениями

$$\tilde{F}(\varphi_1, (\psi_2, y), i) = F(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i),$$

$$\tilde{G}(\varphi_1, (\psi_2, y), i) = G(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i).$$

Здесь первый игрок передает второму право выбора x в определенных пределах. Оптимальность такого расширения показана в [7].

Для наибольшего гарантированного результата первого игрока при такой постановке задачи справедливо равенство

$$\gamma(\tilde{\Gamma}) = \max_{\varphi_1 \in \Phi_1} \sum_{i=1}^n p_i \min_{(\psi_2, y) \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i),$$

где

$$M_i(\varphi_1) = \{(\psi'_2, y') : G(\psi'_2(\varphi_1(y')), y', i) = \max_{(\psi_2, y)} G(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i),$$

$$i = 1 \dots n.$$

Далее данная вариационная задача с ограничениями сводится к экстремальной задаче на исходных множествах, также находится оптимальная стратегия первого игрока.

Теорема. Справедливо равенство $\gamma(\tilde{\Gamma}) = \gamma_0$, где

$$\gamma_0 = \max_{((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0} \sum_{i=1}^n p_i F(x_i, y_i, i),$$

$$T_0 = \{((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) : \forall i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, n;$$

$$(x_j, y_j) \stackrel{i}{\leq} (x_i, y_i); \forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad (x, y) \stackrel{i}{\leq} (x_i, y_i)\}, \quad (1)$$

$$(x', y') \stackrel{i}{\leq} (x'', y'') \leftrightarrow G(x', y', i) < G(x'', y'', i)$$

или

$$G(x', y', i) = G(x'', y'', i), F(x', y', i) \geq F(x'', y'', i).$$

Доказательство. Возьмем $\varphi_1 \in \Phi_1$ и точки (x_i, y_i) , $i = 1 \dots n$, удовлетворяющие условиям

$$G(x_i, y_i, i) = \max_{(\psi_2, y)} G(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i),$$

$$F(x_i, y_i, i) = \min_{(\psi_2, y) \in M_i(\varphi_1)} F(\psi_2(\varphi_1(y)), y, i), i = 1, \dots, n$$

Очевидно, что $((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0$, откуда вытекает выполнение неравенства $\gamma(\tilde{\Gamma}) \leq \gamma_0$.

Докажем противоположное неравенство. Выберем вектор $((x_1^0, y_1^0), \dots, (x_i^0, y_i^0), \dots, (x_n^0, y_n^0)) \in T_0$, максимизирующий на множестве T_0 функцию $\sum_{i=1}^n p_i F(x_i, y_i, i)$, и зададим отображение $\varphi_1^0 : Y \rightarrow 2^X$ равенством

$$\varphi_1^0(y) = \begin{cases} x_i^0, & \text{если } y = y_i^0, \\ \varphi_1^-(y), & \text{если } y \neq y_i^0, \end{cases} \quad (2)$$

где для функции φ_1^- выполнено соотношение

$$(\varphi_1^-(y), y) \stackrel{i}{\leq} (x_i^0, y_i^0), \forall y \in Y, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Существование такой функции следует из определения множества T_0 . Условия (1)–(3) обеспечивают справедливость при всех $((x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)) \in T_0$ неравенства

$$\sum_{i=1}^n p_i F(\psi_2(\varphi_1^0(y)), y, i) \geq \sum_{i=1}^n p_i F(x_i, y_i, i)$$

откуда вытекает неравенство $\gamma(\tilde{\Gamma}) \geq \gamma_0$, причем очевидно, что стратегия φ_1^0 является оптимальной.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гермейер Ю. Б.* Игры с противоположными интересами. М. : Наука, 1976.
2. *Кукушкин Н. С., Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1977
3. *Конonenко А. Ф.* Роль информации о функции цели противника в играх двух лиц с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1973. Т. 13, № 2. С. 311–317.
4. *Родюков А. В., Тараканов А. Ф.* О решении иерархической игры при неопределенности с суммарным риском игроков // Известия РАН. Теория и системы уравнений. 2007. № 5. С. 11–17.
5. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры со случайными факторами // Математика. Механика. : сб. научн. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 77–79.
6. *Кузнецова И. А.* Иерархические игры с квадратичными функциями выигрыша // Математика. Механика. : сб. научн. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 42–45.
7. *Шолпо И. А.* Исследование операций. Теория игр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983.

МИНИМАЛЬНОСТЬ АФФИННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША

Аффинные системы функций типа Уолша введены в статье [1]. Пусть $L_0^2 = L_0^2(0, 1)$ – пространство всех вещественно- или комплекснозначных периодических функций $f \in L^2(0, 1)$ с нулевым интегральным средним на периоде:

$$f(t+1) = f(t), \quad \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Рассмотрим в пространстве L_0^2 линейные операторы W_0 и W_1 , заданные равенствами

$$W_0 f(t) = f(2t), \quad W_1 f(t) = f(2t)w(t),$$

где $w(t) = 1$, $0 \leq t < \frac{1}{2}$, и $w(t) = -1$, $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

Пусть \mathbb{A} – множество всех конечных наборов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$, $k = 0, 1, \dots$, состоящих из нулей и единиц: $\alpha_\nu = 0$ или 1 , $0 \leq \nu \leq k-1$, включая при $k = 0$ пустой набор. Пусть, далее, $|\alpha| = k$ – длина набора $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\alpha\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{l-1})$ – конкатенация наборов $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{l-1})$.

Укажем на естественную биекцию между множествами \mathbb{A} и \mathbb{N} , при котором набору $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ соответствует натуральное число $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Мы будем пользоваться таким соответствием для замены индекса $x_\alpha = x(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ положим

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}}$$

– произведение операторов (первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним – W_{α_0} ; при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Пусть, далее, $r_k(t) = w(2^k t)$, $k = 0, 1, \dots$, – система Радемахера.

Для любой функции $f \in L_0^2$ будем иметь

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &:= W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = \\ &= f(2^k t) w^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1} t) \dots w^{\alpha_0}(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t). \end{aligned}$$

В частности, для функции $f = w$ семейство $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (без постоянной функции, тождественно равной единице) в нумерации Пэли:

$$w_\alpha(t) = r_k(t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t) = w_n(t), \quad n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k.$$

Определение 1. Семейство функций $\{W^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ назовем *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f \in L_0^2$.

Для аффинной системы функций типа Уолша будем использовать обозначения $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ или $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с учетом соответствующей замены индекса.

Рассмотрим вопрос о существовании биортогонально сопряженной системы $\{f_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ к аффинной системе типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, т.е. такой системы функций, что

$$(f_i, f_j^*) = \int_0^1 f_i(t) f_j^*(t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Разложим порождающую функцию $f \in L_0^2$ аффинной системы в ряд Фурье—Уолша

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w_n.$$

Предположим, что функция f нормирована условием $x_1 = (f, w) = 1$. По числовой последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ построим новую числовую последовательность $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ следующим образом. Пусть $y_1 = 1$ и все $\alpha \in \mathbb{A}$, $|\alpha| = k \geq 1$, определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} x_\beta y_\gamma = \sum_{\nu=0}^k x(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_\nu, \dots, \alpha_{k-1}) = 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Семейство функций

$$f_n^* = f_\alpha^* = \sum_{\alpha=\beta\gamma} y_\gamma w_\beta = \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_\nu, \dots, \alpha_{k-1}) w(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) \quad (2)$$

является биортогонально сопряженной системой к аффинной системе функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $|\alpha| = k$, $|\beta| = l$. Вычислим

$$(f_\alpha^*, f_\beta) = \sum_{\nu=0}^k y(\alpha_\nu, \dots, \alpha_{k-1}) (w(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}), f(\beta_0, \dots, \beta_{l-1})).$$

По аналогии с [2, лемма 1] имеем

$$(w(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}), f(\beta_0, \dots, \beta_{l-1})) = \begin{cases} (w_\gamma, f), & \text{если } (\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) = \beta\gamma, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Уравнение $(\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-1}) = \beta\gamma$ разрешимо относительно γ лишь в том случае, если $l \leq \nu$ и $\alpha_0 = \beta_0, \dots, \alpha_{l-1} = \beta_{l-1}$. При этом $|\gamma| = \nu - l$ и $\alpha_l = \gamma_0, \dots, \alpha_{\nu-1} = \gamma_{\nu-l-1}$. Таким образом, устраняя заведомо равные нулю слагаемые, окончательно находим

$$\begin{aligned} (f_\alpha^*, f_\beta) &= \sum_{\nu=l}^k y(\alpha_\nu, \dots, \alpha_{k-1}) (w(\alpha_l, \dots, \alpha_{\nu-1}), f) = \\ &= \sum_{\nu=l}^k x(\alpha_l, \dots, \alpha_{\nu-1}) y(\alpha_\nu, \dots, \alpha_{k-1}). \end{aligned}$$

Применяя рекуррентные соотношения (1) с заменой $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ на $(\alpha_l, \dots, \alpha_{k-1})$, получаем, что $(f_\alpha^*, f_\beta) = 0$ при $k \neq l$. Если же $k = l$, то (f_α^*, f_β) отлично от нуля в том и только в том случае, когда $\alpha = \beta$, при этом $(f_\alpha^*, f_\beta) = x_1 y_1 = 1$.

Представление (2) показывает, что функции f_n^* биортогонально сопряженной системы суть полиномы порядка n по системе Уолша.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-1354.2013.1) и гранта РФФИ (проект № 13-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Терехин П. А. Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4. ч. 2.
2. Терехин П. А. О сходимости биортогональных рядов по системе сжатий и сдвигов функций в пространстве $L^p[0, 1]$ // Математические заметки. 2008. Т. 83, вып. 5. С. 722-740.

УДК 519.713.2, 512.534

В. А. Молчанов

ОБ ОПРЕДЕЛИМОСТИ КАНОНИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТОВ

В настоящей работе продолжают исследования автоматов, у которых множества состояний и выходных сигналов наделены дополнительной алгебраической структурой плоскости.

Следуя [1], под автоматом понимается алгебра $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ с тремя основными множествами X_1, X_2, S и тремя бинарными операциями: $\cdot : S \times S \rightarrow S$, $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$, $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$, которые при любых значениях $x \in X_1$, $a, b, c \in S$ удовлетворяют условиям: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\delta(x, a \cdot b) = \delta(\delta(x, a), b)$, $\lambda(x, a \cdot b) = \lambda(\delta(x, a), b)$. При этом X_1 называется *множеством состояний автомата*, X_2 – *множеством выходных сигналов*, S – *полугруппой входных сигналов с операцией умножения \cdot* , δ – *функцией переходов* и λ – *выходной функцией автомата*. Для каждого входного сигнала $a \in S$ автомат \mathbf{A} определяет функцию переходов $\delta_a : X_1 \rightarrow X_1$ и выходную функцию $\lambda_a : X_1 \rightarrow X_2$ по формулам: $\delta_a(x) = \delta(x, a)$ и $\lambda_a(x) = \lambda(x, a)$, где $x \in X_1$. Входной сигнал $a \in S$ автомата $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ называется *автономным*, если его действие не зависит от состояний этого автомата, т. е. найдутся такое состояние автомата a_1 и такой выходной сигнал автомата a_2 , что $\delta(x, a) = a_1$, $\lambda(x, a) = a_2$ для всех состояний автомата $x \in X_1$.

Следуя [2], под *плоскостью* в работе понимается алгебраическая система вида $\Pi = (X, L)$, где X – непустое множество точек и L – семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам: (A_1) через любые две точки проходит одна и только одна прямая; (A_2) каждая прямая содержит по крайней мере три точки; (A_3) в множестве X есть три точки, не лежащие на одной прямой. В частности, плоскость Π является проективной, если любые две ее прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует такая единственная прямая l' , что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

По определению [1] планарные автоматы являются структуризованными автоматами $\mathbf{A} = (X_1, X_2, S, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X_1 и множеством выходных сигналов X_2 , наделенными структурами плоскостей $\Pi_1 = (X_1, L_1)$ и $\Pi_2 = (X_2, L_2)$, полугруппой входных сигналов S , функцией переходов $\delta : X_1 \times S \rightarrow X_1$ и выходной функцией $\lambda : X_1 \times S \rightarrow X_2$, для которых при каждом фиксированном $a \in S$ преобразование $\delta_a : X_1 \rightarrow X_1$ является эндоморфизмом плоскости Π_1 и отображение $\lambda_a : X_1 \rightarrow X_2$ является гомоморфизмом плоскости Π_1 в плоскость Π_2 . Такие автоматы обозначаются символом $\mathbf{A} = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$.

Главное внимание в наших исследованиях уделяется так называемым универсальным планарным автоматам, подавтоматами которых охватывают все гомоморфные образы рассматриваемых планарных автоматов. Такой универсальный автомат для любых плоскостей Π_1, Π_2 определяется как автомат $\text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2) = (\Pi_1, \Pi_2, S, \delta, \lambda)$ с полугруппой входных сигналов S , состоящей из всех пар $s = (\varphi, \psi)$ эндоморфизмов φ плос-

кости Π_1 и гомоморфизмов ψ плоскости Π_1 в плоскость Π_2 , функцией переходов $\delta(x, s) = \varphi(x)$ и выходной функцией $\lambda(x, s) = \psi(x)$ (здесь $x \in X_1, s = (\varphi, \psi) \in S$).

Основной результат работы [3] показывает, что универсальные планарные автоматы полностью определяются (с точностью до изоморфизма) своими полугруппами входных сигналов. В работе [4] показано, что любой универсальный планарный автомат изоморфен многосортной алгебраической системе, канонически построенной из автономных входных сигналов исходного автомата. Эти исследования показывают, что главным инструментом изучения универсального планарного автомата $\mathbf{A} = \text{Atm}(\Pi_1, \Pi_2)$ являются следующие канонические отношения этого автомата:

- 1) множество C всех автономных входных сигналов автомата \mathbf{A} ;
- 2) бинарное отношение ε_1 , которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов, действия которых одинаково преобразуют состояния автомата \mathbf{A} , т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_1 \iff \delta(x, a) = \delta(x, b)$ для всех $x \in X_1$;
- 3) бинарное отношение ε_2 , которое состоит из таких упорядоченных пар (a, b) автономных входных сигналов, при действии которых автоматом \mathbf{A} выдаются одинаковые выходные сигналы, т.е. по определению $(a, b) \in \varepsilon_2 \iff \lambda(x, a) = \lambda(x, b)$ для всех $x \in X_1$;
- 4) бинарное отношение η , которое состоит из таких упорядоченных пар (α, β) элементов $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ с автономными входными сигналами $a, b, c, d \in C$, при действии которых любые состояния автомата \mathbf{A} отображаются в коллинеарные точки a_i, b_i, c_i, d_i соответствующих плоскостей Π_i (для каждого $i = 1, 2$), т.е. по определению $(\alpha, \beta) \in \eta \iff$ точки a_i, b_i, c_i, d_i коллинеарны в Π_i ($i = 1, 2$).

В настоящей работе доказывается, что все канонические отношения универсального планарного автомата определяются формулами элементарной теории полугрупп.

Теорема 1. *Для универсального планарного автомата \mathbf{A} справедливы следующие утверждения:*

- 1) каноническое множество C автомата \mathbf{A} определяется формулой

$$RZ(x) = (\forall y)(yx = x);$$

2) каноническое отношение ε_1 автомата \mathbf{A} определяется формулой

$$E_1(x, y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \wedge xz = yz),$$

где $LI(x) = (\forall y)(xy = y)$.

Рассмотрим следующую формулу элементарной теории полугрупп:

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3) = & \bigwedge_{i=1}^3 RZ(x_i) \wedge (\forall y_1, y_2, y_3) \left(\bigwedge_{i=1}^3 RZ(y_i) \wedge \right. \\ & \left. \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^3 \neg E_1(y_i, y_j) \implies (\exists z) \left(\bigwedge_{i=1}^3 y_i z = x_i \right) \right). \end{aligned}$$

Теорема 2. Каноническое отношение ε_2 универсального планарного автомата \mathbf{A} определяется формулой

$$E_2(x, y) = RZ(x) \wedge RZ(y) \wedge (\forall z)(LI(z) \implies R(x, y, xz) \wedge R(x, y, yz)).$$

Теорема 3. Каноническое отношение η универсального планарного автомата \mathbf{A} определяется формулой

$$N(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bigwedge_{i=1}^4 RZ(x_i) \wedge \bigwedge_{i,j,k=1}^4 R(x_i, x_j, x_k).$$

Полученные результаты позволяют доказать относительно элементарную определимость рассматриваемых универсальных планарных автоматов в классе полугрупп и проанализировать взаимосвязь важных свойств элементарных теорий классов планарных автоматов и элементарных теорий классов полугрупп, таких как проблема элементарной определимости универсальных планарных автоматов их полугруппами входных сигналов, проблема алгоритмической разрешимости элементарных теорий классов универсальных планарных автоматов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. М. : Высш. шк., 1994. 191 с.
2. Картези Ф. Введение в конечные геометрии. М. : Наука, 1980. 320 с.
3. Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. 2011. Vol. 82. С. 1–9.
4. Молчанов В. А. Представление универсальных планарных автоматов входными сигналами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 31–37.

ОДНОЗНАЧНЫЙ КОНТЕКСТ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ АТТРИБУТОВ

В работе исследуется взаимосвязь между элементами решётки концептов $L(\mathbb{K})$ однозначного контекста \mathbb{K} и упорядоченными множествами его атрибутов. В частности показано, что порядок концептов, индуцированный порядком однотипных атрибутов, реализуется на некоторой антицепи решётки $L(\mathbb{K})$.

Пусть задан формальный контекст $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$, где G – конечное множество объектов $|G| \geq 2$, (M_i) – семейство конечных множеств атрибутов с множеством индексов $1 \leq i \leq n$, $|M_i| \geq 2$, ρ – некоторое $(n + 1)$ -арное отношение. Если $(g, m_1, m_2, \dots, m_n) \in \rho$, то говорим, что объект g по атрибуту 1 имеет значение m_1 , по атрибуту 2 – значение m_2 , по системе атрибутов $(1, 2)$ – значение (m_1, m_2) , и т.д. Если любой объект по каждому атрибуту имеет точно одно значение, то такой контекст называем *однозначным*.

Множество $X \subset G$ объектов, которые имеют по системе атрибутов $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$ общий набор значений $m_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k}$, так что любой объект $g \in G$ с этим же набором значений по той же системе атрибутов принадлежит X , является *концептом по \bar{j}_k* в однозначном контексте \mathbb{K} .

Для любого $m_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k}$ множество $\widehat{\rho}_0(m_{\bar{j}_k}) \subset G$ является некоторым концептом по \bar{j}_k . В [1] указан следующий результат.

Теорема 1. *Если $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ однозначный контекст, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество концептов по \bar{j}_k , $\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$, образует разбиение множества G , которое в дальнейшем обозначаем G/\bar{j}_k .*
2. *Если $\bar{j}_q \subseteq \bar{j}_p \subseteq \bar{n}$, то G/\bar{j}_p является подразбиением разбиения G/\bar{j}_q .*

Поскольку множество $G/\bar{j}_k = \{\widehat{\rho}_0(m_{\bar{j}_k}) | m_{\bar{j}_k} \in M_{\bar{j}_k}\}$ представляет собой разбиение множества G , то в решётке $L(\mathbb{K})$ оно является некоторой антицепью. Из второго утверждения теоремы 1 следует, что множество концептов $G/\bar{n} = \{\widehat{\rho}_0(m_{\bar{n}}) | m_{\bar{n}} \in M_{\bar{n}}\}$ является самым малым разбиением множества G , следовательно, в решётке $L(\mathbb{K})$ множество G/\bar{n} является антицепью, состоящей из атомов этой решётки.

Пусть дополнительно каждый атрибут M_i является линейно упорядоченным множеством с порядком \leq_i . Тогда любое $M_{\bar{j}_k}$ ($\bar{j}_k \subseteq \bar{n}$) является

упорядоченным множеством с порядком $\leq_{\bar{j}_k}$, для которого:

$$a_{\bar{j}_k} = (a_{j_1}, \dots, a_{j_k}) \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k} = (b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \Leftrightarrow a_{j_1} \leq_{j_1} b_{j_1} \wedge \dots \wedge a_{j_k} \leq_{j_k} b_{j_k}.$$

Ясно, что порядок $\leq_{\bar{j}_k}$ в общем случае не является линейным. Этот порядок естественным образом индуцирует изоморфный порядок на множестве концептов G/\bar{j}_k :

$$\widehat{\rho}_0(a_{\bar{j}_k}) \leq_{\bar{j}_k} \widehat{\rho}_0(b_{\bar{j}_k}) \Leftrightarrow a_{\bar{j}_k} \leq_{\bar{j}_k} b_{\bar{j}_k}.$$

Теорема 2. Пусть $\mathbb{K} = (G, (M_i), \rho)$ – однозначный контекст с упорядоченными множествами атрибутов; X – некоторый концепт по \bar{j}_k ; $L^\Delta(X)$ – множество концептов, покрываемых концептом X ; $L^\nabla(X)$ – множество концептов, покрывающих концепт X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\widehat{\rho}_0(a_{\bar{j}_k}) \leq_{\bar{j}_k} \widehat{\rho}_0(b_{\bar{j}_k})$, то $\widehat{\rho}_0(a_{\bar{i}_s}) \leq_{\bar{i}_s} \widehat{\rho}_0(b_{\bar{i}_s})$ для любого $\bar{i}_s \subseteq \bar{j}_k$.
2. Если множество концептов $L^\Delta(X)$ имеет наибольший или наименьший элемент по отношению $\leq_{\bar{n}}$, то этот элемент является атомом решётки $L(\mathbb{K})$.
3. Если множество концептов $L^\nabla(X)$ имеет наибольший или наименьший элемент по отношению $\leq_{\bar{i}_s}$ для некоторого $\bar{i}_s \subseteq \bar{j}_k$, то этот элемент является концептом по \bar{i}_s .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков В. Е. Решётка концептов в однозначном контексте // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2010. Вып. 12. С. 53–56.

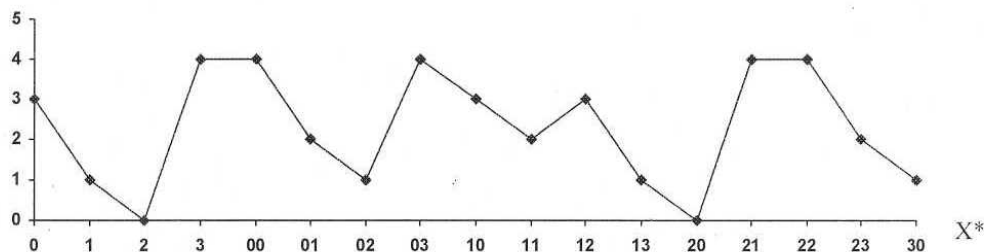
УДК 519.95

С. И. Поликарпов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНЕЧНОГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АВТОМАТА РЯДОМ ФУРЬЕ

Распространенные способы задания автоматов (таблицы, матрицы, системы канонических логических уравнений) основываются на рекурсии: последовательно определяются такты функционирования автомата и указываются правила рекурсивного совмещения тактов в процессе функционирования. Указанными способами задания автоматов явно выделяются только начальные фрагменты возможных вариантов функционирования. Для того чтобы заменить рекурсивное задание законов

функционирования автомата явным определением функций переходов и выходов на всей оси абстрактного времени, в работах В. А. Твердохлебова предложено и развито представление автоматов геометрическими образами в специальных словарных геометриях (см., например, [1]). На содержательном уровне геометрический образ автомата совпадает с ломаной линией. В данной работе рассматривается задача о представлении геометрического образа конечного детерминированного автомата рядом Фурье [2]. Разработаны алгоритм построения ряда Фурье по заданному закону функционирования автомата и алгоритм восстановления по заданному ряду Фурье закона функционирования автомата. На конкретном примере показывается связь ряда Фурье и автомата. Взятый в примере периодический (с периодом, равным 10) геометрический образ γ_{s_0} автомата A изображен на рисунке.



Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где $S = \{s_1, \dots, s_5\}$, $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, – конечный детерминированный автомат. Присвоим первым десяти словам на оси X^* следующие номера: $0, 1, 2, \dots, 9$. Ломаной γ_{s_0} , являющейся геометрическим образом автомата A в целочисленной геометрии Γ_1 , сопоставим конечный ряд Фурье $F(x)$ [3], построенный разложением по следующей системе из 10 базисных функций:

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{5}, \sin \frac{\pi x}{5}, \cos \frac{2\pi x}{5}, \sin \frac{2\pi x}{5}, \cos \frac{3\pi x}{5}, \sin \frac{3\pi x}{5}, \cos \frac{4\pi x}{5}, \sin \frac{4\pi x}{5}, \cos \pi x \right\}. \quad (1)$$

Система базисных функций (1) ортогональна на множестве точек $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, из соотношений ортогональности следует, что ряд Фурье, соответствующий ломаной γ_{s_0} , имеет вид

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^4 \left(a_i \cos \frac{i\pi x}{5} + b_i \sin \frac{i\pi x}{5} \right) + \frac{a_5}{2} \cos \pi x, \quad (2)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{5} \sum_{x=0}^9 \gamma_{s_0}(x),$$

$$a_i = \frac{1}{5} \sum_{x=0}^9 \gamma_{s_0}(x) \cos \frac{i\pi x}{5}, \quad i = 1, 2, \dots, 5, \quad (3)$$

$$b_i = \frac{1}{5} \sum_{x=0}^9 \gamma_{s_0}(x) \sin \frac{i\pi x}{5}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

В точках $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ сумма ряда (2) в точности равна значениям ломаной γ_{s_0} .

В соответствии с предлагаемыми принципами интерпретации и совмещения структуры ряда Фурье со структурой автомата каждую базисную функцию из системы (1), входящую в ряд (2), можно рассматривать как геометрический образ некоторого конечного детерминированного автомата. Для этого предварительно заметим, что все функции системы (1) на множестве точек $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ принимают лишь 11 разных вещественных значений от -1 до 1. Занумеруем эти значения на оси координат согласно табл. 1:

Таблица 1

Значение	-1	-0,95106	-0,80902	-0,58779	-0,30902	0
Номер в Γ_1	0	1	2	3	4	5
Значение	0,30902	0,58779	0,80902	0,95106	1	-
Номер в Γ_1	6	7	8	9	10	-

Каждая базисная функция системы (1) является 10-периодической, определим значение этих функций в Γ_1 на первых 10 точках оси абсцисс.

Для каждой новой целочисленной функции $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, 10$, получим 10 точек геометрии Γ_1 . По ним строятся геометрические образы, соответствующие каждой из базисных функций. А по этим геометрическим образам однозначно восстанавливаются автоматы A_1, \dots, A_{10} . Например, автомат A_2 , соответствующий функции $\cos \frac{\pi x}{5}$, задается табл. 2:

Таблица 2

$\delta \backslash \lambda$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
0	s_2 10	s_1 2	s_5 6	s_4 6	s_3 2
1	s_3 8	s_2 0	s_1 8	s_5 4	s_4 4
2	s_4 6	s_3 2	s_2 10	s_1 2	s_5 6
3	s_5 4	s_4 4	s_3 8	s_2 0	s_1 8

Пусть изначальному автомату (A, s_0) соответствует геометрический образ γ_{s_0} . Как было показано, геометрический образ γ_{s_0} представим рядом Фурье (2). Если функциям системы (1) сопоставить набор автоматов A_1, \dots, A_{10} , то функции выходов этих автоматов определяются формулами

$$\lambda_i(s_{i0}, x) = y_i(x), \quad x \in \{0, 1, \dots, 9\}, \quad i = \overline{1, 10}.$$

Функции переходов автоматов указаны в соответствующих таблицах. Таким образом, базисные автоматы A_1, \dots, A_{10} получены разложением в ряд Фурье геометрического образа γ_{s_0} и выделением в ряде Фурье соответствующих автоматам компонент.

Композиция автоматов A_1, \dots, A_{10} , где элемент Ω задается равенством

$$\lambda_{\Omega}(s_{\Omega 0}, x) = \frac{a_0}{2}\{y_1\} + a_1\{y_2\} + b_1\{y_3\} + a_2\{y_4\} + \dots + b_4\{y_9\} + \frac{a_5}{2}\{y_{10}\},$$

($\{y_i\}$ означает вещественное значение, соответствующее номеру y_i), задает исходный автомат A .

На основе разработанных связей конечного детерминированного автомата, его геометрического образа и соответствующего ряда Фурье для решения задач анализа, синтеза, управления и диагностирования автоматов может быть использована теория рядов Фурье. Для этого предполагается устанавливать соответствие между свойствами автомата и свойствами ряда Фурье. Таким образом свойства исходного автомата на основе разложения его геометрического образа в ряд Фурье переносятся на свойства базовых автоматов A_1, \dots, A_{10} и наоборот.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Твердохлебов В. А.* Основные свойства геометрических образов автоматов // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов, 2004.
2. *Поликарпов С. И.* Представление автомата рядом Фурье в задачах диагностирования и управления // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 64–66.
3. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М. : Наука, 1972.

**ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ
ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

В данной статье решена задача восстановления значений оператора дифференцирования \mathcal{P}_k на некотором классе Q функций нескольких переменных. Найдена величина погрешности восстановления.

Пусть $C = C(\mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных ограниченных на \mathbb{R}^m функций с нормой $\|u\|_C = \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}^m\}$; $L_2 = L_2(\mathbb{R}^m)$ – пространство измеримых на \mathbb{R}^m функций с нормой $\|u\|_{L_2} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$; $p_k(t) = \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha t_1^{\alpha_1} \dots t_m^{\alpha_m}$ – однородный полином, порождающий оператор дифференцирования k -го порядка $\mathcal{P}_k u = \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_m} C_\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$, C_α – коэффициенты, действующий из L_2 в Y ; \mathfrak{M} – множество \mathfrak{D} всех операторов из L_2 в Y либо множество \mathfrak{L} всех линейных операторов из L_2 в Y ; $\mathfrak{L}(N)$ – множество линейных операторов S из L_2 в Y таких, что $\|S\|_{L_2 \rightarrow Y} \leq N$; $U_2 = \{u : u \in L_2, \Delta^n u \in L_2\}$, где $\Delta^n u$ – n -итерированный оператор Лапласа функции u , понимаемый по Соболеву; $Q = \{u : u \in U_2, \|\Delta^n u\|_2 \leq 1\}$; $\rho_\delta(S) = \sup\{\|\mathcal{P}_k u - S(x, v)\|_Y : u \in Q, v \in L_2, \|u - v\|_2 \leq \delta\}$, $\delta > 0$, $S \in \mathfrak{L}$; $\nu_\delta(\mathfrak{M}) = \inf\{\rho_\delta(S) : S \in \mathfrak{M}\}$ – величина наилучшего восстановления оператора \mathcal{P}_k на элементах класса Q ; т. е. $\nu_\delta(\mathfrak{M}) = \inf_{S \in \mathfrak{M}} \sup_{u \in Q, v \in L_2, \|u - v\|_2 \leq \delta} \|\mathcal{P}_k u - Sv\|_Y$ для $Y = C(\mathbb{R}^m)$ и $Y = L_2(\mathbb{R}^m)$, $m \geq 1$. $E(N) = \inf\{\rho_0(S) : S \in \mathfrak{L}(N)\}$ – величина наилучшего приближения на классе Q оператора дифференцирования множеством $\mathfrak{L}(N)$; $\varepsilon(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta : N \geq 0\}$; $\omega(\delta) = \sup\{\|\mathcal{P}_k u\|_Y : u \in Q, \|u\|_2 \leq \delta\}$.

1. Пусть $Y = C$.

Для любых целых $\alpha_i \geq 0$, натуральных m и n при выполнении условий $0 \leq k < 2n$, $m < 2(2n - k)$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = k$ и любых $u \in U_2$ в [1] методами, аналогичными методам [2] и [3], найдена величина

$$\omega(\delta) = \left(\frac{4na}{4n - 2k - m}\right)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \left(\frac{4nb}{2k+m}\right)^{\frac{2k+m}{4n}} \delta^{\frac{4n-2k-m}{4n}}, \quad (1)$$

где a и b известные числа, $\delta > 0$, с помощью которой на множестве Q решена задача наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами, а именно, вычислена величина

$$E(N) = bh^{2n-k-\frac{m}{2}}, \quad (2)$$

где $h > 0$ при $N = h^{-k-\frac{m}{2}}a$.

Доказано, что оператор

$$(S_h u)(x) = \frac{i^k}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\sum_{|\alpha|=k} (C_\alpha t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m})}{1 + (h|t|)^{4n}} \hat{u}(t) e^{ixt} dt \quad (3)$$

является оператором наилучшего приближения.

Оценки (1), (2) позволяют решить задачу восстановления значений оператора дифференцирования на классе Q и найти величину погрешности восстановления $\nu_\delta(\mathfrak{M})$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\alpha_i \geq 0, n, m \in \mathbb{N}; 0 \leq k < 2n, k = \sum_{i=1}^m \alpha_i, k < 2n - \frac{m}{2}$. При любом $\delta > 0$ справедливы равенства

$$\nu_\delta(\mathfrak{D}) = \nu_\delta(\mathfrak{L}) = \left(\frac{4na}{4n-2k-m} \right)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \left(\frac{4nb}{2k+m} \right)^{\frac{2k+m}{4n}} \delta^{\frac{4n-2k-m}{4n}}. \quad (4)$$

Оператор (3) при $h = \left(\frac{(2k+m)a\delta}{(4n-2k-m)b} \right)^{\frac{1}{2n}}$ является экстремальным в задаче восстановления значений оператора дифференцирования для $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$.

Доказательство. Известно [4], что верны следующие неравенства: $\omega(\delta) \leq \nu_\delta(\mathfrak{D}) \leq \nu_\delta(\mathfrak{L}) \leq \varepsilon(\delta)$. Оценка (2) влечёт следующую оценку: $\varepsilon(\delta) = \left(\frac{4na}{4n-2k-m} \right)^{\frac{4n-2k-m}{4n}} \left(\frac{4nb}{2k+m} \right)^{\frac{2k+m}{4n}} \delta^{\frac{4n-2k-m}{4n}}$, а значит, оценку (4). Докажем оптимальность оператора восстановления (3). Из определения величин $\nu_\delta(\mathfrak{M})$ имеем $\nu_\delta(\mathfrak{L}) = \nu_\delta(\mathfrak{D}) \leq \rho_\delta(S_h) \leq \rho_0(S_h) + \delta \|S_h\|_{L_2 \rightarrow C} = bh^{2n-k-\frac{m}{2}} + \delta ah^{-k-\frac{m}{2}}$. При $h = \left(\frac{(2k+m)a\delta}{(4n-2k-m)b} \right)^{\frac{1}{2n}}$ правая часть последнего неравенства приводит к формуле (4).

Теорема доказана.

Важным следствием теоремы является случай $\mathcal{P}_k u = \Delta^k u$, где $\Delta^k u$ – k -итерированный оператор Лапласа.

Теорема 2. Пусть k, n, m – целые неотрицательные числа такие, что $0 \leq k < n - \frac{m}{4}$. Тогда верно следующее равенство $\nu_\delta(\mathfrak{D}) = \nu_\delta(\mathfrak{L}) = \left(\frac{4na}{4n-4k-m} \right)^{\frac{4n-4k-m}{4n}} \left(\frac{4nb}{4k+m} \right)^{\frac{4k+m}{4n}} \delta^{\frac{4n-4k-m}{4n}}, \delta > 0$.

2. Пусть теперь $Y = L_2$.

Для любых $\alpha_i \geq 0, m, k$ и $n \in \mathbb{N}$ таких, что $k = \sum_{i=1}^m \alpha_i, 0 < k < 2n$, любых $u \in U_2$ в [1] найдена оценка

$$\omega(\delta) = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \frac{2n-k}{2n} \delta^{\frac{2n-k}{2n}}, \quad (5)$$

где S^{m-1} – единичная сфера пространства \mathbb{R}^m , используя которую (в силу [2] и [3]), получим величины

$$E(N) = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \frac{k}{2n} h^{2n-k}, N = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \frac{2n-k}{2n} \left(\frac{1}{h^k} \right), h > 0. \quad (6)$$

В [1] выписан оператор

$$(S_h u)(x) = \frac{i^k}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda(h, t) \hat{u}(t) e^{ixt}) dt, x \in \mathbb{R}^m, \quad (7)$$

являющийся оператором наилучшего приближения для оператора \mathcal{P}_k на множестве Q для

$$\lambda(h, t) = \begin{cases} p_k(s) (|t|^k - \frac{k}{2n} h^{2n-k} |t|^{2n}), & |t|^{2n-k} \leq \frac{2n}{k} (\frac{1}{h})^{2n-k}; \\ 0, & |t|^{2n-k} \geq \frac{2n}{k} (\frac{1}{h})^{2n-k}. \end{cases} \quad (8)$$

Оценки (5)–(7) позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 3. Для любых целых $\alpha_i \geq 0$, k , n и m чисел таких, что $k = \sum_{i=1}^m \alpha_i$, $0 < k < 2n$ для любого $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\nu_\delta(\mathfrak{D}) = \nu_\delta(\mathfrak{L}) = \|p_k\|_{C(S^{m-1})} \delta^{\frac{2n-k}{2n}}. \quad (9)$$

Оператор (7) при $h = \delta^{\frac{1}{2n}}$ является экстремальным в задаче восстановления для $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$.

Доказательство. Как и в теореме 1, из (5) и (6) следует оценка (9). Оптимальность оператора (7) при $\lambda(h, t)$, заданном (8), проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

Если положить $\mathcal{P}_k u = \Delta^k u$, то получим следующее следствие теоремы 3.

Теорема 4. При любых натуральных числах k и n , удовлетворяющих условию $0 < k < n$ и любом $\delta > 0$ справедливо равенство $\nu_\delta(\mathfrak{D}) = \nu_\delta(\mathfrak{L}) = \delta^{\frac{n-k}{n}}$. Оператор S_h при $h = \delta^{\frac{1}{n}}$ является экстремальным в задаче восстановления в случае $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тимофеев В. Г. Наилучшее приближение в равномерной и L_2 -метриках оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных. Деп. в ВИНТИ 22.04.85 г. № 2451–35. 12 с.
2. Тимофеев В. Г. Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа // Теория функций и приближений. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1983. С. 84–92.
3. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Математические заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
4. Арестов В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора. – Математические заметки. 1977. Т. 22, вып. 2. С. 231–244.

ПЕРЕНОС УПОРЯДОЧЕНИЯ КРИТЕРИЕВ НА МНОЖЕСТВО АЛЬТЕРНАТИВ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. В работе рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации с качественными критериями в форме

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где A есть произвольное непустое конечное множество, называемое *множеством допустимых альтернатив*, а q_j – отображение множества A в некоторое линейно упорядоченное множество $\langle C_j, \sigma^j \rangle$ ($j \in J$). Мы предполагаем, что допустимыми являются измерения критериев в балльных шкалах. Преобразование линейно упорядоченного множества $\langle C_j, \sigma^j \rangle$ в балльную шкалу для измерения признака q_j в модели (1) производится путем «сохранения» только тех меток, которые являются значениями признака q_j для некоторых альтернатив множества A , т. е. заменой множества C_j на $C_j^0 = pr_2 q_j$. При этом для $a \in A$ полагаем $h_j(a)$ – высота элемента $q_j(a)$ в балльной шкале $\langle C_j^0, \sigma^j \rangle$. Натуральное число $h_j(a)$ можно интерпретировать как число «ступенек» редуцированной шкалы $\langle C_j^0, \leq^j \rangle$, отделяющих альтернативу a от наилучшей по этому критерию альтернативы множества A . Далее, обозначая $J = \{1, \dots, m\}$, полагаем $h(a) = (h_1(a), \dots, h_m(a))$. Указанный вектор можно рассматривать как векторную оценку альтернативы a , но без учета относительной важности критериев.

2. Мы предлагаем здесь следующий метод учета относительной важности критериев. Относительная важность критериев $(q_j)_{j \in J}$ задается отношением (частичного) порядка ω на множестве номеров критериев J ; при этом условие $j_1 <^\omega j_2$ означает, что критерий q_{j_2} имеет большую относительную важность, чем критерий q_{j_1} . Задача состоит в переносе упорядочения ω на множество альтернатив. Эта задача решается следующим образом. Всякий набор неотрицательных чисел $\varphi(1), \dots, \varphi(m)$, удовлетворяющий условию: $j_1 <^\omega j_2 \Rightarrow \varphi(j_1) < \varphi(j_2)$, будем называть *допустимым весовым вектором* (условие допустимости состоит в том, что более важный критерий имеет больший вес). При фиксированном допустимом весовом векторе $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ сравнение двух векторных оценок

$$h(a) = (h_1(a), \dots, h_m(a)),$$

$$h(a') = (h_1(a'), \dots, h_m(a'))$$

(а значит, и соответствующих альтернатив a и a') сводится к сравнению величин взвешенных оценок

$$\nu(a) = \varphi(1)h_1(a) + \dots + \varphi(m)h_m(a),$$

$$\nu(a') = \varphi(1)h_1(a') + \dots + \varphi(m)h_m(a').$$

3. Заметим теперь, что допустимый весовой вектор $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ можно рассматривать как строго изотонное отображение φ из упорядоченного множества $\langle J, \omega \rangle$ в R_+ , а совокупность всех допустимых весовых векторов можно отождествить с множеством $C_+^0(\omega)$ строго изотонных отображений $\langle J, \omega \rangle$ в R_+ . При этом взвешенные оценки выражаются в виде скалярных произведений: $\nu(a) = (\varphi, h(a))$, $\nu(a') = (\varphi, h(a'))$. Получаем, что предпочтение между альтернативами a и a' при фиксированном допустимом весовом векторе φ сводится к числовому неравенству $(\varphi, h(a)) \leq (\varphi, h(a'))$. Остается сделать предпочтение между альтернативами независимым от выбора конкретного допустимого весового вектора. Это достигается переходом от некоторого фиксированного допустимого весового вектора ко всему классу допустимых весовых векторов, т. е. к множеству $C_+^0(\omega)$.

В результате приходим к следующему определению.

Определение. В модели (1) будем считать *альтернативу a' не менее предпочтительной, чем альтернатива a* , если при любом допустимом весовом векторе $\varphi \in C_+^0(\omega)$ выполнено неравенство $(\varphi, h(a)) \leq (\varphi, h(a'))$.

Заметим теперь, что последнее условие равносильно тому, что для векторных оценок $h(a)$ и $h(a')$ выполнено соотношение $h(a) \leq^{\bar{\omega}_+} h(a')$, где $\bar{\omega}_+$ – позитивное каноническое продолжение ω на ассоциированное векторное пространство R^J [1]. Таким образом, введенное здесь отношение предпочтения альтернатив фактически получатся переносом с помощью отображения h отношения порядка $\bar{\omega}_+$. Для упрощения обозначений будем использовать для введенного отношения предпочтения альтернатив то же самое обозначение. Тогда имеет место следующая двойная равносильность:

$$a \leq^{\bar{\omega}_+} a' \Leftrightarrow h(a) \leq^{\bar{\omega}_+} h(a') \Leftrightarrow (\varphi, h(a)) \leq (\varphi, h(a')). \quad (2)$$

4. Чтобы завершить решение поставленной задачи, осталось перейти к конструктивному выражению отношения предпочтения $\bar{\omega}_+$. Пусть

$M(\omega)$ – семейство мажорантно стабильных в J подмножеств относительно порядка ω . Для любого подмножества $S \in M(\omega)$ и $a \in A$ полагаем $H_s(a) = (\chi_s, h(a))$, где χ_s – характеристическая функция подмножества $S \subseteq J$. Ясно, что

$$H_s(a) = \sum_{j \in S} h_j(a). \quad (3)$$

Согласно (3) имеем следующее эффективное выражение отношения предпочтения $\bar{\omega}_+$ альтернатив модели G в виде равносильности:

$$a \leq^{\bar{\omega}_+} a' \Leftrightarrow (\forall S \in M(\omega)) H_s(a) \leq H_s(a'). \quad (4)$$

Формуле (4) можно придать несколько иной вид. Пусть $M(\omega) = \{S_1, \dots, S_r\}$ – перечень всех мажорантно стабильных в J подмножеств относительно порядка ω . Равносильность (4) может быть записана следующим образом:

$$a \leq^{\bar{\omega}_+} a' \Leftrightarrow (\forall k = 1, \dots, r) H_{s_k}(a) \leq H_{s_k}(a'). \quad (5)$$

Последняя формула показывает, что введенное предпочтение $\bar{\omega}_+$ фактически есть предпочтение по Парето, но с другим множеством критериев. Этот окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. Пусть для модели принятия решения G вида (1) задана информация об относительной важности критериев в форме отношения порядка ω на множестве J . Тогда отношение предпочтения $\bar{\omega}_+$ на множестве альтернатив модели G представимо в виде равносильности (5). Таким образом, предпочтение $\bar{\omega}_+$ совпадает с предпочтением по Парето с множеством критериев $(H_{s_k})_{k=1, \dots, r}$, где r – число мажорантно стабильных подмножеств множества критериев J относительно порядка ω .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Розен В. В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2013. 284 с.

ДЛИНА ДУГИ ОРИЦИКЛА НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

В геометрии гиперболической плоскости \widehat{H} положительной кривизны [1] получены формулы для выражения длины дуги орицикла через длину стягивающей ее хорды. Показано, что длина дуги орицикла, стягиваемой параболической хордой, равна двум радиусам кривизны плоскости \widehat{H} .

Теорема. *На плоскости \widehat{H} действительного радиуса кривизны ρ длина l дуги орицикла, стягиваемой эллиптической (гиперболической) хордой длиной a , может быть вычислена по формуле*

$$l = 2\rho \sin \frac{a}{2\rho} \quad \left(l = 2\rho \operatorname{ch} \frac{a}{2\rho} \right), \quad (1)$$

длина дуги орицикла, стягиваемой параболической хордой, равна 2ρ .

Доказательство. Пусть ξ — направление обхода абсолютной линии γ плоскости \widehat{H} , определяющее на \widehat{H} ориентацию в семействе реперов второго типа (см. [2, п. 3.4.1]), ω — орицикл плоскости \widehat{H} с центром в точке K , OM — хорда орицикла ω . Выберем правый канонический репер $R = \{K, A_2, A_3, E\}$ второго типа так, чтобы вершина A_2 лежала на прямой OK : $\gamma \cup OK = A_2$, $A_2 \neq K$; вершина A_3 была полюсом прямой OK относительно γ ; точка E лежала на касательной OE к абсолюту. Поскольку репер R правый, то направление обхода дуги KEA_2 совпадает с направлением ξ .

Координаты указанных точек в репере R имеют вид

$$K(1 : 0 : 0), \quad A_2(0 : 1 : 0), \quad A_3(0 : 0 : 1), \quad E(1 : 1 : 1), \quad O(1 : -1 : 0), \quad (2)$$

а орицикл ω задан уравнением

$$x_2^2 + x_1x_2 - x_3^2 = 0. \quad (3)$$

Присоединим к реперу R ортогональную орициклическую систему координат C_o с нулевым орициклом ω и началом O [3]. В системе C_o каждая точка X плоскости \widehat{H} имеет координаты $(u; v)$, определенные равенствами

$$u = ((KX)(KE)(KO)(KA_3)), \quad v\rho = \delta|XX_1|, \quad (4)$$

где X_1 – точка пересечения прямой XK с орициклом ω ; $\delta = 1$ ($\delta = -1$), если точка X не принадлежит (принадлежит) лучу X_1K .

Записывая равенства (4) в координатах (2) для точки M , получим связь ее координат $(m_1 : m_2 : m_3)$ в репере R с координатами $(u; v)$ в системе C_o : $m_3 = um_2$, $v = 0$. Учитывая, что M принадлежит орициклу (3), выразим через u координаты данной точки в репере R :

$$M(u^2 - 1 : 1 : u). \quad (5)$$

Связь координат $(u; v)$ точки плоскости \widehat{H} в системе C_o с ее собственными координатами $(\bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ в репере R устанавливают формулы (1) из [3]:

$$\bar{x}_1 = \rho(u^2 e^v - e^{-v}), \quad \bar{x}_2 = \rho e^v, \quad \bar{x}_3 = \rho u e^v.$$

Следовательно, длина l дуги OM между точками $O(0; 0)$ и $M(u; 0)$ на координатной линии ω ($v = 0$) системы C_o определена формулой

$$l = \rho \int_0^u du = \rho u. \quad (6)$$

Рассмотрим все возможные случаи для хорды OM .

1. Хорда OM принадлежит эллиптической прямой.

В этом случае, применяя координаты точек O и M из (2) и (5), по первой формуле (4.33) из [1] находим

$$\cos \frac{|OM|}{\rho} = \epsilon \frac{2 - u^2}{2}, \quad \epsilon = \pm 1. \quad (7)$$

Определим число ϵ в выражении (7).

Поляра точки O относительно абсолюта задана в репере R координатами $(1 : -1 : 0)$ и пересекает прямую $OM(1 : 1 : -u)$ в точке $O^*(u : u : 2)$, удаленной от O на расстояние $\pi\rho/2$. Точка Q пересечения прямых OM и $KA_3(0 : 1 : 0)$ задана в R координатами $(u : 0 : 1)$ и является внешней относительно ω , поскольку лежит на его касательной KA_3 .

Нас интересует длина a внутренней эллиптической хорды OM орицикла ω . Данная хорда OM является коротким (длинным) отрезком эллиптической прямой (см. [1, п. 4.2.2]) тогда и только тогда, когда она не содержит (содержит) точку O^* , т. е. тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $(OMO^*Q) > 0$ ($(OMO^*Q) < 0$), имеющее в координатах вид

$$\frac{2}{2 - u^2} > 0 \quad \left(\frac{2}{2 - u^2} < 0 \right). \quad (8)$$

Таким образом, для числа a выполняются следующие утверждения:

$$a < \frac{\pi\rho}{2} \iff 2 - u^2 > 0 \quad \left(a > \frac{\pi\rho}{2} \iff 2 - u^2 < 0 \right). \quad (9)$$

Согласно утверждениям (9) в выражении (7) $\epsilon = 1$. Поэтому

$$u = 2 \sin \frac{a}{2\rho}. \quad (10)$$

Подставляя значение u из (10) в (6), получим первую формулу из (1).

2. Хорда OM принадлежит гиперболической прямой.

Для координат $(1 : 1 : -u)$ гиперболической прямой OM согласно первому требованию (4.9) из [1] выполняется неравенство $4 - u^2 < 0$, а следовательно, и неравенство $2 - u^2 < 0$. Поэтому по второй формуле (4.33) из [1] длина a гиперболической хорды OM удовлетворяет выражению

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\rho} = \frac{u^2 - 2}{2}.$$

Откуда

$$u = 2 \operatorname{ch} \frac{a}{2\rho}. \quad (11)$$

Подставляя значение u из (11) в (6), получим вторую формулу из (1).

3. Хорда OM принадлежит параболической прямой.

Отличную от K точку пересечения прямой KE с орициклом ω обозначим T . Поскольку в рассматриваемом случае точка M принадлежит параболической прямой OE , симметричной относительно оси KE орицикла ω , то хорды OT и MT симметричны относительно KE и являются эллиптическими.

По теореме 2.4.27 из [2] длина a каждой из хорд OT и MT равна $\pi\rho/3$. Применяя данное значение a и доказанную в п. 1 первую формулу из (1), найдем длину $l(OT)$ дуги OT : $l(OT) = \rho$. Поскольку конгруэнтные хорды орицикла стягивают его конгруэнтные дуги, то длина l дуги OM орицикла ω , стягиваемой параболической хордой OM , равна 2ρ .

Таким образом, справедливо заключительное утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Дугу орицикла плоскости \widehat{H} , стягиваемую параболической хордой, назовем *параболической*, а ее половину – *единичной* дугой орицикла.

Согласно доказанной теореме на плоскости \widehat{H} параболическую и единичную дуги орицикла можно рассматривать как некоторый эталон измерения дуг орициклов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ромакина Л. Н.* Ортогональная орициклическая система координат на гиперболической плоскости положительной кривизны // Дни геометрии в Новосибирске, 2013 : тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск : Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013. С. 74, 75.

2. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 244 с.

3. *Ромакина Л. Н.* Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. 274 с.

УДК 517.518.82

Р. О. Романов, С. И. Дудов

О ВНЕШНЕЙ ОЦЕНКЕ СЕГМЕНТНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ

1. Пусть сегментная функция $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ задана на компактном множестве T вещественной оси функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причем $f_1(t) \leq f_2(t)$ для всех $t \in T$. Обозначим через $P_n(A, t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ – алгебраический полином фиксированной степени n и вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \varphi(A, r) &\equiv \max_{t \in T} \max [P_n(A, t) - f_2(t) + r, f_1(t) - P_n(A, t) + r] \rightarrow \min_{(A, r) \in D}, \\ D &= \{(A, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_+ : \psi(A, r) \equiv \\ &\equiv \max_{t \in T} \max \{ [P_n(A, t) - f_1(t) - r, f_2(t) - P_n(A, t) - r] \leq 0 \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Под полиномиальной полосой с осью, задаваемой графиком полинома $P_n(A, t)$, и шириной $2r$ будем понимать график сегментной функции $\Pi_n(A, t, r) = [P_n(A, t) - r, P_n(A, t) + r]$. Условие $\max [P_n(A, t) - f_1(t) - r, f_2(t) - P_n(A, t) - r] \leq 0$ выражает включение $F(t) \subset \Pi_n(A, t, r)$. При его выполнении величина $\max [P_n(A, t) - f_1(t) - r, f_2(t) - P_n(A, t) - r]$ является уклоном отрезка $\Pi_n(A, t, r)$ от отрезка $F(t)$.

Таким образом, задача (1) требует построения полиномиальной полосы, содержащей график сегментной функции $F(t)$, и при этом наименее равномерно уклоняющейся от этого графика на множестве T . Простые примеры показывают, что эта задача имеет самостоятельное значение от задачи внешней оценки сегментной функции полиномиальной полосой наименьшей ширины [1]. Цель данной статьи – показать, что задача (1)

сводится к другой задаче полиномиальной оценки сегментной функции, а именно, к задаче равномерного приближения сегментной функции полиномиальной полосой [2]

$$\max_{t \in T} \max\{|f_1(t) - P_n(A, t) + r|, |f_2(t) - P_n(A, t) - r|\} \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}, r \geq 0} \quad (2)$$

и указать конкретную связь между ними. Кроме того, будет показано, что в случае, если T – конечный набор точек, то задача (1) может быть редуцирована к задаче линейного программирования. Отметим, что функции $\varphi(A, r)$ и $\psi(A, r)$ являются выпуклыми по совокупности переменных (A, r) на \mathbb{R}^{n+2} . Таким образом, задача (1) является задачей выпуклого программирования, что позволяет для её исследования использовать методы выпуклого анализа.

2. Введем вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \rho(A) &\equiv \max_{t \in T} \max [P_n(A, t) - f_1(t), f_2(t) - P_n(A, t)], \\ h(A) &\equiv \max_{t \in T} \min [f_1(t) - P_n(A, t), P_n(A, t) - f_2(t)]. \end{aligned}$$

Тогда задачу (1) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \varphi(A, r) = h(A) + r \rightarrow \min_{(A, r) \in D}, \\ D = \{(A, r) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}_+ : \psi(A, r) = \rho(A) - r \leq 0\}. \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 1. *Задача (3) эквивалентна задаче (2). При этом, если пара (A^*, r^*) – одно из решений задачи (3), то пара $(A^*, (\rho(A^*) - h(A^*))/2)$ – одно из решений задачи (2). И наоборот, если пара (A^*, r^*) – одно из решений задачи (2), то пара $(A^*, \rho(A^*))$ – является одним из решений задачи (3).*

Доказательство. Как показано в [2], задача (2) эквивалентна задаче

$$\mu(A) \equiv \rho(A) + h(A) \rightarrow \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}. \quad (4)$$

При этом, если A^* – одно из решений задачи (4), то пара $(A^*, (\rho(A^*) - h(A^*))/2)$ является одним из решений задачи (2). Таким образом, нам достаточно доказать эквивалентность задач (3) и (4).

Итак, пусть пара (A^*, r^*) – одно из решений задачи (3). Нетрудно видеть, что в этой точке выполняется

$$\psi(A^*, r^*) = \rho(A^*) - r^* = 0. \quad (5)$$

Кроме того, в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа [2, гл. 4, § 2] эта точка обладает свойством

$$\partial\varphi(A^*, r^*) \cap K^+((A^*, r^*), D) \neq \emptyset. \quad (6)$$

Здесь $\partial\varphi(A^*, r^*)$ – субдифференциал выпуклой функции $\varphi(A, r)$ по совокупности переменных (A, r) в точке (A^*, r^*) , $K((A^*, r^*), D)$ – конус возможных направлений множества D в точке (A^*, r^*) , K^+ – сопряженный конус к конусу K . Используя субдифференциальное исчисление для выпуклых функций [4, гл. 1, § 5], получаем

$$\partial\varphi(A, r) = \{\partial h(A), 1\}, \quad \partial\psi(A, r) = \{\partial\rho(A), -1\}, \quad (7)$$

где $\partial h(A)$, $\partial\rho(A)$ – субдифференциалы выпуклых функций $h(A)$ и $\rho(A)$ по $A \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Используя леммы 6.1 и 6.2 из [4], учитывая при этом $0_{n+2} \notin \partial\psi(A^*, r)$ и (5), получаем $K((A^*, r^*), D) = -K^+(\{\partial\rho(A), -1\})$, где под $K(\{\partial\rho(A), -1\})$ понимается коническая оболочка множества $\{\partial\rho(A), -1\}$. Следовательно, имеем

$$K^+((A^*, r^*), D) = -K(\{\partial\rho(A), -1\}). \quad (8)$$

Теперь соотношение (6), подставляя формулы (7) и (8), можно переписать в виде

$$\{\partial h(A), 1\} \cap \{-K(\{\partial\rho(A), -1\})\} \neq \emptyset$$

или

$$0_{n+2} \in \{\partial h(A), 1\} + K(\{\partial\rho(A), -1\}). \quad (9)$$

Нетрудно показать (см. [5]), что ввиду $0_{n+2} \notin \{\partial\rho(A), -1\}$ соотношение (9) эквивалентно включению

$$0_{n+2} \in co(\{\partial h(A), 1\}, \{\partial\rho(A), -1\}), \quad (10)$$

где $co\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$.

Очевидно, что (10) эквивалентно

$$0_{n+1} \in \partial h(A^*) + \partial\rho(A^*). \quad (11)$$

Поскольку $h(A)$ и $\rho(A)$ – выпуклые и конечные, а значит, и непрерывные на \mathbb{R}^{n+1} функции, то по теореме Моро–Рокафеллара [4, гл. 1, § 5], $\partial\mu(A) = \partial\rho(A) + \partial h(A)$. Поэтому [3, гл. 4, § 2] соотношение (11) выражает выполнение критерия решения задачи (4) в точке A^* .

Теорема доказана.

3. Рассмотрим случай, когда $T = \{t_i\}$, $i = \overline{1, N}$ – конечный набор точек. Отметим, что содержательным является случай $N \geq n + 2$. При $N < n + 2$ задача (1) решается тривиальным образом.

Обозначим через $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ вектор, где $x_i = a_{i-1}$, $i = \overline{1, n+1}$, $x_{n+2} = r$. Пусть далее для $i = \overline{1, N}$:

$$\begin{aligned} B_i &= (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^n, 1), & b_i &= -f_2(t_i), \\ B_{i+N} &= (-1, -t_i, -t_i^2, \dots, t_i^n, 1), & b_{i+N} &= f_1(t_i), \\ B_{i+2N} &= (1, t_i, t_i^2, \dots, t_i^n, -1), & b_{i+2N} &= -f_1(t_i), \\ B_{i+3N} &= (-1, -t_i, -t_i^2, \dots, -t_i^n, -1), & b_{i+3N} &= f_2(t_i). \end{aligned}$$

Тогда задачу (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \max_{i=\overline{1, 2N}} \{\langle B_i, x \rangle + b_i\} \rightarrow \min_{x \in D}, \\ D = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+2} : \max_{i=\overline{2N+1, 4N}} \{\langle B_i, x \rangle + b_i\} \leq 0 \right\}. \end{cases} \quad (12)$$

Используя известный прием [6], нетрудно доказать, что справедлива

Теорема 2. *Задача (12) эквивалентна задаче линейного программирования вида*

$$\begin{cases} x_{n+3} \rightarrow \min, \\ x_{n+3} - \langle B_i, x \rangle - b_i \geq 0, & i = \overline{1, 2N}, \\ \langle B_i, x \rangle + b_i \leq 0, & i = \overline{2N+1, 4N}. \end{cases} \quad (13)$$

При этом, если точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, x_{n+3}^*)$ является одним из решений задачи (13), то точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+2}^*)$ является одним из решений задачи (12). И наоборот, если точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+2}^*)$ – одно из решений задачи (12), то точка $x^* = (x_1^*, \dots, x_{n+2}^*, x_{n+3}^*)$, где $x_{n+3}^* = \min_{i=\overline{1, 2N}} \{\langle B_i, x^* \rangle + b_i\}$, является одним из решений задачи (13).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00175 и № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодчикова И. Ю., Дудов С. И., Сорина Е. В. Внешняя оценка сегментной функции полиномиальной полосой // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49, № 7. С. 1175–1183.
2. Дудов С. И., Сорина Е. В. Равномерная оценка сегментной функции полиномиальной полосой // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 5. С. 44–71.
3. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М. : Наука. 1982.
4. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука. 1981.

5. Романов Р. О., Дудов С. И. О наилучшей полиномиальной мажоранте для непрерывной функции // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та. 2013. Вып. 15. С. 69–72.

6. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука. 1967.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, КОРНИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ДВУХ ЛУЧАХ

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный дифференциальным выражением (д.в.) n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s \leq n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями специальной структуры

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j+s \leq \kappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad (2)$$

$$U_i(y, \lambda) := \sum_{j+s \leq \kappa_{i0}} \alpha_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(0) + \sum_{j+s \leq \kappa_{i1}} \beta_{ijs} \lambda^s y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{l+1, n},$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\kappa_{i0}, \kappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leq l \leq n - 1$. Отметим, что краевые условия (2) в случае $2l < n$ не являются полураспадающимися.

Пусть корни $\{\omega_j\}_1^n$ характеристического уравнения $\sum_{j+s=n} p_{js} \omega^j = 0$ различны, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала координат, раствор между которыми $\pi - 2|\varphi|$, где $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, в количествах k и $n - k$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\omega_n e^{\varphi i} < \dots < \omega_{k+1} e^{\varphi i} < 0 < \omega_1 e^{-\varphi i} < \dots < \omega_k e^{-\varphi i}. \quad (3)$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m -кратная ($1 \leq m \leq n$) полнота системы собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$.

Основополагающей по этой проблеме является работа [1], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n -кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. со специальной главной частью

$$\ell(y, \lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и распадающимися краевыми условиями. Эта теорема была доказана в [2] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [3] в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [4]. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен в [5, 6]. В работах [7, 8], относящихся к общему виду пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n -кратной полноты в пространстве $L_2[0, 1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по λ функции Грина пучка на некоторых лучах. Детальное исследование вопроса об n - и m -кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия – полураспадающиеся, проведено в [9]. Похожий результат получен в [10].

Для пучка (1)–(2) с условием (3) не выполняются основные предположения [9], а именно, что краевые условия полураспадающиеся и не зависят от λ , а также, что существует прямая d , проходящая через начало координат, не содержащая ω -корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше $n - l$.

В [11] исследована кратная полнота системы к.ф. пучка очень близкого к рассматриваемому пучку $L(\lambda)$. Но д.в. предполагалось однородным ($p_{js} \equiv 0$ при $j + s < n$ в сумме (1)) и накладывались еще некоторые дополнительные ограничения. В случае $l = 0$ (см. (2)) эти ограничения удалось снять.

Для формулировки основного результата введем некоторые обозначения.

Считаем при $l = 0$, $s_0 = 0$, $s_{r+1} = n$, что краевые условия (2) упорядочены таким образом (это не нарушает общность), что справедливы соотношения:

$$\chi_{s_0+1} = \cdots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \cdots = \chi_{s_2} < \cdots < \chi_{s_r+1} = \cdots = \chi_{s_{r+1}},$$

где обозначено $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$ и γ, δ таковы, что

$$s_\gamma + 1 \leq n - k + 1 \leq s_{\gamma+1}, \quad s_\delta + 1 \leq k + 1 \leq s_{\delta+1}. \quad (4)$$

Обозначим

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_{i0}} \alpha_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\kappa_{i1}} \beta_{i\nu s} \omega_j^\nu, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{s_\gamma, k+1} & \dots & a_{s_\gamma, n} \\ b_{s_\gamma+1, 1} & \dots & b_{s_\gamma+1, k} & a_{s_\gamma+1, k+1} & \dots & a_{s_\gamma+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n, 1} & \dots & b_{n, k} & a_{n, k+1} & \dots & a_{n, n} \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_\delta, 1} & \dots & a_{s_\delta, k} & 0 & \dots & 0 \\ a_{s_\delta+1, 1} & \dots & a_{s_\delta+1, k} & b_{s_\delta+1, k+1} & \dots & b_{s_\delta+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n, 1} & \dots & a_{n, k} & b_{n, k+1} & \dots & b_{n, n} \end{vmatrix};$$

$$\kappa_i = \min\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\}, \quad i = \overline{1, n}; \quad [n]_+ = \max\{n, 0\}.$$

Теорема 1. Пусть для пучка $L(\lambda)$ выполняются условия (3), $l = 0$ и $A \neq 0$, $B \neq 0$. Тогда система к.ф. этого пучка n -кратно полна в пространстве $L_2[0, 1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum_{i=1}^n [n - 1 - \kappa_i]_+$ в случае, если выполняется хотя бы для одного $i = \overline{1, n}$ неравенство $\max\{\kappa_{i0}, \kappa_{i1}\} > n - 1$, и с нулевым дефектом в противном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
2. Хромов А. П. Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973. 242 с.
3. Шкаликов А. А. О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями // Функциональный анализ. 1976. Т. 10, № 4. С. 69–80.
4. Хромов А. П. О порождающих функциях вольтерровых операторов // Мат. сб. 1977. Т. 102(144), № 3. С. 457–472.
5. Freiling G. Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel // Math. Z. 1984. Vol. 188, № 1. P. 55–68.
6. Тихомиров С. А. Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов, 1987. 126 с.

7. Гасымов М. Г., Магеррамов А. М. О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов // Докл. АН Азерб. ССР. 1974. Т. 30, № 12. С. 9–12.

8. Шкаликос А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. М. : Изд-во Моск. ун-та. 1983. № 9. С. 190–229.

9. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д : Изд-во Рост. ун-та. 1994. 160 с.

10. Рыжлов В. С. Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка // Исследования по теории операторов : сб. стат. / БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1988. С. 128–140.

11. Рыжлов В. С. Кратная полнота корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. Вып. 15.

УДК 517.54

К. А. Самсонова

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ С МИНИМАЛЬНОЙ ЕМКОСТЬЮ РАЗРЕЗА

Настоящая статья посвящена решению экстремальной задачи о минимальной емкости разрезов в верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ и проходящих через заданные точки $A_k \in \mathbb{H}$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через γ_k , $k = 1, \dots, n$, разрезы в \mathbb{H} , соединяющие точки A_k с вещественной осью \mathbb{R} . Пусть конформное отображение $f : \mathbb{H} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k \rightarrow \mathbb{H}$ имеет гидродинамическую нормировку $f(z) = z + \frac{b}{z} + O(|z|^{-2})$, $|z| \rightarrow \infty$. Тогда число b называется «емкостью $\bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ относительно \mathbb{H} » [1].

Рассмотрим экстремальную задачу о минимуме емкости $\bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ относительно \mathbb{H} .

Теорема. Минимальная емкость $\bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ относительно верхней полуплоскости \mathbb{H} для разрезов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в \mathbb{H} , соединяющих заданные точки $A_k \in \mathbb{H}$, $k = 1, \dots, n$, с вещественной осью \mathbb{R} , достигается только в том случае, когда все $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ являются отрезками, перпендикулярными к \mathbb{R} .

Доказательство. Предположим, что кривые γ_k задаются параметрическими уравнениями:

$$\gamma_k = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma_k(t), 0 \leq t \leq T\}, \quad \gamma_k(T) = A_k.$$

Обратная к $f(z)$ функция $g := g_T$ отображает \mathbb{H} на $\mathbb{H} \setminus \bigcup_{k=1}^n \gamma_k$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению Левнера

$$\frac{dg_t(w)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{-2\lambda_k}{g_t(w) - u_k(t)}, \quad g_0(w) = w \in \mathbb{H}, \quad (1)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – положительные числа, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ [2], а u_1, \dots, u_n – непрерывные управляющие функции на $[0, T]$. Функции g_t , $0 \leq t \leq T$, допускают непрерывные продолжения на $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$.

Используя результаты работы [3], дадим эквивалентную двойственную формулировку рассмотренной экстремальной задачи: для решения $g_t(w)$ уравнения (1), $u_k(0) = a_k$, $k = 1, \dots, n$, с заданными соотношениями $\frac{\Re \gamma_k(T)}{\Im \gamma_1(T)}$, $k = 2, \dots, n$ найти $\max \Im \gamma_1(T) = \max g_T(u(T))$.

Формализуем задачу как задачу оптимального управления. Введем $x_1(t) = \Re g_t(w)$, $x_2(t) = \Im g_t(w)$. С помощью обратного уравнения Левнера получим динамическую систему:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{2(u_k(t) - x_1)}{x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t)}, \quad x_1(0) = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t)}, \quad x_2(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

По принципу максимума Понтрягина оптимальное управление $u_k^*(t)$, $k = 1, \dots, n$, поставленной задачи при всех $t \geq 0$ доставляет абсолютный максимум функция Гамильтона:

$$H(t, x, \Psi, u_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{2(u_k(t) - x_1)}{x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t)} \Psi_1 + \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t)} \Psi_2 \right), \quad k = 1, \dots, n,$$

где вектор $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ является решением сопряженной гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\Psi_1(x_2^2 - x_1^2 + 2u_k(t)x_1 - u_k^2(t)) + \Psi_2(2x_1x_2 - 2x_2u_k(t))}{(x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t))^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\Psi_1(2x_2 u_k(t) - 2x_1 x_2) - \Psi_2(x_1^2 - x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t))}{(x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t))^2}, \\ & \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

с начальными условиями $\Psi_1(0) = \xi_1$, $\Psi_2(0) = \xi_2$ и условием трансверсальности $\Psi_1(T) = 0$.

Так как $\frac{\partial H}{\partial u_k} = \frac{d\Psi_1}{dt}$, то из условия $\frac{\partial H}{\partial u_k}|_{u_k=u_k^*} = 0$, получаем $\frac{d\Psi_1}{dt}|_{u_k=u_k^*} = 0, k = 1, \dots, n$, что с учетом условия трансверсальности дает $\Psi_1(t) \equiv 0$. Тогда функция Гамильтона примет следующий вид:

$$H = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{2x_2 \Psi_2}{x_1^2 + x_2^2 - 2u_k(t)x_1 + u_k^2(t)}, k = 1, \dots, n.$$

Для нее $\frac{\partial H}{\partial u_k}|_{u_k=u_k^*} = 0$ означает, что $u_k^* = x_1$, то есть первое уравнение динамической системы $\frac{dx_1}{dt}|_{u_k=u_k^*} = 0$, откуда следует, что $x_1(t) \equiv 0$, а значит, и $u_k^*(t) \equiv 0, k = 1, \dots, n$. λ_k выбираются так, чтобы выполнялись заданные соотношения $\frac{\Re \gamma_k(T)}{\Im \gamma_1(T)}, k = 2, \dots, n$.

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 14-01-91370).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rohde S., Wong C. Half-plane capacity and conformal radius // Proc. Amer. Math. Soc., to appear, eprint arXiv:1201.5878.
2. Prokhorov D. V. Reachable set methods in extremal problems for univalent functions. Saratov University, 1993.
3. Schleissinger S. On driving functions generating quasislits in the chordal Loewner–Kufarev equation // Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, DOI:10.1080/17476933.2014.904296

СОКРАЩЕНИЕ ПАРЕТОВСКОГО ОПТИМУМА В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Мы изучаем задачи многокритериальной оптимизации с качественными критериями. Формально такая задача может быть задана в виде системы

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \quad (1)$$

где A – непустое множество альтернатив, $(q_j)_{j \in J}$ – множество критериев, J – некоторое конечное множество. Каждый критерий q_j представляет собой отображение множества альтернатив A в некоторое линейно упорядоченное множество (цепь) $\langle C_j, \leq^j \rangle$, представляющее собой шкалу для измерения соответствующего признака. Отображение q_j задает ранжирование множества альтернатив A по заданному критерию. Далее мы отождествляем любые две альтернативы, для которых совпадают значения всех признаков q_j , т. е. полагаем $a_1 = a_2$, если для всех $j \in J$ имеет место $q_j(a_1) = q_j(a_2)$.

Определение 1. Говорят, что *альтернатива a' является не менее предпочтительной по Парето, чем альтернатива a* (записывается $a \leq^{Par} a'$), если a' не менее предпочтительна, чем a сразу по всем критериям $(q_j)_{j \in J}$:

$$a \leq^{Par} a' \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a) \leq^j q_j(a'). \quad (2)$$

Определение 2. Альтернатива $a^* \in A$ называется *оптимальной по Парето* (или *эффективной*), если она является максимальной относительно предпочтения по Парето. Множество всех альтернатив, оптимальных по Парето в модели G , составляет так называемый *Партовский оптимум* и обозначается $ParOptG$.

Оптимальность по Парето альтернативы $a^* \in A$ означает отсутствие в множестве A таких альтернатив, которые доминируют ее по Парето-предпочтению. Согласно определению 2 это условие сводится к отсутствию такой альтернативы $a \in A$, для которой при всех $j \in J$ имеют место соотношения: $q_j(a) \geq^j q_j(a^*)$, причем хотя бы одно из этих соотношений должно выполняться как строгое. Содержательно Парето-оптимальность альтернативы $a^* \in A$ означает, что она не может быть улучшена ни по одному из критериев без ухудшения по какому-либо другому критерию. Поэтому оптимальность по Парето является необходимым условием оптимальности для модели (1), т. е. $OptG \subseteq ParOptG$.

Таким образом нахождение оптимальных альтернатив для модели (1) можно рассматривать как некоторое сокращение паретовского оптимума. В данной работе предлагается два способа сокращения паретовского оптимума, основанных на дополнительной информации об упорядочении критериев по относительной важности.

2. Пусть информация об относительной важности критериев задана с помощью отношения частичного порядка ω на множестве критериев (можно считать, что отношение ω задается на множестве индексов J). При этом считаем, что $i >^\omega j$ тогда и только тогда, когда критерий q_i является более важным чем q_j .

Следуя Л. А. Скорнякову [1], определим отношение $\hat{\omega}$ на множестве альтернатив A следующей формулой:

$$a_1 \leq^{\hat{\omega}} a_2 \Leftrightarrow (\forall j \in J)(q_j(a_1) \leq^j q_j(a_2) \vee (\exists i >^\omega j)q_i(a_1) <^i q_i(a_2)). \quad (3)$$

Таким образом, условие $a_1 \leq^{\hat{\omega}} a_2$ означает, что для любого индекса $j \in J$ либо a_2 превосходит a_1 по критерию q_j , либо найдется более важный критерий $i >^\omega j$ такой, что a_2 строго превосходит a_1 по критерию q_i . Из работы [1] следует, что $\hat{\omega}$ является отношением порядка, если J – конечное множество.

Замечание 1. Если $\omega = \Delta_J$ (т. е. дополнительная информация об относительной важности критериев отсутствует), то $\hat{\omega} = \leq^{Par}$. Действительно, в этом случае второй член дизъюнкции в формуле (3) будет ложным, поэтому выполняется первый член дизъюнкции, т. е. $a_1 \leq^{Par} a_2$.

Замечание 2. Пусть ω – линейный порядок на множестве J , тогда $\hat{\omega}$ совпадает с лексикографическим порядком $\hat{\omega} = \omega^{lex}$.

Действительно, положим $J = \{1, 2, \dots, m\}$ и $1 >^\omega 2 >^\omega \dots >^\omega m$. Пусть $a_1 \leq^{\hat{\omega}} a_2$, т. е. выполняется правая часть (3). Надо проверить, что $a_1 \leq^{\omega^{lex}} a_2$. Предположим, что $q_1(a_1) = q_1(a_2), \dots, q_{(k-1)}(a_1) = q_{(k-1)}(a_2)$ и $q_k(a_1) \neq q_k(a_2)$, где $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда выполнено $q_k(a_1) <^k q_k(a_2)$ т. к. в противном случае $q_k(a_1) >^k q_k(a_2)$ и мы получаем противоречие с (3) при $j = k$. Таким образом, показали, что $\hat{\omega} \subseteq \omega^{lex}$.

Покажем обратное включение. Пусть $a_1 \leq^{\omega^{lex}} a_2$ и $j_1 = 1, \dots, m$ – первый номер, для которого $q_{j_1}(a_1) \neq q_{j_1}(a_2)$, тогда по определению порядка ω^{lex} $q_{j_1}(a_1) <^{j_1} q_{j_1}(a_2)$. В этом случае для $j < j_1$ выполнено $q_j(a_1) = q_j(a_2)$, для $j = j_1$ выполнено $q_j(a_1) <^j q_j(a_2)$, для $j > j_1$ выполнен второй член дизъюнкции формулы (3). Таким образом, формула (3) выполнена для всех $j \in J$, т. е. $a_1 \leq^{\hat{\omega}} a_2$.

Теорема 1. При любом отношении порядка ω на множестве J имеет место включение $Max(\hat{\omega}) \subseteq ParOptG$.

Действительно, сравнивая формулы (2) и (3) видим, что $\leq^{Par} \subseteq \hat{\omega}$, т. к. при условии $a_1 \leq^{Par} a_2$ для всех $j \in J$ будет выполняться первый член дизъюнкции в формуле (3). Учитывая, что оба отношения \leq^{Par} и $\hat{\omega}$ являются отношениями порядка, получаем, что $\leq^{Par} \subseteq \hat{\omega}$. Далее, пусть $a \in \text{Max}(\hat{\omega})$. Предположим, что $a \notin \text{ParOpt}G$. Тогда существует $a_1 \in A$ такой, что $a_1 >^{Par} a$, в силу доказанного включения $a_1 >^{\hat{\omega}} a$, что противоречит условию $a \in \text{Max}(\hat{\omega})$. Таким образом, множество максимальных элементов для отношения $\hat{\omega}$ является сокращением паретовского оптимума.

Простые примеры, приведенные в [2], показывают, что это сокращение может быть существенным.

3. Еще один метод сокращения паретовского оптимума связан с переносом канонического продолжения $\tilde{\omega}$ порядка ω на множество альтернатив. Согласно [2] оно может быть задано формулой

$$a_1 \leq^{\tilde{\omega}} a_2 \Leftrightarrow (\forall S \in M(\omega)) H_s(a_1) \leq H_s(a_2). \quad (4)$$

где $M(\omega)$ – семейство всех мажорантно стабильных относительно порядка ω подмножеств множества J , $H_s(a) = \sum_{j \in S} h(q_j(a))$, $h(q_j(a))$ – высота элемента $q_j(a)$ в редуцированной шкале C_j (состоящей из элементов $pr_2 q_j$).

Рассмотрим случай, когда ω – линейное отношение порядка на множестве J . В этом случае семейство мажорантно стабильных подмножеств выглядит следующим образом:

$$\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, m\}.$$

Согласно формуле (4) имеем

$$a_1 \leq^{\tilde{\omega}} a_2 \Leftrightarrow \begin{cases} h(q_1(a_1)) \leq h(q_1(a_2)), \\ h(q_1(a_1)) + h(q_2(a_1)) \leq h(q_2(a_2)) + h(q_1(a_2)), \\ \dots \\ h(q_1(a_1)) + h(q_2(a_1)) + \dots + h(q_m(a_1)) \leq \\ \leq h(q_1(a_2)) + h(q_2(a_2)) + \dots + h(q_m(a_2)). \end{cases}$$

Замечание 3. Если ω – линейный порядок на множестве критериев, то $\tilde{\omega}$ включается в лексикографический порядок на множестве альтернатив.

В самом деле, рассмотрим альтернативы $a_1, a_2 \in A$. Пусть выполнено $a_1 \leq^{\tilde{\omega}} a_2$, надо показать, что $a_1 \leq^{lex} a_2$. Предположим противное, т. е.

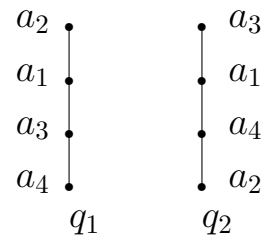
$q_1(a_1) = q_1(a_2), \dots, q_{j-1}(a_1) = q_{j-1}(a_2), q_j(a_1) > q_j(a_2), \dots$ В этом случае, учитывая изотонность функции h , получаем

$$\begin{cases} h(q_1(a_1)) = h(q_1(a_2)), \\ \dots \\ h(q_{j-1}(a_1)) = h(q_{j-1}(a_2)), \\ h(q_j(a_1)) > h(q_j(a_2)). \end{cases}$$

Складывая эти неравенства, приходим к неравенству $H_s(a_1) > H_s(a_2)$, где S – мажорантно стабильное подмножество множества первых j критериев $\{1, 2, 3, \dots, j\}$. Это противоречит формуле (4). Показали включение $\tilde{\omega} \subseteq \omega^{lex}$.

Обратное включение неверно. В самом деле, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Возьмем множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и два критерия q_1 и q_2 , где $1 \succ^\omega 2$. Пусть ранжирование альтернатив по критериям q_1 и q_2 заданы диаграммой:



Здесь $a_1 \leq^{lex} a_2$. С другой стороны, находим $h(q_1(a_1)) + h(q_2(a_1)) = 2 + 2 > 3 + 0 = h(q_1(a_2)) + h(q_2(a_2))$. Таким образом, $a_1 \leq^{\tilde{\omega}} a_2$ не выполнено.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М. : Наука, 1970.
2. Розен В. В. Принятие решений по качественным критериям. Математические модели. Saarbrücken : Palmarium Academic Publishing, 2013. 284 с.

УДК 571.968

С. Ю. Советникова, Г. В. Хромова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В задаче нахождения равномерных приближений к решению интегральных уравнений 1 рода с оператором двойного интегрирования дается конкретизация и уточнение общих положений о применении метода регуляризации Тихонова нулевого порядка гладкости.

Рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \int_0^x (x-t)u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

в котором $x \in [0, 1]$, $u(x) \in C[0, 1]$, $u(1) = 0$, $f(x)$ задана ее приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta$.

Известно [1], что в данном случае для нахождения равномерных приближений к $u(x)$ можно использовать семейство операторов

$$T_\alpha = (\alpha E + A^*A)^{-1} A^* \quad (\alpha > 0 - \text{параметр}).$$

В соответствии с [1] при $\alpha \rightarrow 0$ имеет место сходимость:

$$\|T_\alpha f - u\|_C \equiv \|T_\alpha Au - u\|_C \rightarrow 0.$$

Теорема 1. *Каждый из операторов $T_\alpha A$, аппроксимирующих точное решение уравнения (1), является интегральным оператором с ядром $K_\alpha(x, t) = \alpha^{-1/4} \Phi(x, t, \rho)$, где $\rho = \alpha^{-1/4}$,*

$$\Phi(x, t, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{4} (2B_1(x, t, \rho) - B_2(x, t, \rho) + B_3(x, t, \rho)), \quad (2)$$

$$B_1 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+t)\rho} \left(2 \cos \left(\frac{\sqrt{2}(x+t)\rho}{2} \right) - 2 \sin \left(\frac{\sqrt{2}(x+t)\rho}{2} \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) \right),$$

$$B_2 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x-t)\rho} \left(8 \cos \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{2}(2-x-t)\rho}{2} \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{2}(2-x-t)\rho}{2} \right) \right),$$

$$B_3(x, t, \rho) = \begin{cases} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-t)\rho} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) + \sin \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) \right) & \text{при } t \leq x, \\ e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(t-x)\rho} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{2}(x-t)\rho}{2} \right) \right) & \text{при } t > x. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $T_\alpha A = \frac{1}{\alpha} \left((A^*A)^{-1} + \frac{1}{\alpha} E \right)^{-1}$, то $K_\alpha(x, t) = \frac{1}{\alpha} \Gamma \left(x, t, -\frac{1}{\alpha} \right)$, где $\Gamma \left(x, t, -\frac{1}{\alpha} \right)$ есть ядро резольвенты дифференциального оператора $L : y^{(4)}, U_i(y) = 0, i = \overline{1, 4}$, где $U_1(y) = y'''(0), U_2(y) = y''(0), U_3(y) = y'(1), U_4(y) = y(1)$, при $\lambda = -\frac{1}{\alpha}$ (λ – спектральный параметр).

Обозначим через $\omega_k, k = \overline{1, 4}$, – корни 4-й степени из -1, занумерованные следующим образом: $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i), \omega_2 = \varpi_1, \omega_3 = -\omega_1, \omega_4 = -\varpi_1$.

Тогда фундаментальная система решений уравнения $y^{(4)} + \frac{1}{\alpha} y$ будет иметь вид $y_k(x) = e^{\rho \omega_k x}, k = \overline{1, 4}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$g(x, t, \rho) = \frac{1}{4\rho^3} (g_1(x, t, \rho) + g_2(x, t, \rho)),$$

где

$$g_1(x, t, \rho) = \begin{cases} 2Re\omega_1 e^{-\rho\omega_1(x-t)} & \text{при } t \leq x, \\ 0 & \text{при } t > x; \end{cases}$$

$$g_2(x, t, \rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < x, \\ 2Re\omega_1 e^{-\rho\omega_1(t-x)} & \text{при } t \geq x. \end{cases}$$

Пользуемся представлением функции $\Gamma(x, t, -1/\alpha)$ из [2]:

$$\Gamma(x, t, -1/\alpha) = -Y(x, \rho)M^{-1}(\rho)U(g) + g(x, t, \rho), \quad (3)$$

где $Y(x, \rho) = (y_1(x, \rho), y_2(x, \rho), y_3(x, \rho), y_4(x, \rho))$, $M(\rho)$ – матрица, элементами которой являются $U_{jk} = U_j(y_k)$, $k = \overline{1, 4}$, $U(g)$ – столбец, элементами которого являются линейные формы $U_j(g)$, $j = \overline{1, 4}$, составленные по переменной x .

Далее проводим доказательство по схеме:

1) получаем конкретные выражения для всех составляющих правой части формулы (3), соответствующие нашей задаче. В частности, если обозначить через $\Delta(\rho)$ определитель матрицы $M(\rho)$, то элементами матрицы $M^{-1}(\rho)$ будут числа $X_{lj}(\rho) = \frac{\Delta_{jl}(\rho)}{\Delta(\rho)}$, где Δ_{jl} – алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j -й строке и l -м столбце определителя $\Delta(\rho)$;

2) проводим преобразования числителя и знаменателя полученного выражения, аналогичные приведенным в [2];

3) разбиваем выражение, полученное после указанных преобразований, на сумму попарно сопряженных комплекснозначных функций и приходим к формуле (2).

Теперь найдем асимптотическое выражение для норм регуляризирующих операторов.

Теорема 2. *Справедлива формула, асимптотическая по α при $\alpha \rightarrow 0$:*

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = 3^{1/2} 2^{-5/4} \alpha^{-5/8} + o(\alpha^{-5/8}). \quad (4)$$

Доказательство. Пользуемся представлением нормы $\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C}$ в виде [3]

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(K_\alpha(x, x) - \int_0^1 K_\alpha^2(x, t) dt \right)^{1/2}$$

(выражение в скобках является функцией, принимающей вещественные значения).

Подставляя в эту формулу выражение $K_\alpha(x, t)$ через $\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha})$, получим формулу

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = \alpha^{-1} \sup_{0 \leq x \leq 1} \left(\Gamma(x, t, -\frac{1}{\alpha}) - \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \Gamma^2(x, x, -\frac{1}{\alpha}) dt \right)^{1/2}.$$

Подставляем сюда выражение (2) и приходим к равенству

$$\|T_\alpha\|_{L_2 \rightarrow C} = \alpha^{-5/8} \max_{0 \leq x \leq 1} (F(x, \rho))^{1/2},$$

где

$$F(x, \rho) = \frac{3\sqrt{2}}{16} + F_1(x, \rho),$$

$F_1(x, \rho)$ – функция, представляющая собой сумму слагаемых, каждое из которых содержит либо $e^{-\rho\omega_1 x}$, либо $e^{-\rho\omega_1(1-x)}$, либо произведение этих экспонент, либо экспоненты, сопряженные с указанными.

Очевидно, что во внутренних точках отрезка $[0, 1]$ $F_1(x, \rho) = \Psi(\rho)$, где $\Psi(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$ быстрее любой степени ρ .

Тогда

$$\max_{0 \leq x \leq 1} F_1(x, \rho) = \max \{F_1(0, \rho), F_1(1, \rho)\} = F_1(0, \rho) = \frac{3\sqrt{2}}{16} + \Psi(\rho).$$

Отсюда приходим к формуле (4).

Из теоремы 3 (см. [1]), как известно, вытекает согласование α с δ , обеспечивающее сходимость приближения $T_{\alpha(\delta)}f_\delta$ к $u(x)$ при $\delta \rightarrow 0$, а наличие точной константы при главной части асимптотической формулы (4) дает возможность выбирать указанное согласование при решении прикладных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромова Г. В. О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94–104.
2. Гуревич А. П., Хромов А. П. Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов // Изв. вузов. Сер. Математика. 2003. № 2(489). С. 24–35.
3. Хромова Г. В. О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 3–10.

**ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ АНАЛОГА
ФОРМУЛЫ НЕВАИ ДЛЯ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ**

В работе [1] установлена равномерная внутри интервала $(0, \pi)$ сходимость в соотношении, аналогичном формуле Неваи для оператора синк-аппроксимаций вида

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right). \quad (1)$$

Настоящая работа посвящена получению формул, аналогичных формуле Неваи. Благодаря специфике синк-функций $\frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}$ несложно добиться симметрии в представлении главной части погрешности синк-аппроксимации, перейдя к конечным разностям второго порядка.

Предложение 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то для всех $x \in [0, \pi]$ имеют место следующие соотношения:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (f(x_{k-1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(x_{k+1,n}) - 2f(x_{k,n}) + f(x_{k-1,n}) \right) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (4)$$

где $l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi}$. Сходимость в (2)–(4) поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Доказательство. Справедливость равенства (2) установлена в [1, теорема 2]. Для доказательства соотношения (3) рассмотрим функцию

$$g(z) = f(\pi - z). \quad (5)$$

В силу (2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ g(z) - \sum_{j=0}^n g\left(\frac{j\pi}{n}\right) l_{j,n}(z) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(g\left(\frac{(j+1)\pi}{n}\right) - g\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right) l_{j,n}(z) \right\} = 0.$$

Сделаем замену переменной $z = \pi - x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ g(\pi - x) - \sum_{j=0}^n g\left(\frac{j\pi}{n}\right) l_{j,n}(\pi - x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(g\left(\frac{(j+1)\pi}{n}\right) - g\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right) l_{j,n}(\pi - x) \right\} = 0.$$

В силу чётности функции $\frac{\sin nx}{nx}$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(x) - \sum_{j=0}^n f\left(\pi - \frac{j\pi}{n}\right) l_{n-j,n}(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(f\left(\pi - \frac{(j+1)\pi}{n}\right) - f\left(\pi - \frac{j\pi}{n}\right) \right) l_{n-j,n}(x) \right\} = 0.$$

Отсюда следует соотношение (3), так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right) l_{k,n}(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{(k-1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right) l_{k,n}(x) \right\} = 0.$$

Здесь сходимость такая же, как и в равенстве (2), то есть поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$. Сложим равенства (2) и (3) и разделим пополам.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_{k+1,n}) - 2f(x_{k,n}) + f(x_{k-1,n}))}{2} l_{k,n}(x) - \frac{1}{4} \left((f(x_{1,n}) - f(x_{0,n})) l_{0,n}(x) + (f(x_{n-1,n}) - f(x_{n,n})) l_{n,n}(x) \right) \right) = 0.$$

Так как

$$\left| (f(x_{1,n}) - f(x_{0,n})) l_{0,n}(x) \right| + \left| (f(x_{n-1,n}) - f(x_{n,n})) l_{n,n}(x) \right| \leq 2\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right),$$

то равномерно внутри $(0, \pi)$ справедливо (4).

Предложение 1 доказано.

Справедлив также «локальный» вариант предложения 1. Пусть $f \in C[0, \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_n = o(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = \infty; \quad \varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-\frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} - 1\right\}. \quad (6)$$

(В случае $f \equiv \text{const}$ считаем $\gamma_n = 0$, $\varepsilon_n = \frac{1}{e\pi}$.)

Предложение 2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям (6). Для всех $x \in [0, \pi]$ справедливы соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k-1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - L_n(f, x) - \frac{1}{4} \sum_{k=k_1}^{k_2} \{ f(x_{k+1,n}) - 2f(x_{k,n}) + f(x_{k-1,n}) \} l_{k,n}(x) \right) = 0, \quad (9)$$

где номера k_1 и k_2 определяются с помощью неравенств

$$\frac{\pi(\hat{k}_1 - 1)}{n} < x - \varepsilon_n \leq \frac{\pi\hat{k}_1}{n}, \quad \frac{\pi\hat{k}_2}{n} \leq x + \varepsilon_n < \frac{\pi(\hat{k}_2 + 1)}{n}$$

следующим образом:

$$k_1 = \max(0, \hat{k}_1), \quad k_2 = \min(n - 1, \hat{k}_2). \quad (10)$$

Если $k_2 < k_1$, то суммы в (7)–(9) отсутствуют. Сходимость в (7)–(9) поточечная на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$, т. е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Доказательство. Поточечная сходимость в (7) на отрезке $[0, \pi]$ и равномерная внутри интервала $(0, \pi)$ установлены в [1, теорема 2]. Учитывая соотношения (3), (4) и формулу (27) из [1] после замены $z = \pi - x$ аналогично доказательству предложения 1 устанавливаем справедливость соотношений (8) и (9).

Предложение 2 доказано.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00102).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трынин А. Ю. Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1155–1166.

УДК 517.51

А. А. Хромов

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ПРОИЗВОДНОЙ

В данной работе приведена оценка погрешности приближений к производной на отрезке, когда эта производная из класса Липшица с показателем β , а сама функция задана ее среднеквадратичным приближением.

Пусть $f(x) \in C^1[0, 1]$ задана ее приближением $f_\delta(x) : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2} \leq \delta$.

В [1] построено семейство операторов

$$T_\alpha^1 f = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \left[- \int_x^{x+\alpha} f(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} f(t) dt \right] \equiv T_{\alpha 2}^1 f, & x \in [0, 1/2], \\ \frac{1}{\alpha^2} \left[- \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} f(t) dt + \int_{x-\alpha}^x f(t) dt \right] \equiv T_{\alpha 1}^1 f, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где ($\alpha \leq 1/4$), и показано, что $\|T_\alpha^1 f - f'\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$ для любой $f(x) \in C^1[0, 1]$, ($\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0, 1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2, 1]}\}$).

В [2] показано, что $\|T_{\alpha(\delta)}^1 f_\delta - f'\|_{L_\infty} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\alpha = \alpha(\delta)$, удовлетворяющем условиям:

- а) $\alpha(\delta) \rightarrow 0$;
- б) $\delta(\alpha(\delta))^{-3/2} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Рассмотрим класс

$$M = \{f(x) \in C^1[0, 1] : f'(x) \in Lip_k \beta, \quad 0 < \beta \leq 1\}$$

и величины:

$$\Delta_1(T_\alpha^1, M) = \sup\{\|T_\alpha^1 f - f'\|_{L_\infty} : f \in M\},$$

$$\Delta(\delta, T_\alpha^1, M) = \sup\{\|T_\alpha^1 f_\delta - f'\|_{L_\infty} : f \in M, \quad \|f_\delta - f\|_{L_2} \leq \delta\}.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\Delta_1(T_\alpha^1, M) = KC_\beta\alpha^\beta, \quad (2)$$

где

$$C_\beta = 2(2^{1+\beta} - 1)(2 + \beta)^{-1}(1 + \beta)^{-1}.$$

Доказательство. В [1] установлено равенство

$$T_\alpha^1 f = S_\alpha^{(2)} f',$$

где операторы $S_\alpha^{(2)}$ имеют вид

$$S_\alpha^{(2)} \varphi = \begin{cases} S_{\alpha 2}^2 \varphi & \text{при } x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^2 \varphi & \text{при } x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$S_{\alpha 1}^2 \varphi = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (2\alpha - (x-t))\varphi(t) dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t)\varphi(t) dt \right],$$

$$S_{\alpha 2}^2 \varphi = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_x^{x+\alpha} (t-x)\varphi(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))\varphi(t) dt \right]. \quad (3)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_1(T_\alpha^1, M) = \Delta_1(S_\alpha^{(2)}, Lip_k \beta). \quad (4)$$

Далее, используем оценку:

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq K|t-x|^\beta$$

и равенство $S_\alpha^{(2)} 1 \equiv 1$.

Тогда из равенства (3) получаем оценку

$$\Delta_1(S_\alpha^{(2)}, Lip_k \beta) \leq KC_\beta\alpha^\beta.$$

Эта оценка достигается на функции $\varphi_0(x) = Kx^\beta$.

Отсюда и из равенства (4) получаем (2).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\|T_\alpha^1\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} = \sqrt{2}\alpha^{-3/2}. \quad (5)$$

Доказательство получается из представлений формулы (1) и известной формулы для подсчета нормы интегрального оператора, действующего из L_2 в C .

Теорема. *Справедлива двусторонняя оценка, не улучшаемая по порядку δ :*

$$C_1(\beta)\delta^{\frac{2\beta}{2\beta+3}} \leq \Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}^1, M) \leq C_2(\beta)\delta^{\frac{2\beta}{2\beta+3}}, \quad (6)$$

где

$$\alpha(\delta) = D(\beta)\delta^{\frac{2}{2\beta+3}}, \quad (7)$$

$$D(\beta) = 3^{\frac{2}{2\beta+3}}(K\beta C_\beta 2^{1/2})^{-\frac{2}{2\beta+3}},$$

$$C_1(\beta) = \frac{1}{2}C_2(\beta),$$

$$C_2(\beta) = (KC_\beta)^{\frac{3}{2\beta+3}}(3\beta^{-1}2^{-1/2})^{\frac{2\beta}{2\beta+3}}.$$

Доказательство. Доказательство проводится методом из [3].

1. Отправляемся от известной оценки

$$\frac{1}{2}\varphi(\alpha, \delta) \leq \Delta(\delta, T_\alpha^1, M) \leq \varphi(\alpha, \delta), \quad (8)$$

где

$$\varphi(\alpha, \delta) = \Delta_1(T_\alpha^1, M) + \delta\|T_\alpha^1\|_{L_2 \rightarrow L_\infty}. \quad (9)$$

2. Подставляем в (9) формулы (2) и (5).

3. Находим $\alpha = \alpha(\delta)$ из условия

$$\varphi(\alpha, \delta) \rightarrow \inf_\alpha$$

– приходим к формуле (7).

4. Подставляем (7) в (9), а затем в (8) – получаем (6).

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. А. О приближении функции и ее производной с помощью модифицированного оператора Стеклова // Математика. Механика : Сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 92–94.

2. Хромов А. А. О приближении функции вместе с ее производной на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : Материалы 17-й Саратовской зимней школы. Саратов, 27 янв.–3 февр. 2014 г. Саратов : «Научная книга» 2014. С. 285–287.

3. Хромова Г. В. Об оценках погрешности приближенных решений уравнений первого рода // Докл. Академии Наук. 2001. Т. 378, № 5. С. 605–609.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

В данной работе формулы для конечных разностей увязываются с операторами, построенными на базе оператора Стеклова, и предлагается способ использования этих формул для аппроксимации производных на отрезке.

1. В [1] для получения равномерных приближений к непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, 1]$, было предложено семейство операторов Стеклова с разрывной областью значений (мы будем называть их разрывными операторами Стеклова)

$$S_\alpha f = \begin{cases} S_{\alpha 2} f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1} f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где

$$S_{\alpha 1} f = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x f(t) dt, \quad S_{\alpha 2} f = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(t) dt.$$

В [2] для получения приближения к непрерывной производной функции $f(x)$ было рассмотрено семейство интегральных операторов

$$DS_\alpha^{(2)} f = \begin{cases} DS_{\alpha 2}^2 f, & x \in [0, 1/2], \\ DS_{\alpha 1}^2 f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

где D – оператор дифференцирования по x . Функции $S_\alpha f$ и $DS_\alpha^{(2)} f$ рассматриваются как элементы подпространства из $L_\infty[0, 1]$ с нормой

$$\max \{ \|\cdot\|_{C[0,1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2,1]} \}.$$

Пусть $f(x) \in C^m[0, 1]$, $m \geq 1$ – любое.

Рассмотрим операторы:

$$S_\alpha^{(m)} f = \begin{cases} S_{\alpha 2}^m f, & x \in [0, 1/2], \\ S_{\alpha 1}^m f, & x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$D^m S_\alpha^{(m)} f = \begin{cases} D^m S_{\alpha 2}^m f, & x \in [0, 1/2], \\ D^m S_{\alpha 1}^m f, & x \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где D^m – оператор дифференцирования по x порядка m .

Теорема 1. *Справедливы представления:*

$$D^m S_{\alpha 1}^m f = \alpha^{-m} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(x - k\alpha) \equiv \Delta_{\alpha 1}^m f,$$

$$D^m S_{\alpha 2}^m f = \alpha^{-m} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(x + (m - k)\alpha), \equiv \Delta_{\alpha 2}^m f,$$

где

$$m \geq 1, \quad \alpha \leq \frac{1}{2m}.$$

Доказательство проводится по индукции.

Чтобы аргументы функций $D^m S_{\alpha j}^m f$, $j = 1, 2$, не выходили за границу отрезка $[0, 1]$, мы должны потребовать, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned} x - m\alpha &\geq 0 && \text{при } x \in [1/2, 1], \quad j = 1, \\ x + m\alpha &\leq 1 && \text{при } x \in [0, 1/2], \quad j = 2. \end{aligned}$$

Это приводит к ограничению на α : $\alpha \leq \frac{1}{2m}$, которое не является существенным в нашей задаче.

Таким образом, операторы, определенные в формуле (1), представляют собой «разрывные» разностные операторы порядка m :

$$\Delta_{\alpha}^m f = \begin{cases} \Delta_{\alpha 2}^m f, & x \in [0, 1/2], \\ \Delta_{\alpha 1}^m f, & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 2. *Для любой $f(x) \in C^m[0, 1]$ при $\alpha \leq 1/2m$ имеет место сходимость*

$$\|\Delta_{\alpha}^m f - f^{(m)}\|_{L_{\infty}[0,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (3)$$

Доказательство. Сходимость (3) эквивалентна сходимостям:

$$\|\Delta_{\alpha 2}^m f - f^{(m)}\|_{C[0,1/2]} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$\|\Delta_{\alpha 1}^m f - f^{(m)}\|_{C[1/2,1]} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \quad (6)$$

а сходимости (4), (5) имеют место, поскольку

$$\Delta_{\alpha j}^m f = S_{\alpha j}^m f^{(m)}, \quad j = 1, 2.$$

2. Пусть теперь функция $f(x)$ задана ее δ -приближением $f_{\delta}(x)$ в равномерной метрике: $\|f_{\delta}(x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \delta$. Построим в этом случае равномерные приближения к $f^{(m)}(x)$ на отрезке $[0, 1]$ с помощью операторов Δ_{α}^m .

Теорема 3. Для сходимости $\|\Delta_\alpha^m f_\delta - f\|_{L_\infty}$ при $\alpha \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ достаточно выполнения согласования $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ и $\delta(\alpha(\delta))^{-m} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство следует из формулы (2), оценок:

$$\begin{aligned}\|\Delta_\alpha^m f_\delta - f^{(m)}\|_{L_\infty} &\leq \|\Delta_\alpha^m f - f^{(m)}\|_{L_\infty} + \delta \|\Delta_\alpha^m\|_{C \rightarrow L_\infty}, \\ \|\Delta_\alpha^m\|_{C \rightarrow L_\infty} &\leq 2^m \alpha^{-m}\end{aligned}$$

и теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов А. П., Хромова Г. В. Об одной модификации оператора Стеклова // Современные проблемы теории функций и их приложения : тез. докл. Сарат. зимней шк. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 181 с.
2. Хромов А. А. О приближении функции вместе с ее производной на отрезке // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й Междунар. Сарат. зимней шк. Саратов : «Научная книга», 2014. С. 285–287.

УДК 516.9

В. Р. Шебалдин

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: с нелинейными дифференциальными связями на конечном отрезке времени

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

с ограничениями на управление $u(t) \in U$, для почти всех

$$t \in [t_0, T], \quad (2)$$

и с недифференцируемыми ограничениями на фазовые переменные вида

$$|x_l(t_i) - x_l(t_j)| \leq c \quad (3)$$

где $l = \overline{1, n}$, $t_i, t_j \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, q-1}$, $j = \overline{2, q}$, $i < j$ – набор фиксированных точек отрезка времени, c – заданная константа; с интегральным критерием качества

$$J(x, u) = \int_{t_0}^T f^0(x, u, t) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

$f(x, u) = (f_1(x, u), \dots, f_n(x, u))^T$ – заданная вектор-функция, причем $f_l(x, u)$, $l = \overline{1, n}$ – скалярные, дифференцируемые функции своих аргументов; $f^0(x, u, t)$ – скалярная, дифференцируемая функция своих аргументов, $x(t) \in R^n$, $U \subset R^1$ – ограниченное множество.

Обозначим: $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ – оптимальная пара исходной задачи.

Функции $u(t)$ будем считать допустимыми, если они являются измеримыми функциями и удовлетворяют ограничению (2). Множество допустимых управлений в задаче (1)-(3) будем обозначать символом V .

В настоящей работе, как и в статьях [1–3], с помощью теоремы Дубовицкого—Милютина (см. [4]) доказаны необходимые условия экстремума в виде максиминной задачи. Для этой цели в дополнение к известным конусам допустимых вариаций, соответствующих ограничениям (1)–(2), и конусу запрещенных вариаций для функционала (4) необходимо построить конус допустимых вариаций и ему сопряжённый, соответствующий ограничению (3). Докажем лемму.

Лемма. *Пара функций (x, u) принадлежит конусу допустимых вариаций, соответствующих ограничению (3), тогда и только тогда, когда*

$$\max_{(i,j,l) \in M} (x_l(t_i) - x_l(t_j)) \text{sign}(\hat{x}_l(t_i) - \hat{x}_l(t_j)) < 0,$$

$$i = \overline{1, q-1}, j = \overline{2, q}, i < j, l = \overline{1, n},$$

где

$$M = \{(i, j, l) \mid |\hat{x}_l(t_i) - \hat{x}_l(t_j)| = c\}.$$

Тогда согласно [4] сопряжённый конус будет состоять из функционалов вида

$$f^*(x, u) = - \sum_{(i,j,l) \in M} \alpha_{i,j,l} (x_l(t_i) - x_l(t_j)) \text{sign}(\hat{x}_l(t_i) - \hat{x}_l(t_j)),$$

где $\alpha_{i,j,l} = \text{const}$, $\alpha_{i,j,l} \geq 0$.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть (\hat{x}, \hat{u}) – оптимальная пара задачи (1)–(4). Тогда существуют такие интегрируемые функции $\psi_{i,j,l}(t) \in R^n$, $(i, j, l) \in M_0$, $i = \overline{1, q-1}$, $j = \overline{2, q}$, $i < j$, $l = \overline{1, n}$, что имеют место следующие уравнения*

$$\max_{u(t) \in V} \min_{(i,j,l) \in M_0} \int_{t_0}^T \Delta H_{i,j,l}(u, t) dt = 0,$$

зде

$$M_0 = M \cup (0, 0, 0),$$

$$M = \{(i, j, l) \mid |\hat{x}_l(t_i) - \hat{x}_l(t_j)| = c\},$$

$$i = \overline{1, q-1}, j = \overline{2, q}, i < j, l = \overline{1, n},$$

$$\Delta H_{i,j,l}(u, t) = \psi_{i,j,l}^T [f(\hat{x}, \hat{u}) - f(\hat{x}, u)],$$

$$\Delta H_{0,0,0} = \psi_{0,0,0}^T [f(\hat{x}, \hat{u}) - f(\hat{x}, u)] + f^0(\hat{x}, \hat{u}, t) - f^0(\hat{x}, u, t),$$

$$\psi_{i,j,l}(t) = \begin{cases} \psi_{l,i}(t) - \psi_{l,j}(t), & t \in [t_0, t_i], \\ -\psi_{l,j}(t), & t \in (t_i, t_j], \\ 0, & t \in (t_j, T] \end{cases}$$

при $\hat{x}_l(t_i) \geq \hat{x}_l(t_j)$,

$$\psi_{i,j,l}(t) = \begin{cases} -\psi_{l,i}(t) + \psi_{l,j}(t), & t \in [t_0, t_i], \\ \psi_{l,j}(t), & t \in (t_i, t_j], \\ 0, & t \in (t_j, T] \end{cases}$$

при $\hat{x}_l(t_i) < \hat{x}_l(t_j)$,

$$\dot{\psi}_{l,i} = -f_x^T(\hat{x}, \hat{u})\psi_{l,i}, [\psi_{l,i}(t_i)]_i = -1, \quad [\psi_{l,i}(t_i)]_r = 0, \quad i \neq r,$$

$$\dot{\psi}_{0,0,0} = -f_x^T(\hat{x}, \hat{u})\psi_{0,0,0}(t) - f_x^0(\hat{x}, \hat{u}, t), \psi_{0,0,0}(T) = 0,$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = x_0.$$

Доказательство. Применим метод Дубовицкого—Милютина для вывода необходимых условий экстремума. Поскольку управляемая система определяется нелинейными дифференциальными связями и ограничения на управляющие функции не являются выпуклыми, то воспользуемся следующим способом преодоления этих трудностей, основные идеи которого изложены в [5]. По исходной задаче оптимального

управления построим вспомогательную линейную задачу с выпуклыми ограничениями на управление. Введем положительные функции $v(t)$ по следующим правилам:

$$v(\tau) = \begin{cases} \bar{v}(\tau), & \tau \in \Delta(v), \\ 0, & \tau \subseteq \Delta(v), \end{cases} \quad \Delta(v) = \bigcup_{k=1}^N \Delta_k, \quad \Delta_k \subset [0, 1],$$

$$\int_0^1 v(s)ds = T - t_0,$$

где $\bar{v}(t)$ – произвольная, ограниченная, измеримая, положительная функция, а $\Delta_k(v) = (\tilde{\theta}_k, \theta_k]$ (см. [5, с. 160]). Обозначим: $t(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v(s)ds$. Зафиксируем некоторую функцию $v_*(t)$ с перечисленными выше свойствами. Тогда соответственно определим функцию

$$t_*(\tau) = t_0 + \int_0^\tau v_*(\xi)d\xi.$$

Определим точки τ_i и η_j как решения уравнений

$$t_i = t_0 + \int_0^{\tau_i} v_*(\xi)d\xi, \quad t_j = t_0 + \int_0^{\eta_j} v_*(\xi)d\xi.$$

Определим: $\tau(t) = \min\{\xi \in [0, 1] \mid t(\xi) = t\}$.

Сформулируем вспомогательную задачу. Положим

$$\omega_*(\tau) = \begin{cases} \hat{u}(t_*(\tau)), & \tau \in \Delta(v_*), \\ u(\tau), & \tau \subseteq \Delta(v_*), \end{cases}$$

где $u(t) \in U$. Тогда пара функций $(y_* = y(t, v_*), v_*)$ (см. [5, с. 160–163]), является оптимальной для следующей задачи оптимального управления

$$\dot{y} = f(y(\tau), \omega_*(\tau))v(\tau), \quad y(0) = x_0, \quad \tau \in [0, 1],$$

$$\dot{t}(\tau) = v(\tau), \quad t(0) = 0, \quad t(1) = T - t_0,$$

$$|y_l(\tau_i) - y_l(\eta_j)| \leq c,$$

$$v(\tau) \geq 0,$$

$$J_1(y, v) = \int_0^1 v(\tau) f_0(y(\tau), \omega_*(t(\tau), t(\tau))) d\tau \longrightarrow \min.$$

Для данной задачи оптимального управления, как и в статье [1], доказываются необходимые условия экстремума и с помощью обратной замены $\tau(t)$ получаются уравнения принципа максимума задачи (1)–(4).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шебалдин В. Р.* Численное решение терминальной задачи оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Саратов, 1989. 37 с. Деп. в ВИНТИ 23.05.89. № 2999-В89.
2. *Шебалдин В. Р.* Об одной задаче оптимального управления с ограничениями. Саратов, 1996. 14 с. Деп. в ВИНТИ 30.03.96. № 3074-В96.
3. *Шебалдин В. Р.* О минимизирующих последовательностях в задаче оптимального управления с дискретными фазовыми ограничениями. Саратов, 1998. 12 с. Деп. в ВИНТИ 11.03.98. № 709-В98.
4. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974. 480 с.

УДК 517.984

В. А. Юрко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕМЕННЫХ ПОРЯДКОВ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СЕТЯХ

1. Исследуются обратные спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений переменных порядков на компактных звездообразных графах. Точнее, дифференциальные уравнения имеют разные порядки на разных ребрах. Краевые задачи на графах (пространственных сетях) часто возникают в естествознании и технике (см. [1]). Дифференциальные уравнения переменных порядков на графах появляются в различных задачах в математике и приложениях, например, при исследовании колебаний таких структур как кабельно-опорные мосты, мачта с растяжками и других.

В [2] обратная задача рассматривалась для весьма частного случая операторов переменных порядков на звездообразных графах, когда есть только два уравнения разных порядков. В данной статье рассматривается общий случай операторов на графе-звезде. Точнее, все ребра разбиты на m групп, в каждой из которых дифференциальные уравнения имеют различные порядки. Кроме того, мы рассматриваем обобщенные условия склейки во внутренней вершине. Этот общий случай порождает качественные изменения при формулировке и решении обратной задачи.

В качестве основной спектральной характеристики вводятся и изучаются так называемые матрицы Вейля, которые являются обобщениями функции Вейля для классического оператора Штурма—Лиувилля и обобщениями матрицы Вейля для уравнений произвольных порядков

на интервале и на графах [3]. Доказано, что задание матриц Вейля однозначно определяет коэффициенты дифференциального уравнения на графе, и приведена конструктивная процедура построения решения обратной задачи. При исследовании этого класса обратных задач используются идеи метода спектральных отображений [3].

2. Рассмотрим компактный граф T в \mathbf{R}^ω с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_p\}$ и множеством ребер $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_p\}$, где v_1, \dots, v_p – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $e_1 \cap \dots \cap e_p = \{v_0\}$. Пусть l_j – длина ребра e_j . Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, l_j]$ так, что $x_j = 0$ соответствует граничным вершинам v_1, \dots, v_p , а $x_j = l_j$ соответствует вершине v_0 . Функция Y на T представима в виде $Y = \{y_j\}_{j=\overline{1,p}}$, где $y_j(x_j)$ определена на ребре e_j . Фиксируем $m = \overline{1,p}$. Пусть n_i, p_i , $i = \overline{1,m}$ – натуральные числа такие, что $n_1 > n_2 > \dots > n_m > 1$, $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{m-1} < p_m := p$, и положим $n_{m+1} := 1$, $p_0 := 0$. Рассмотрим дифференциальное уравнение на T

$$y_j^{(n_i)}(x_j) + \sum_{\mu=0}^{n_i-2} q_{\mu j}(x_j) y_j^{(\mu)}(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad (1)$$

$$x_j \in (0, l_j), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{p_{i-1}+1, p_i},$$

где $q_{\mu j}(x_j)$ – комплекснозначные функции. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет порядок n_i на ребре e_j , $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Назовем $q_j = \{q_{\mu j}\}$ потенциалом на ребре e_j , а $q = \{q_j\}_{j=\overline{1,p}}$ – потенциалом на графе T . Обозначим $\mu_i = p_i - p_{i-1}$, $i = \overline{1,m}$.

Фиксируем $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$. Пусть $C_{kj}(x_j, \lambda)$, $k = \overline{1, n_i}$ – решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях $C_{kj}^{(\mu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k\mu}$, $k, \mu = \overline{1, n_i}$. Здесь и далее $\delta_{k\mu}$ – символ Кронекера. Рассмотрим линейные формы

$$U_{j\nu}(y_j) = \sum_{\mu=0}^{\nu} \gamma_{j\nu\mu} y_j^{(\mu)}(l_j), \quad j = \overline{1,p},$$

где $\gamma_{j\nu\mu}$ – комплексные числа, $\gamma_{j\nu} := \gamma_{j\nu\nu} \neq 0$, $\nu = \overline{0, n_i-1}$ при $j = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$.

Обозначим $\langle n \rangle := (|n|+n)/2$, т. е. $\langle n \rangle = n$ при $n \geq 0$, и $\langle n \rangle = 0$ при $n \leq 0$. Фиксируем $i = \overline{1,m}$, $s = \overline{p_{i-1}+1, p_i}$, $k = \overline{1, n_i-1}$. Введем решения $\Psi_{sk} = \{\psi_{skj}\}_{j=\overline{1,p}}$ уравнения (1) на графе T следующим образом. Пусть $\xi = \overline{i, m}$; $k = n_{\xi+1}, n_{\xi} - 1$. Тогда Ψ_{sk} удовлетворяет краевым условиям

$$\psi_{sks}^{(\eta-1)}(0) = \delta_{k\eta}, \quad \eta = \overline{1, k}, \quad (2)$$

$$\psi_{skj}^{(r)}(0) = 0, \quad r = \overline{0, \langle n_l - k - 1 \rangle}; \quad l = \overline{1, m}, \quad j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l}, \quad j \neq s, \quad (3)$$

и условиям склейки в вершине v_0 :

$$U_{p_l, \nu}(\psi_{sk, p_l}) = U_{j\nu}(\psi_{skj}), \quad (4)$$

$$l = \overline{\xi, m}, \quad j = \overline{1, p_l - 1}, \quad \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k - 1, n_l - 2)},$$

$$\sum_{j=1}^{p_\xi} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \quad \nu = \overline{k, n_\xi - 1}; \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{p_l} U_{j\nu}(\psi_{skj}) = 0, \quad l = \xi - 1, \dots, i, \quad \nu = \overline{n_{l+1}, n_l - 1}.$$

Функция Ψ_{sk} называется *решением Вейля порядка k относительно граничной вершины v_s* . Определим дополнительно $\psi_{sn_i s}(x_s, \lambda) := C_{n_i s}(x_s, \lambda)$.

Введем матрицы $M_s(\lambda)$, $s = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$, $i = \overline{1, m}$:

$$M_s(\lambda) = [M_{sk\mu}(\lambda)]_{k, \mu = \overline{1, n_i}}, \quad M_{sk\mu}(\lambda) := \psi_{sks}^{(\mu-1)}(0, \lambda).$$

Из определения Ψ_{sk} следует, что $M_{sk\mu}(\lambda) = \delta_{k\mu}$ при $k \geq \mu$. Матрица $M_s(\lambda)$ называется *матрицей Вейля относительно вершины v_s* . Фиксируем $N = \overline{1, m}$.

Обратная задача 1. Даны $\{M_s(\lambda)\}$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, построить q на T .

3. Фиксируем $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$. Из краевых условий (2) для решений Вейля следует, что

$$\psi_{sks}(x_s, \lambda) = C_{ks}(x_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n_i} M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}(x_s, \lambda), \quad k = \overline{1, n_i}. \quad (6)$$

Используя фундаментальную систему решений $\{C_{\mu j}(x_j, \lambda)\}$ на ребре e_j , запишем

$$\psi_{skj}(x_j, \lambda) = \sum_{\mu=1}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}(x_j, \lambda), \quad (7)$$

$$j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l}, \quad l = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n_i - 1},$$

где коэффициенты $M_{skj\mu}(\lambda)$ не зависят от x_j . В частности, $M_{sks\mu}(\lambda) = M_{sk\mu}(\lambda)$. Подставляя (7) в краевые условия и условия склейки (2)–(5) для решений Вейля Ψ_{sk} , получаем линейную алгебраическую систему $D_{sk}^1(\lambda)$ относительно $M_{skj\mu}(\lambda)$. Решая эту систему по формулам Крамера, находим $M_{skj\mu}(\lambda) = \Delta_{skj\mu}(\lambda) / \Delta_{sk}(\lambda)$, где функции $\Delta_{skj\mu}(\lambda)$ and $\Delta_{sk}(\lambda)$ являются целыми по λ . В частности, $M_{sk\mu}(\lambda) =$

$= \Delta_{sk\mu}(\lambda)/\Delta_{sk}(\lambda)$, $k < \mu$, где $\Delta_{sk\mu}(\lambda) := \Delta_{sk\mu}(\lambda)$. Функции $M_{skj\mu}(\lambda)$ являются мероморфными по λ .

Фиксируем $s = \overline{1, p}$ и рассмотрим вспомогательную обратную задачу на ребре e_s .

Обратная задача 2. Дана матрица Вейля M_s , построить q_s на ребре e_s .

Эта обратная задача была решена в [2], где доказана теорема единственности и получен алгоритм решения обратной задачи 2.

Фиксируем $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$. Пусть $\varphi_{jk}(x_j, \lambda)$, $k = \overline{1, n_i}$ – решения уравнения (1) на ребре e_j при условиях $\varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda) = \delta_{k\nu}$, $\nu = \overline{1, k}$, $\varphi_{jk}^{(\mu-1)}(0, \lambda) = 0$, $\mu = \overline{1, n_i - k}$. Введем матрицу $m_j(\lambda) = [m_{jk\nu}(\lambda)]_{k, \nu = \overline{1, n_i}}$, где $m_{jk\nu}(\lambda) := \varphi_{jk}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda)$. Матрица $m_j(\lambda)$ является классической матрицей Вейля на ребре e_j .

Обратная задача 3. Фиксируем $j = \overline{1, p}$. Дана матрица m_j , построить потенциал q_j на ребре e_j .

Эта обратная задача классическая, так как является задачей восстановления дифференциального уравнения на конечном интервале по матрице Вейля. Она решена в [3], где получен алгоритм ее решения, доказана единственность решения и приведены необходимые и достаточные условия разрешимости.

Фиксируем $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$. Тогда для каждого фиксированного $s = \overline{1, p_1} \setminus j$,

$$m_{j1\nu}(\lambda) = \frac{\psi_{s1j}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda)}{\psi_{s1j}(l_j, \lambda)}, \quad \nu = \overline{2, n_i}, \quad (8)$$

$$m_{jk\nu}(\lambda) = \frac{\det[\psi_{s\mu j}(l_j, \lambda), \dots, \psi_{s\mu j}^{(k-2)}(l_j, \lambda), \psi_{s\mu j}^{(\nu-1)}(l_j, \lambda)]_{\mu=\overline{1, k}}}{\det[\psi_{s\mu j}^{(\xi-1)}(l_j, \lambda)]_{\xi, \mu=\overline{1, k}}}, \quad (9)$$

$$2 \leq k < \nu \leq n_i.$$

4. Решение обратной задачи 1. Построим алгоритм решения обратной задачи 1.

Этап 1. Пусть заданы матрицы Вейля $\{M_s(\lambda)\}$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$. Решая обратную задачу 2 при каждом $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, находим потенциалы q_s на ребрах e_s , $s = \overline{1, p} \setminus p_N$.

Этап 2. Используя знание потенциала на ребрах e_s , $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, построим матрицу Вейля m_{p_N} .

Этап 3. Решая обратную задачу 3 при $j = p_N$, находим потенциал q_{p_N} .

Этапы 1 и 3 уже изучены выше в пункте 3. Осталось выполнить этап 2.

Предположим, что этап 1 уже завершен, и мы нашли потенциалы q_s , $s = \overline{1, p} \setminus p_N$ ребрах e_s , $s = \overline{1, p} \setminus p_N$. Тогда мы можем вычислить функции $C_{kj}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{1, p} \setminus p_N$; здесь $k = \overline{1, n_i}$ for $j = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$.

Фиксируем $s = \overline{1, p_1}$ (если $N > 1$), и $s = \overline{1, p_1 - 1}$ (если $N = 1$). Все вычисления ниже делаются при этом фиксированном s . Наша цель – построить матрицу Вейля $m_{p_N}(\lambda)$. В силу (8)–(9) для этого мы должны вычислить функции

$$\psi_{skp_N}^{(\nu)}(l_{p_N}, \lambda), \quad k = \overline{1, n_N - 1}, \quad \nu = \overline{0, n_N - 1}. \quad (10)$$

Функции (10) мы найдем следующим образом.

1) Используя (6), построим функции

$$\psi_{sk_s}^{(\nu)}(l_s, \lambda), \quad k = \overline{1, n_N - 1}, \quad \nu = \overline{0, n_1 - 1}, \quad (11)$$

по формуле

$$\psi_{sk_s}^{(\nu)}(l_s, \lambda) = C_{ks}^{(\nu)}(l_s, \lambda) + \sum_{\mu=k+1}^{n_1} M_{sk\mu}(\lambda) C_{\mu s}^{(\nu)}(l_s, \lambda). \quad (12)$$

2) Рассмотрим часть условий склейки (4) для Ψ_{sk} . Точнее, пусть $\xi = \overline{N, m}$, $k = \overline{n_{\xi+1}, n_{\xi} - 1}$, $l = \overline{\xi, m}$, $j = \overline{1, p_l - 1}$. Тогда, в частности, (4) дает

$$U_{p_l, \nu}(\psi_{sk, p_l}) = U_{j\nu}(\psi_{skj}), \quad \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k - 1, n_l - 2)}. \quad (13)$$

Так как функции (11) известны, то с помощью (13) можно вычислить функции

$$\begin{aligned} \psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda), \quad \xi = \overline{N, m}, \quad k = \overline{n_{\xi+1}, n_{\xi} - 1}, \\ l = \overline{\xi, m}, \quad j = \overline{1, p_l}, \quad \nu = \overline{n_{l+1} - 1, \min(k - 1, n_l - 2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, мы нашли функции (10) для $\nu = \overline{0, k - 1}$.

3) Из (7) и краевых условий на Ψ_{sk} вытекает, что

$$\psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda) = \sum_{\mu=\max(n_l-k+1, 2)}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu)}(l_j, \lambda), \quad (15)$$

$$k = \overline{1, n_1 - 1}, \quad l = \overline{1, m}, \quad j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l} \setminus s, \quad \nu = \overline{0, n_l - 1}.$$

Мы рассмотрим только часть соотношений (15). Точнее, пусть $\xi = \overline{N, m}$, $k = \overline{n_{\xi+1}, n_{\xi} - 1}$, $l = \overline{1, m}$, $j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l}$, $j \neq p_N$, $j \neq s$, $\nu = \overline{0, \min(k - 1, n_l - 2)}$. Тогда

$$\sum_{\mu=\max(n_l-k+1, 2)}^{n_l} M_{skj\mu}(\lambda) C_{\mu j}^{(\nu)}(l_j, \lambda) = \psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda), \quad (16)$$

$$\nu = \overline{0, \min(k - 1, n_l - 2)}.$$

При таком выборе параметров правые части в (16) известны, так как известны функции (14). Соотношения (16) образуют линейную алгебраическую систему σ_{skj} относительно коэффициентов $M_{skj\mu}(\lambda)$. Решая систему σ_{skj} по правилу Крамера, находим функции $M_{skj\mu}(\lambda)$. Подставляя их в (15), вычисляем функции

$$\psi_{skj}^{(\nu)}(l_j, \lambda), k = \overline{1, n_N - 1}, l = \overline{1, m}, \quad (17)$$

$$j = \overline{p_{l-1} + 1, p_l} \setminus p_N, \nu = \overline{0, n_l - 1}.$$

Отметим, что для $j = s$ эти функции были найдены ранее.

4) Воспользуемся теперь обобщенными условиями Кирхгофа (5) для Ψ_{sk} . Так как функции (17) известны, то с помощью (5) построим функции (10) при $k = \overline{1, n_N - 1}$, $\nu = \overline{k, n_N - 1}$. Таким образом, функции (10) известны при $k = \overline{1, n_N - 1}$, $\nu = \overline{0, n_N - 1}$.

Так как функции (10) известны, мы можем построить матрицу Вейля $m_{p_N}(\lambda)$ по формулам (8)–(9) для $j = p_N$. Итак, мы получили решение обратной задачи 1 и доказали его единственность, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Задание матриц Вейля $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, однозначно определяет потенциал q на T . Решение обратной задачи 1 может быть найдено по следующему алгоритму.*

Алгоритм 1. *Даны матрицы Вейля $M_s(\lambda)$, $s = \overline{1, p} \setminus p_N$.*

1) *Находим q_s , $s = \overline{1, p} \setminus p_N$, решая обратную задачу 2 при каждом $s = \overline{1, p} \setminus p_N$.*

2) *Вычисляем $C_{kj}^{(\nu)}(l_j, \lambda)$, $j = \overline{1, p} \setminus p_N$; здесь $k = \overline{1, n_i}$, $\nu = \overline{0, n_i - 1}$ for $j = \overline{p_{i-1} + 1, p_i}$.*

3) *Фиксируем $s = \overline{1, p_1}$ (если $N > 1$), и $s = \overline{1, p_1 - 1}$ (если $N = 1$). Все вычисления ниже проводятся при этом s . Строим функции (11) по формуле (12).*

4) *Вычисляем функции (14), используя (13).*

5) Находим функции $M_{skj\mu}(\lambda)$, решая линейную алгебраическую систему σ_{skj} .

6) Строим функции (10), используя (5).

7) Вычисляем матрицу Вейля $t_{p_N}(\lambda)$ по формулам (8)–(9) при $j = p_N$.

10) Строим потенциал q_{p_N} на ребре e_{p_N} , решая обратную задачу 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1436.2014К) и РФФИ (проект № 13-01-00134).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М. : Физматлит, 2004.

2. Yurko V. A. Inverse problems on star-type graphs: differential operators of different orders on different edges // Central European J. Math. 2014. Vol. 12, № 3. P. 483–499.

3. Yurko V. A. Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.

УДК 533.6.011

В. С. Кожанов, Г. Д. Севостьянов

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

В работе получено новое уравнение, описывающее неустановившиеся одномерные течения идеального совершенного газа. Рассмотрены энергетические соотношения этих течений.

Обозначим: t – время, r – координата, $u = u(r, t)$ – скорость частицы газа, $p = p(r, t)$ – давление, $\rho = \rho(r, t)$ – плотность. Полная система уравнений, описывающих неустановившиеся одномерные течения идеального совершенного газа [1], имеет вид

$$\begin{aligned} (r^\nu \rho)_t + (r^\nu \rho u)_r &= 0, \quad \rho(u_t + uu_r) = -p_r, \\ p_t + up_r + \gamma p \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma > 1$ – отношение удельных теплоёмкостей, $\nu = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии течения соответственно.

Система (1) имеет 3-й порядок по t и по r .

Одномерное течение – безвихревое. Тогда можно ввести потенциал скорости $\varphi = \varphi(r, t)$ по формуле $u = \varphi_r$. Для безвихревых течений имеет место интеграл Лагранжа–Коши

$$\frac{1}{2} \varphi_r^2 + \varphi_t + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}, \quad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}, \quad (2)$$

где $a = a(r, t)$ – местная скорость звука.

Используя (2) и представление для u , систему (1) можно свести к известному дифференциальному уравнению с частными производными (ДУЧП) для функции φ :

$$(a^2 - \varphi_r^2) \varphi_{rr} + \frac{\nu}{r} a^2 \varphi_r - 2\varphi_r \varphi_{rt} - \varphi_{tt} = 0,$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \varphi_r^2 - (\gamma - 1) \varphi_t. \quad (3)$$

Уравнение (3) удобно для описания полей $u(r, t)$, $a(r, t)$, $M(r, t)$, $T(r, t)$, но не для $p(r, t)$ и $\rho(r, t)$ (M – число Маха, T – абсолютная температура).

Введём в рассмотрение функцию траектории (лагранжеву массовую координату) $\xi = \xi(r, t)$ [2] по формулам

$$r^\nu \rho = \xi_r, \quad r^\nu \rho u = -\xi_t. \quad (4)$$

Используя (4) и исключая в (1) u , получим равенство для ξ [2, с. 167]:

$$\begin{aligned} \xi_r^2 \xi_{tt} - 2\xi_r \xi_t \xi_{rt} + (\xi_t^2 - a^2) \xi_{rr} + \frac{\nu}{r} a^2 \xi_r^3 &= \xi_r^3 f_s s'(\xi), \\ p = f(\rho, s) &= \rho^\gamma e^{\frac{s-s_0}{C_V}}. \end{aligned}$$

Здесь энтропия $s(\xi)$ заранее неизвестна, т. е. это не ДУЧП.

Получим из (1) ДУЧП для $\xi(r, t)$.

Выразим p через ξ . Для этого p_r из уравнения движения подставим в уравнение энергии и разрешим полученное выражение относительно p_t

$$p_t = \rho u u_t + \rho u^2 u_r - \gamma p \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right). \quad (5)$$

Продифференцируем (5) по r , а уравнение $p_r = -\rho(u_t + u u_r)$ по t и приравняем правые части полученных выражений

$$(\rho u u_t + \rho u^2 u_r)_r - \gamma p \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right)_r - \gamma p_r \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right) = -[\rho(u_t + u u_r)]_t.$$

Подставим в последнее равенство p_r из уравнения движения и выразим давление p :

$$p = \frac{(\rho u_t + \rho u u_r)_t + \gamma \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right) (\rho u_t + \rho u u_r) + [u(\rho u_t + \rho u u_r)]}{\gamma \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right)_r}. \quad (6)$$

Введём обозначения

$$Q = \gamma \left(u_r + \frac{\nu}{r} u \right) = -\gamma \frac{d(\ln \rho)}{dt}, \quad R = \rho(u_t + u u_r) = -p_r. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$p = \frac{R_t + RQ + (uR)_r}{Q_r}. \quad (8)$$

Из (4) выразим ρ и u через $\xi(r, t)$:

$$\rho = r^{-\nu} \xi_r, \quad u = -\xi_t / \xi_r. \quad (9)$$

Запишем Q и R через ξ , используя (9):

$$Q = -\gamma r^{-\nu} \left(r^\nu \frac{\xi_t}{\xi_r} \right)_r, \quad R = r^{-\nu} \left[\left(\frac{\xi_t^2}{\xi_r} \right)_r - \xi_{tt} \right]. \quad (10)$$

Уравнение (3) запишем в виде

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} Q \varphi_t + \varphi_{tt} = \frac{1}{\gamma} (a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} u^2) Q - \left(\frac{u^3}{3} \right)_r - (u^2)_t.$$

Продифференцировав по r , получим

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} Q_r \varphi_t + \frac{\gamma-1}{\gamma} Q u_t + u_{tt} = \frac{1}{\gamma} \left[(a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} u^2) Q \right]_r - \left(\frac{u^3}{3} \right)_{rr} - (u^2)_{rt}.$$

Выразим

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \varphi_t = \frac{\frac{1}{\gamma} \left[(a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} u^2) Q \right]_r - \frac{\gamma-1}{\gamma} Q u_t - u_{tt} - \left(\frac{u^3}{3} \right)_{rr} - (u^2)_{rt}}{Q_r}.$$

Дифференцируем по r :

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} u_t + \left[\frac{\frac{\gamma-1}{\gamma} Q u_t + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (u^2 Q)_r + u_{tt} + \left(\frac{u^3}{3} \right)_{rr} + (u^2)_{rt}}{Q_r} \right]_r = 0. \quad (11)$$

Это ДУЧП для $u(r, t)$ в дивергентной форме (2-й порядок по t и 3-й – по r). В него не входит R . Подставляя (9) в (11), получим ДУЧП для функции $\xi(r, t)$ (3-й порядок по t и 4-й – по r).

Найдя ξ , получим из (9) скорость u и плотность ρ , а из (8) – давление p .

Автомодельное решение

$$\xi = r^{\nu+1+\beta/\alpha} \Phi(\lambda), \quad \lambda = r t^{-\alpha}. \quad (12)$$

В силу произвольности постоянной β считаем $\beta = km$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Обозначив $\omega = r^{k/\alpha}$, можно функцию ξ искать в виде ряда по автомодельным решениям:

$$\xi = r^{\nu+1} \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \Phi_m(\lambda).$$

Тогда из (9) плотность

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \chi_m(\lambda), \quad \chi_m(\lambda) = (\nu + 1 + km/\alpha) \Phi_m(\lambda) + \lambda \Phi'_m(\lambda),$$

а скорость

$$u = \alpha \frac{r}{t} \lambda \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \Phi'_m(\lambda)}{\sum_{m=0}^{\infty} \omega^m \chi_m(\lambda)}.$$

Давление p определяем из (8), (10).

Из системы (1) можно получить дивергентное энергетическое соотношение. Умножив уравнение неразрывности на $\frac{u^2}{2}$, а уравнение энергии на $\frac{1}{\gamma-1}$ и сложив равенства, получим, используя уравнение движения, искомое соотношение [3, с. 160]:

$$\left[r^\nu \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{1}{\gamma-1} p \right) \right]_t + \left[r^\nu u \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) \right]_r = 0.$$

Обозначив

$$W = u \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right),$$

имеем

$$\left[r^\nu \left(\frac{W}{u} - p \right) \right]_t + (r^\nu W)_r = 0.$$

В некоторых первых интегралах для автомодельных течений (см. [1]):

$$\frac{W}{u} - p = \frac{t}{r\alpha} W + g(r).$$

Тогда, обозначив $H = tr^\nu W$, имеем линейное уравнение для H :

$$tH_t + \alpha r H_r = 0$$

и его общее решение

$$H = f\left(\frac{r}{t^\alpha}\right), \quad W = \frac{1}{tr^\nu} f\left(\frac{r}{t^\alpha}\right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. М. : Наука. 1987. 432 с.
2. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М. : Наука. 1981. 368 с.
3. Рождественский Б. Л., Яценко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Наука. 1987. 689 с.

К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ ОСКУЛИРУЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ОРБИТЫ

В работе рассматривается задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. При этом орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве как неизменяемая фигура. Для решения задачи используется дифференциальное кватернионное уравнение ориентации орбиты. Работа является развитием [1–3].

Введем систему координат η , связанную с центром масс КА: ось η_1 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс КА, ось η_3 – перпендикулярно плоскости орбиты КА, а η_2 так, чтобы орты осей η_1 , η_2 и η_3 образовывали правую тройку. Введем также систему координат ξ , связанную с плоскостью и перицентром орбиты КА. Начало этой системы координат находится в центре O притяжения Земли, ось ξ_1 направлена вдоль радиуса-вектора перицентра орбиты, ось ξ_3 перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора \mathbf{c} момента скорости центра масс КА, а ось ξ_2 образует правую тройку с осями ξ_1 и ξ_3 .

В инерциальной системе координат X ориентация системы координат ξ характеризует собой ориентацию орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла Ω_u , наклоном орбиты I , угловым расстоянием перицентра от узла ω_π .

Считается, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости орбиты КА. Тогда орбита КА не меняет своей формы и своих размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления \mathbf{u} как неизменяемая фигура.

Задача состоит в нахождении оптимального управления \mathbf{u} , переводящего плоскость орбиты КА, движение центра масс которого описывается дифференциальными уравнениями

$$2 \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}, \quad |\mathbf{u}| \leq u_{\max}, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad c = \text{const}, \quad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3, \quad \Omega_\xi = u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2)$$

из любого заданного начального состояния

$$t = t_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \mathbf{\Lambda}(t_0) = \mathbf{\Lambda}^0 \quad (2)$$

в требуемое конечное состояние, принадлежащие многообразию

$$t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*,$$

$$\operatorname{tg} \Omega_u = \frac{\Lambda_1^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_2^*}{\Lambda_0^* \Lambda_1^* - \Lambda_2^* \Lambda_3^*}, \quad \cos I = (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 - (\Lambda_2^*)^2 + (\Lambda_3^*)^2. \quad (3)$$

Уравнение (3) получаются из соотношения для матрицы $c(\mathbf{\Lambda}^*)$ направляющих косинусов

$$c(\mathbf{\Lambda}^*) = \begin{pmatrix} (\Lambda_0^*)^2 + (\Lambda_1^*)^2 - & 2(\Lambda_1^* \Lambda_2^* + \Lambda_0^* \Lambda_3^*) & 2(\Lambda_1^* \Lambda_3^* - \Lambda_0^* \Lambda_2^*) \\ -(\Lambda_2^*)^2 - (\Lambda_3^*)^2 & (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 + & 2(\Lambda_2^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_1^*) \\ 2(\Lambda_1^* \Lambda_2^* + \Lambda_0^* \Lambda_3^*) & +(\Lambda_2^*)^2 - (\Lambda_3^*)^2 & 2(\Lambda_2^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_1^*) \\ 2(\Lambda_1^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_2^*) & 2(\Lambda_2^* \Lambda_3^* - \Lambda_0^* \Lambda_1^*) & (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 - \\ & & -(\Lambda_2^*)^2 + (\Lambda_3^*)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega_u - & \cos u \sin \Omega_u + & \sin u \sin I \\ -\sin u \cos I \sin \Omega_u & +\sin u \cos I \cos \Omega_u & \\ -\sin u \cos \Omega_u - & -\sin u \sin \Omega_u + & \cos u \sin I \\ -\cos u \cos I \sin \Omega_u & +\cos u \cos I \cos \Omega_u & \\ \sin I \sin \Omega_u & -\sin I \cos \Omega_u & \cos I \end{pmatrix}.$$

Здесь φ – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); r – модуль радиуса-вектора \mathbf{r} центра масс КА; c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); p и e – параметр и эксцентриситет орбиты КА; u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА; $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА); Λ_j^* – компоненты кватерниона $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}(t^*)$, характеризующего конечное положение орбиты КА, Ω_ξ – отображение вектора $\mathbf{\Omega}$ абсолютной угловой скорости орбиты КА на базис ξ , \circ – символ кватернионного умножения.

Необходимо также минимизировать комбинированный функционал

$$J = \int_{t_0}^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 |u|) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0,$$

который характеризует затраты времени и характеристической скорости плоскости орбиты.

Задача решена с использованием принципа максимума Понтрягина. Введены сопряженные переменные M_j , χ , соответствующие фазовым переменным Λ_j , φ . Система сопряженных переменных имеет вид

$$2 \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi,$$

$$\frac{d\chi}{dt} = 2 \frac{\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} \frac{dr}{dt} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где M_j – компоненты сопряженного кватерниона \mathbf{M} .

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 u^2) + u r / 2c (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) + \chi c / r^2,$$

где N_1 , N_2 – компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{M}$. Верхняя волна означает сопряженный кватернион.

Оптимальное управление имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} u_{\max} \operatorname{sign} \nu_1, & \text{если } r|\nu_1|/2\alpha_2 c - 1 > 0, \\ 0, & \text{если } r|\nu_1|/2\alpha_2 c - 1 < 0, \\ \forall u \in [0, u_{\max}], & \text{если } r|\nu_1|/2\alpha_2 c - 1 = 0, \end{cases}$$

где $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$.

Для численного решения задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным и новой независимой переменной – истинной аномалии φ . В результате получена дифференциальная краевая задача восьмого порядка (1), для которой имеется шесть заданных краевых условий (2, 3). Рассматриваемая задача является задачей с подвижным правым концом траектории. Поэтому, используя равенство нулю функции Гамильтона–Понтрягина в конечный момент времени $H(t^*) = 0$, были построены два условия трансверсальности, имеющие вид

$$t = t^*, \quad M_0(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \operatorname{tg} \Omega_u) + M_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \operatorname{tg} \Omega_u) - \\ - M_2(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \operatorname{tg} \Omega_u) - M_3(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \operatorname{tg} \Omega_u) = 0, \\ N_3 = -M_0 \Lambda_3^* + M_1 \Lambda_2^* - M_2 \Lambda_1^* + M_3 \Lambda_0^* = 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00365).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
2. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.

3. *Козлов Е. А.* Решение задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты космического аппарата с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбиты // Проблемы критических ситуаций в точной механике и управлении: материалы Всерос. науч. конф. с Междунар. участием. Саратов, 2013. С. 248–252.

УДК 629

Ю. В. Крыщенко, И. А. Панкратов, Ю. Н. Челноков

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рассматривается задача об оптимальном управлении ориентацией орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, оптимально ориентированной в пространстве. Для построения оптимальных управлений КА используются уравнения, в состав которых входит новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, и принцип максимума Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала рассмотрены две интегральные функции, характеризующие расход массы либо расход энергии КА на перевод орбиты из начального в конечное состояние и время, затраченное на этот перевод. Работа является развитием [1, 2].

1. Постановка задачи оптимального управления. Поставим следующую задачу о переориентации орбиты КА: требуется построить ограниченное по модулю управление \mathbf{p} :

$$-p_{max} \leq p \leq p_{max} < \infty, \quad p = \pm |\mathbf{p}|, \quad (1)$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1, \quad \dot{r} = v_1, \quad \dot{c} = rp_2, \\ \dot{\varphi}_{tr} &= cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi_{tr} (cp_1 \cos \varphi_{tr} - \\ &\quad - (c + fMrc^{-1})p_2 \sin \varphi_{tr}), \\ 2\dot{\Lambda}^{or} &= \Lambda^{or} \circ \Omega_\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

из заданного начального состояния

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \\ c(0) &= c_0, \quad \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^0, \quad \Lambda_j^{or}(0) = (\Lambda_j^{or})^0 \quad (j = \overline{0,3}) \end{aligned} \quad (3)$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} A_1 &= \Lambda_0^{or}(t_k)\Lambda_1^* - \Lambda_1^{or}(t_k)\Lambda_0^* - \Lambda_2^{or}(t_k)\Lambda_3^* + \Lambda_3^{or}(t_k)\Lambda_2^* = 0, \\ A_2 &= \Lambda_0^{or}(t_k)\Lambda_2^* + \Lambda_1^{or}(t_k)\Lambda_3^* - \Lambda_2^{or}(t_k)\Lambda_0^* - \Lambda_3^{or}(t_k)\Lambda_1^* = 0, \\ A_3 &= \Lambda_0^{or}(t_k)\Lambda_3^* - \Lambda_1^{or}(t_k)\Lambda_2^* + \Lambda_2^{or}(t_k)\Lambda_1^* - \Lambda_3^{or}(t_k)\Lambda_0^* = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

и минимизирующее функционал

$$J_1 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 p^2) dt \text{ или } J_2 = \int_0^{t_1} (\alpha_1 + \alpha_2 |p|) dt, \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0. \quad (5)$$

Здесь p_j , $j = 1, 2, 3$, – компоненты вектора реактивного ускорения \mathbf{p} ; v_1 – проекция вектора скорости КА \mathbf{v} на направление его радиус-вектора \mathbf{r} , $r = |\mathbf{r}|$; c – модуль момента скорости КА; φ_{tr} – истинная аномалия управляемого КА; f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела; $\mathbf{\Lambda}^{or}$ – кватернион ориентации мгновенной орбиты КА.

В поставленной задаче заданы начальные значения фазовых координат КА $r, v_1, c, \varphi_{tr}, \Lambda_j^{or}$ ($j = \overline{0, 3}$); также заданы значения Λ_j^* ($j = \overline{0, 3}$).

Конечные значения фазовых координат принадлежат многообразию, задаваемому уравнениями (4). Это означает, что в данном случае необходимо совпадение ориентации орбиты с требуемой в конечный момент времени, при этом не требуется совпадений форм и размеров начальной и конечной орбит КА. Конечное значение момента времени t_k не фиксируется и подлежит определению в результате решения задачи.

2. Необходимые условия оптимальности. Задача решена с использованием принципа максимума Понтрягина. Введена дополнительная переменная g , удовлетворяющая дифференциальному уравнению $\dot{g} = \alpha_1 + \alpha_2 p^2$ либо уравнению $\dot{g} = \alpha_1 + \alpha_2 |p|$ и начальному условию $g(0) = 0$, и сопряженные переменные $\rho, s_1, e, \chi_{tr}, M_j^{or}$ ($j = \overline{0, 3}$) и ψ_0 , соответствующие фазовым переменным $r, v_1, c, \varphi_{tr}, \Lambda_j^{or}$ ($j = \overline{0, 3}$) и переменной g .

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \psi_0 \sigma + \rho v_1 + s_1 (c^2 r^{-3} - f M r^{-2} + p_1) + e r p_2 + \chi_{tr} c r^{-2} + \\ & + (\chi_{tr} - (1/2) N_3^{or}) r (c^2 - f M r)^{-1} \cos \varphi_{tr} (c p_1 \cos \varphi_{tr} - \\ & - (c + f M r c^{-1}) p_2 \sin \varphi_{tr}) + (N_1^{or} \cos \varphi_{tr} + N_2^{or} \sin \varphi_{tr}) r c^{-1} p_3 / 2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $N_1^{or}, N_2^{or}, N_3^{or}$ – компоненты кватерниона $\mathbf{N}^{or} = \widetilde{\mathbf{\Lambda}^{or}} \circ \mathbf{M}^{or}$, верхняя волна – символ сопряжения; σ – подынтегральное выражение в функционалах (5).

Сопряжённая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= F_1(s_1, c, r, \chi_{tr}, e, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}), & \dot{s}_1 &= -\rho, \\ \dot{e} &= F_2(s_1, c, r, \chi_{tr}, e, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}), & \dot{\psi}_0 &= 0, \\ \dot{\chi}_{tr} &= F_3(c, r, \chi_{tr}, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}), & 2\dot{\mathbf{M}}^{or} &= \mathbf{M}^{or} \circ \mathbf{\Omega}_\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Оптимальное управление \mathbf{p}^0 найдено из условия максимума функции H , определяемой соотношением (6), по переменной \mathbf{p} с учетом ограничения (1).

Условия трансверсальности на правом конце траектории, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа, имеют вид (при $t = t_k$)

$$\begin{aligned} \rho = 0, \quad s_1 = 0, \quad e = 0, \quad \chi_{tr} = 0, \\ \Lambda_0^* M_0^{or} + \Lambda_1^* M_1^{or} + \Lambda_2^* M_2^{or} + \Lambda_3^* M_3^{or} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию шестнадцати дифференциальных уравнений (2), (7) относительно фазовых и сопряженных переменных. При интегрировании уравнений появится шестнадцать произвольных постоянных интегрирования, семнадцатым неизвестным будет время t_k . Для определения постоянных и времени t_k имеем семнадцать условий: одиннадцать граничных условий (3)–(4), пять условий трансверсальности (8) и равенство гамильтониана нулю в конце движения, имеющее место для оптимального управления \mathbf{p}^{opt} и оптимальной траектории КА.

3. Анализ задачи. Уравнения задачи имеют первые интегралы:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{\Lambda}^{or}\|^2 = 1, \quad \|\mathbf{M}^{or}\|^2 = \text{const}, \quad \mathbf{M}^{or} \circ \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{or} = \text{const}, \\ H(r, v_1, \varphi_{tr}, \mathbf{\Lambda}^{or}, \rho, s_1, e, \chi_{tr}, \mathbf{M}^{or}, \mathbf{p}^{opt}) = 0. \end{aligned}$$

Использование кватернионной замены переменных $\mathbf{N}^{or} = \widetilde{\mathbf{\Lambda}}^{or} \circ \mathbf{M}^{or}$ позволяет понизить порядок системы без усложнения правых частей уравнений. Анализ сопряжённых уравнений показал, что при выполнении условия $\chi_{tr} = (1/2)N_3^{or}$ уравнения и соотношения краевой задачи существенно упрощаются.

Заключение.

Исследована задача об оптимальном управлении ориентацией орбиты КА, рассматриваемой в виде деформируемой фигуры, на основе новой модели движения центра масс КА.

Задача оптимальной переориентации орбиты КА сведена с использованием принципа максимума к краевой задаче, описываемой системой шестнадцати обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Найдены первые интегралы уравнений задачи. Получены законы управления, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности (принципу максимума). Построены условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи оптимальной пере-

ориентации орбиты упрощаются. Показано, что размерность краевой задачи может быть понижена на шесть единиц без усложнения уравнений задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. ч. II // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 92–107.

2. Крыщенко Ю. В., Челноков Ю. Н. Задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата как деформируемой фигуры // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 125–138.

УДК 629

Я. В. Лобанков, Ю. Н. Челноков, И. А. Панкратов

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В работе рассматривается задача оптимальной коррекции угловых элементов плоскости орбиты космического аппарата (КА) в центральном ньютоновском гравитационном поле посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Подобные задачи уже рассматривались в [1, 2]. Для решения задачи используется кватернионное уравнение движения центра масс КА, записанное в орбитальной системе координат; при этом КА рассматривается как точка переменной массы.

Движение центра масс КА рассматривается в инерциальной системе координат $OX_1X_2X_3$ – геоцентрической экваториальной системе координат с началом в центре O притяжения Земли. Введем орбитальную систему координат η , связанную с центром масс КА, и систему координат ξ , связанную с плоскостью орбиты.

Считаем, что вектор ускорения \mathbf{u} от тяги реактивного двигателя во все время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. Тогда орбита КА в процессе управления движением центра масс КА не меняет своей формы и размеров, а поворачивается в пространстве под действием управления \mathbf{u} как неизменяемая фигура.

Дифференциальные уравнения ориентации орбитальной системы координат имеют вид

$$2 \, d\boldsymbol{\lambda}/dt = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_\eta, \quad \boldsymbol{\omega}_\eta = ur/c \, \mathbf{i}_1 + c/r^2 \, \mathbf{i}_3, \quad (1)$$

$$d\varphi/dt = c/r^2, \quad r = p/(1 + e \cos \varphi), \quad c = \text{const}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$ – кватернион ориентации орбитальной системы координат КА в инерциальной системе координат $OX_1X_2X_3$; \mathbf{i}_j ($j = 1, 2, 3$) – мнимые единицы Гамильтона; φ – истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); r – модуль радиус-вектора \mathbf{r} центра масс КА; p и e – параметр и эксцентриситет орбиты; c – постоянная площадей (модуль вектора момента скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ центра масс КА); u – проекция вектора ускорения \mathbf{u} на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА); $\boldsymbol{\omega}_\eta$ – отображение вектора $\boldsymbol{\omega}$ на базис η .

Требуется определить ограниченное по модулю управление u :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm |\mathbf{u}|,$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (1), (2), переводящее плоскость орбиты КА из заданного начального состояния, описываемого соотношениями

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \boldsymbol{\Lambda}(t_0) = \boldsymbol{\Lambda}^0,$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = \boldsymbol{\lambda}^0 = \boldsymbol{\Lambda}^0 \circ (\cos \varphi_0/2 + \mathbf{i}_3 \sin \varphi_0/2),$$

в требуемое конечное состояние, описываемое соотношениями

$$t = t^*, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad \mathbf{n}^*(n_1^*, n_2^*, n_3^*), \quad n_1^* = 2(\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*),$$

$$n_2^* = 2(\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*), \quad n_3^* = (\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2,$$

и минимизирующее функционал качества процесса

$$J = \int_{t_0}^{t^*} 1 dt = t^* - t_0,$$

характеризующего время управляемого движения. Здесь n_i^* ($i = 1, 2, 3$) – заданные значения проекций единичного вектора \mathbf{n}^* , ортогонального плоскости орбиты КА, на оси инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ для конечного момента времени t^* .

Величины c , p , e , φ_0 , $\boldsymbol{\Lambda}^0$ ($\boldsymbol{\lambda}^0$) и \mathbf{n}^* заданы. Переменная $\boldsymbol{\Lambda}$ характеризует собой ориентацию орбиты КА. Начальные значения кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}$ находятся через заданные значения угловых элементов орбиты:

долготы восходящего узла Ω_u , наклона орбиты I и аргумента перицентра ω_π . Подлежат определению оптимальный закон управления $u(t)$, величины t^* и φ^* .

Задача решается с использованием принципа максимума Понтрягина. В соответствии с ним были введены переменные $\boldsymbol{\mu} = \mu_0 + \mu_1 \mathbf{i}_1 + \mu_2 \mathbf{i}_2 + \mu_3 \mathbf{i}_3$ и χ , сопряженные по отношению к фазовым переменным $\boldsymbol{\lambda}$ и φ соответственно, а также вспомогательная кватернионная переменная $\boldsymbol{\nu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\mu}$, где верхняя волна – символ сопряжения; построены функция Гамильтона–Понтрягина, система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных и закон оптимального управления. Важно отметить, что кватернионное сопряженное уравнение имеет вид кватернионного фазового уравнения в силу самосопряженности последнего.

Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = -1 + u \frac{r}{2c} \nu_1 + \frac{c}{r^2} \left(\frac{\nu_3}{2} + \chi \right).$$

Дифференциальные уравнения для сопряженных переменных найдены в виде

$$\begin{aligned} 2 \, d\boldsymbol{\mu}/dt &= \boldsymbol{\mu} \circ \boldsymbol{\omega}_\zeta, \quad \boldsymbol{\omega}_\zeta = ur/c \, \mathbf{i}_1 + c/r^2 \, \mathbf{i}_3, \\ d\chi/dt &= dr/dt \left[(\nu_3 + 2\chi)/r - \nu_1 ur^2/2c^2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{\omega}$ может трактоваться как вектор абсолютной угловой скорости некоторой системы координат ζ (сопряженной по отношению к орбитальной системе координат η), а $\boldsymbol{\omega}_\zeta$ – отображение этого вектора на базис ζ .

Закон оптимального управления, найденный из условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина по переменной u , имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} u_{\text{max}}, & \text{если } \nu_1 \geq 0, \\ -u_{\text{max}}, & \text{если } \nu_1 < 0. \end{cases}$$

Для реализации численного решения краевой задачи была разработана программа, использующая комбинацию метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности, модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Построены примеры численного решения задачи оптимальной переориентации плоскости орбиты КА из заданного начального положения в конечное со значениями абсолютной долготы восходящего узла $215^\circ 15'$ и наклона орбиты $64^\circ 8'$, соответствующих плоскости орбиты спутниковой системы ГЛОНАСС. На рис. 1, 2 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для случая, когда отличие в угловой мере между начальным и конечным положениями орбит составляет порядка 1° ; эксцентриситет орбиты $e = 0$.

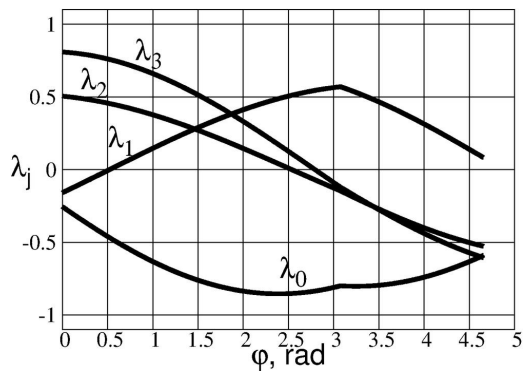


Рис. 1. Фазовые переменные

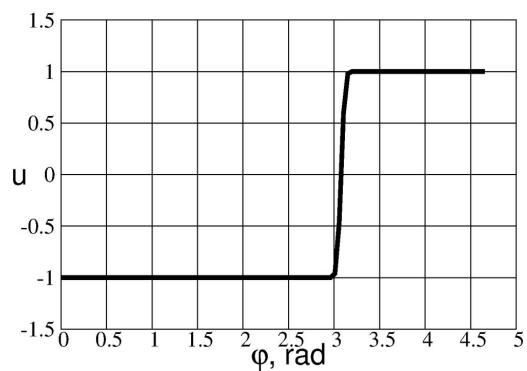


Рис. 2. Оптимальное управление

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратовского университета. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
2. Челноков Ю. Н. Переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.

УДК 531.38; 681.5

Е. И. Ломовцева, Ю. Н. Челноков

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ СТЭНФОРДСКОГО МАНИПУЛЯТОРА С ПРИМЕНЕНИЕМ БИКВАТЕРНИОННОЙ ТЕОРИИ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Методология решения обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов. Обратная задача кинематики заключается в определении обобщенных координат робота-манипулятора по известному угловому и линейному местоположению выходного звена (схвата) манипулятора. Применяется метод решения обратных задач кинематики роботов-манипуляторов [1], основанный на бикватернионной кинематической теории управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи. Он заключается в решении задачи Коши для дифференциальных кинематических уравнений движения схвата манипулятора. Векторы абсолютных линейной и угловой скоростей схвата манипулятора, содержащиеся в уравнениях, рассматриваются как управления и формируются по принципу обратной связи (см. [1]). В результате решения задачи Коши для любых заданных начальных значений обобщенных координат манипулятора его обобщенные координаты примут

в конечный момент времени значения, отвечающие требуемому положению схвата манипулятора, и обратная задача кинематики будет решена.

Введем следующие системы координат: $x y z$ – основная система координат, связанная с основанием манипулятора; $x_6 y_6 z_6$ – система координат, жестко связанная со схватом манипулятора; $x^{pr} y^{pr} z^{pr}$ – программная система координат, задающая требуемое конечное положение схвата манипулятора. Взаимное положение введенных систем координат зададим нормированными бикватернионами \mathbf{N} , \mathbf{M}^* , $\mathbf{\Lambda}$ конечных перемещений в соответствии со схемой перемещений

$$x y z \xrightarrow{\mathbf{N}} x^{pr} y^{pr} z^{pr} \xrightarrow{\mathbf{M}^*} x_6 y_6 z_6, \quad x y z \xrightarrow{\mathbf{\Lambda}} x_6 y_6 z_6,$$

где \mathbf{M}^* – собственный бикватернион ошибки местоположения схвата манипулятора; $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{N})$ – собственный бикватернион винтового конечного перемещения схвата манипулятора (программной системы координат) относительно основной системы координат $x y z$.

В качестве обобщенных координат манипулятора выступают углы относительных поворотов звеньев $\varphi_i (i = 1, 2, 4, 5, 6)$ и переменная d_3 , характеризующая линейное перемещение 3-го звена относительно 2-го. Обозначим обобщенные координаты манипулятора через q_i : $q_i = \varphi_i$, $i = 1, 2, 4, 5, 6$; $q_3 = d_3$.

Кинематические уравнения движения схвата манипулятора имеют вид матричного нелинейного дифференциального уравнения [2]

$$(\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3 \ \dot{q}_4 \ \dot{q}_5 \ \dot{q}_6)^T = A^{-1} (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3)^T \quad (1)$$

относительно переменных q_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Матрица A является функцией обобщенных координат: $A = A(q_1, q_2, \dots, q_6)$; ω_j , v_j , $j = 1, 2, 3$ – проекции векторов угловой и линейной скорости на оси системы координат $x_6 y_6 z_6$.

Простейший закон управления в нормированных бикватернионах имеет вид (см. [1])

$$\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s \mathbf{v}_x = -\left(2 \frac{K_{oc}^*}{M_0^*}\right) \mathbf{M}_{sc}^*, \quad \mathbf{M}^* = M_0^* + \mathbf{M}_{sc}^* = \overline{\mathbf{N}} \circ \mathbf{\Lambda}(t), \quad (2)$$

где $K_{oc}^* = k + sk^0$ – постоянный дуальный коэффициент усиления обратной связи, M_0^* и \mathbf{M}_{sc}^* – скалярная и винтовая части бикватерниона \mathbf{M}^* . Бикватернион $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид

$$\mathbf{\Lambda}(q_1, q_2, \dots, q_6) = \mathbf{\Lambda}_1(q_1) \circ \mathbf{\Lambda}_2(q_2) \circ \mathbf{\Lambda}_3(q_3) \circ \mathbf{\Lambda}_4(q_4) \circ \mathbf{\Lambda}_5(q_5) \circ \mathbf{\Lambda}_6(q_6), \quad (3)$$

где Λ_i – бикватернионы относительных конечных перемещений звеньев манипулятора (см. [2]).

Алгоритм решения обратной задачи кинематики заключается в численном интегрировании системы дифференциальных уравнений (1), дополненных соотношениями (2) и (3).

2. Анализ численного решения. Рассмотрено численное решение обратной задачи кинематики для заданного местоположения выходного звена, соответствующего следующим значениям обобщенных координат: $\varphi_1 = 20^\circ, \varphi_2 = 40^\circ, d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = -35^\circ, \varphi_5 = 60^\circ, \varphi_6 = -45^\circ$. Начальное местоположение схвата манипулятора задавалось фазовыми координатами: $\varphi_1 = -30^\circ, \varphi_2 = 15^\circ, d_3 = 0.1$ м, $\varphi_4 = 36^\circ, \varphi_5 = -90^\circ, \varphi_6 = 45^\circ$. Точность решения задачи полагалась равной 10^{-6} . Шаг интегрирования задавался равным 0.01. Коэффициент усиления обратной связи K_{oc} полагался равным 1.

Графики изменения обобщенных координат, главной и моментной частот бикватернионов ошибки местоположения, главной и моментной частот управления приведены на рис. 1–3.

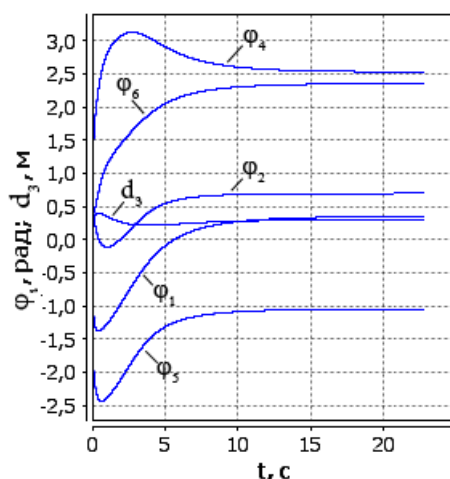


Рис. 1. Обобщенные координаты

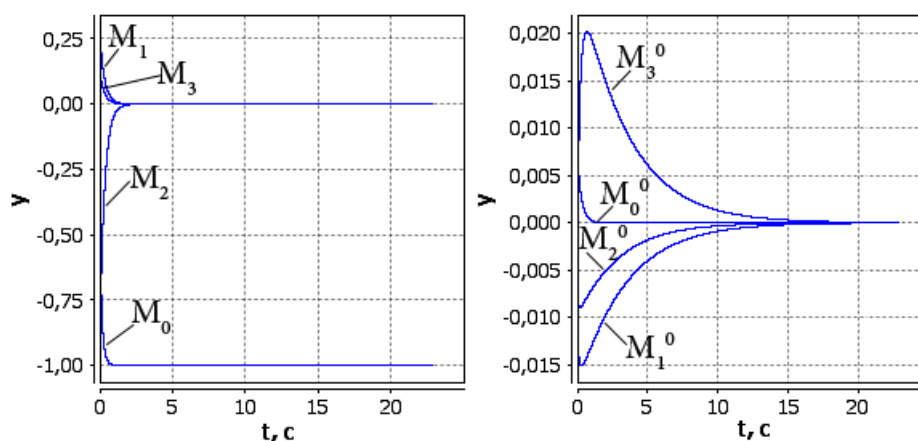


Рис. 2. Компоненты бикватерниона ошибки местоположения

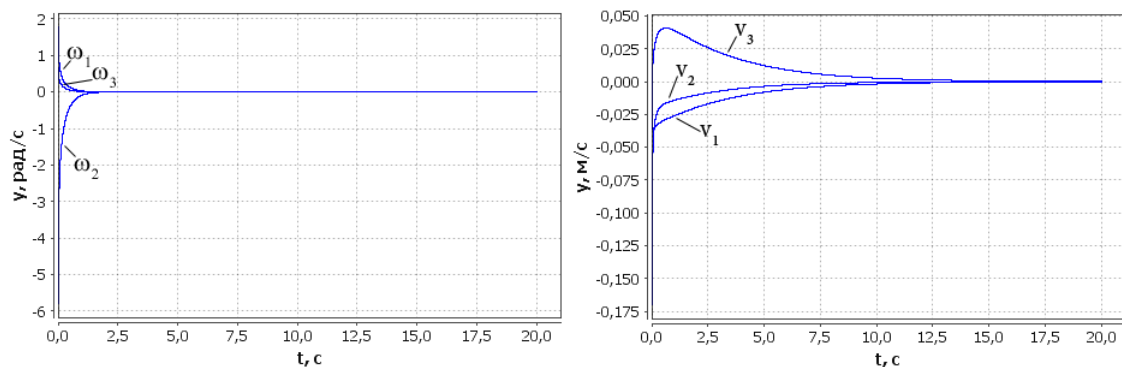


Рис. 3. Компоненты управления

В результате численного решения были получены следующие значения обобщенных координат: $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 40^\circ$, $d_3 = 0.3$ м, $\varphi_4 = 145^\circ$, $\varphi_5 = -60^\circ$, $\varphi_6 = 135^\circ$. Отметим, что в силу неоднозначности решения обратной задачи кинематики, полученные значения фазовых координат могут отличаться от значений, по которым вычислялся бикватернион конечного положения выходного звена. Компоненты бикватерниона ошибки местоположения выходного звена в ходе численного решения приняли следующие значения: $M_0 = -1$, $M_i = 0$, $M_j^0 = 0$; $i = 1, 2, 3$; $j = 0, 1, 2, 3$, что соответствует нашим ожиданиям. Отметим, что одной и той же требуемой ориентации схвата манипулятора отвечают два значения компоненты M_0 : $M_0 = \pm 1$. В нашем случае $M_0 = -1$. Компоненты управления в процессе управляющего движения асимптотически стремятся к нулю.

Требуемая точность решения достигается примерно за 40 секунд, однако для большей наглядности на рисунках приведены первые 20 секунд при выбранных параметрах решения задачи. В рассмотренном примере точность по главной части достигается значительно быстрее, чем по моментной.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Челноков Ю.Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 5. С. 30–42.
2. Ломовцева Е.И., Челноков Ю.Н. Применение бикватернионов в кинематике станфордского манипулятора // Математика. Механика : сб. науч. тр. 2012. Вып. 14. С. 123–126.

РАСЧЕТ ЦИРКУЛЯЦИИ ВОДЫ В ОЗЕРЕ

1. Постановка задачи. Для охлаждения течений в озерах, бассейнах и других водоемах приемлема упрощенная модель с целью начальной оценки циркуляции, которая затем может быть сопоставлена с результатами применения полных уравнений количества движения в мелководных бассейнах [1]. Такие течения могут описываться линеаризованными уравнениями, получающимися из уравнений количества движения, если в них пренебречь инерционными членами, т. е.

$$-fq_2 + \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + (\tau_1|_s - \tau_1|_b) = 0, \quad fq_1 + \rho g H \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + (\tau_2|_s - \tau_2|_b) = 0 \quad (1)$$

и членами, зависящими от времени в уравнении неразрывности:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0.$$

Здесь q_1 и q_2 – компоненты средних значений массового расхода; ρ – плотность воды; $H = h + \eta$, где h – расстояние от оси x_1 до дна, а η – возвышение свободной поверхности; $\tau_1|_s, \tau_2|_s$ – составляющие внутреннего напряжения трения на поверхности и $\tau_1|_b, \tau_2|_b$ – на дне.

Если значения η много меньше h , то в уравнениях (1) можно положить $H \approx h$. Следовательно,

$$-fq_2 + \rho gh \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + (\tau_1|_s - \tau_2|_b) = 0, \quad fq_1 + \rho gh \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + (\tau_2|_s - \tau_2|_b) = 0. \quad (2)$$

Тогда составляющие массового расхода определяются по формуле

$$\frac{q_i}{H} \approx \frac{q_i}{h} = \frac{\rho}{H} \int_{-h}^{\eta} v_i dx_3, \quad i = 1, 2.$$

Члены $\tau|_s$ обусловлены ветровыми напряжениями, а $\tau|_b$ есть составляющее напряжения трения на дне. Предполагается, что составляющие напряжения трения на дне прямо пропорциональны компонентам средних значений массового расхода:

$$\tau_1|_b = \gamma q_1; \quad \tau_2|_b = \gamma q_2.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2) по x_2 , а второе по x_1 , предполагая, что производные от h пренебрежимо малы (наклон дна мал), и вычтем одно из другого. Затем введем функцию тока ψ :

$$q_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad q_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

В итоге для определения ψ получим уравнение Пуассона

$$W = \gamma \nabla^2 \psi, \quad (3)$$

где $W = \partial \tau_1|_s / \partial x_2 - \partial \tau_2|_s / \partial x_1$ – величина, зависящая от ветрового воздействия; γ – коэффициент ветрового напряжения.

Граничные условия для этого уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

на береговых границах;

$$\psi = \bar{\psi} \quad (5)$$

на входе в водоем.

Уравнение (3) вместе с граничными условиями (4), (5) допускает вариационную формулировку и применение метода взвешенных невязок.

2. Воздействие ветра на озеро. Рассмотрим прямоугольное озеро $\Omega = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, которое подвержено воздействию ветра так, что W в уравнении (3) определяется как ($x = x_1, y = x_2$)

$$W = Ax + By + C, \quad A, B, C = \text{const.}$$

Будем искать решение $\varphi \approx \bar{\varphi}$ уравнения (3) в виде линейной комбинации базисных функций $\bar{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m$, где $N_m = x^{m+1} y^{m+1}$.

Применяя метод Галёркина ($W_l = -\bar{W}_l = N_l$), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_m вида

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial y^2} \right) W_l d\Omega + \int_d^c \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \bar{W}_l \right) \Big|_{x=a} dy + \\ & + \int_c^d \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \bar{W}_l \right) \Big|_{x=b} dy + \int_a^b \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \bar{W}_l \right) \Big|_{y=c} dx + \end{aligned}$$

$$+ \int_b^a \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} \bar{W}_l \right) \Big|_{y=d} dx = \iint_{\Omega} (Ax + By + C) W_l d\Omega. \quad (6)$$

Отметим, что интегралы, входящие в (6), берутся аналитически.

3. Примеры численного решения задачи.

Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab. Результаты численного решения задачи о циркуляции воды в озере приведены на рис. 1.

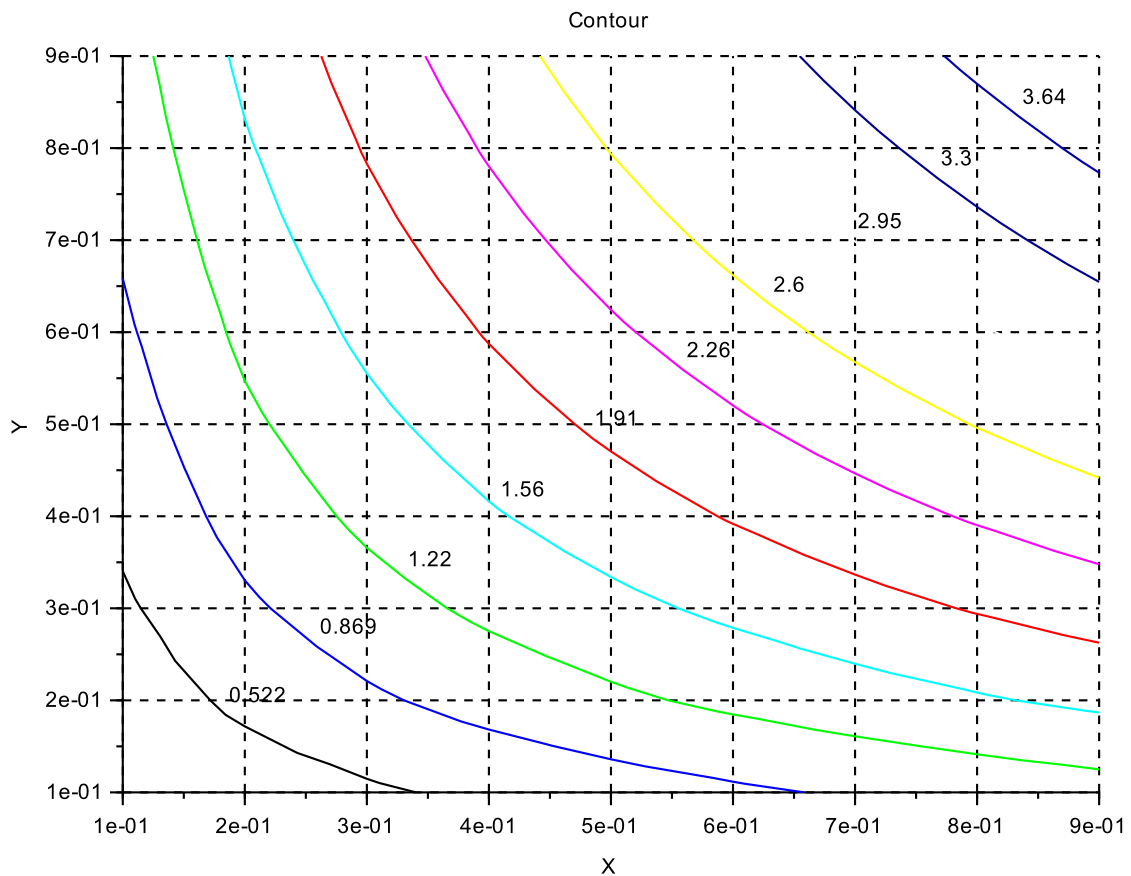


Рис. 1. Линии тока для $A = 2$, $B = 5$, $C = 1$, $M = 15$

Также был рассмотрен случай, когда внутри озера находится прямоугольный остров (рис. 2). Были проведены расчёты для различных положений острова внутри озера.

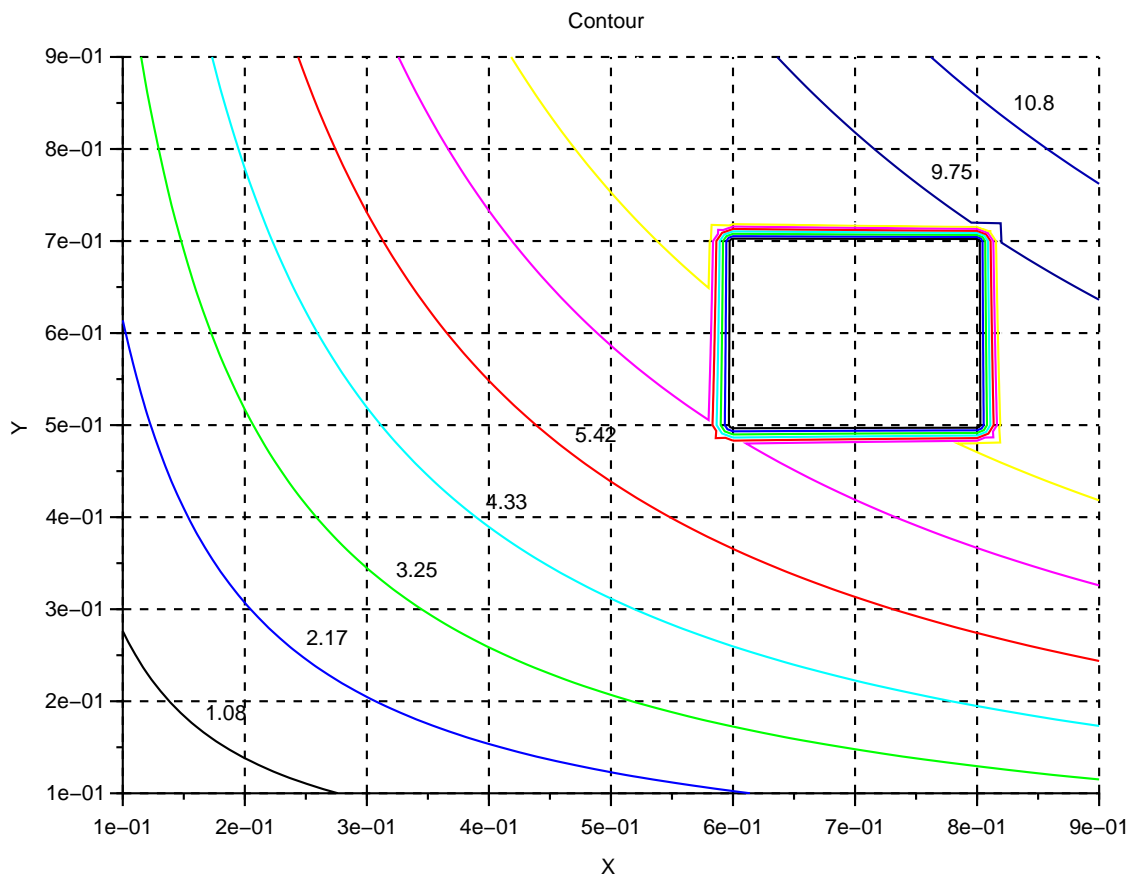


Рис. 2. Линии тока для $A = 8, B = 6, C = 7, M = 7$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л. : Судостроение. 1979. 264 с.

УДК 519.6, 531

И. А. Панкратов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ВЗВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, описываемую линейным векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} , A , B – матрицы следующего вида:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix},$$

а управление u есть скалярная функция, на которую не наложены ограничения.

Требуется перевести систему из начального положения

$$\text{при } t = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \quad (2)$$

в конечное

$$\text{при } t = T \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^k. \quad (3)$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^T u^2 dt. \quad (4)$$

Отметим, что минимум функционала (4) соответствует минимуму затрат энергии на управление, а время окончания управляемого процесса T считается заданным.

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Введем вектор сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$. Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$H = -u^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \psi_j A_{jk} x_k + \sum_{j=1}^n \psi_j B_j u.$$

Легко видеть, что сопряженная система имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = -A^T \boldsymbol{\psi}. \quad (5)$$

При этом оптимальное управление имеет вид

$$u^{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_j \psi_j. \quad (6)$$

Таким образом, задача сведена к краевой задаче с закрепленным правым концом траектории, описываемой системой $2n$ линейных дифференциальных уравнений (1), (5), (6) и $2n$ краевыми условиями (2), (3).

2. Метод взвешенных невязок. В настоящей работе предлагается искать приближённое решение рассматриваемой задачи оптимального управления в следующем виде [1]:

$$x_j \approx \hat{x}_j = x_j^0 + \sum_{k=1}^M a_{j,k} N_{j,k}(t),$$

$$\psi_j \approx \hat{\psi}_j = \sum_{k=1}^M a_{n+j,k} N_{n+j,k}(t); \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Здесь $N_{j,k}(t)$, $j = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$ – система линейно независимых базисных функций, удовлетворяющих определенным условиям.

Подставляя разложения (7) в уравнения (1) и (5), получим невязки $R_{[0;T]}^{x_i}$, и $R_{[0;T]}^{\psi_i}$. Для получения приближённых равенств $R_{[0;T]}^{x_i} = 0$ и $R_{[0;T]}^{\psi_i} = 0$ при $t \in [0; T]$ воспользуемся методом Галёркина, выбрав систему весовых функций $W_{s,k} = N_{s,k}$, $s = \overline{1, 2n}$, $k = \overline{1, M}$ и требуя, чтобы выполнялись два равенства

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{x_s} N_{s,k} dt = 0, \quad s = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, M}, \quad (8)$$

$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt + (\hat{x}_{s-n} - x_{s-n}^k) \widetilde{W}_{s,k} \Big|_{t=T} = 0, \quad n < s \leq 2n; \quad k = \overline{1, M}. \quad (9)$$

В общем случае весовые функции $W_{s,k}$ и $\widetilde{W}_{s,k}$ могут быть выбраны независимо, но из результатов численного решения задачи следует, что удобно взять $\widetilde{W}_{s,k} = -N_{s,k}$, $s = \overline{n+1, 2n}$; $k = \overline{1, M}$. Отметим также, что при аппроксимации различных фазовых и сопряженных переменных можно использовать одинаковые базисные функции:

$$\begin{aligned} N_{1,k} &= N_{2,k} = \dots = N_{n,k} = N_k^x; \\ N_{n+1,k} &= N_{n+2,k} = \dots = N_{2n,k} = N_k^\psi, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Уравнения (9) с учётом (7) можно записать так:

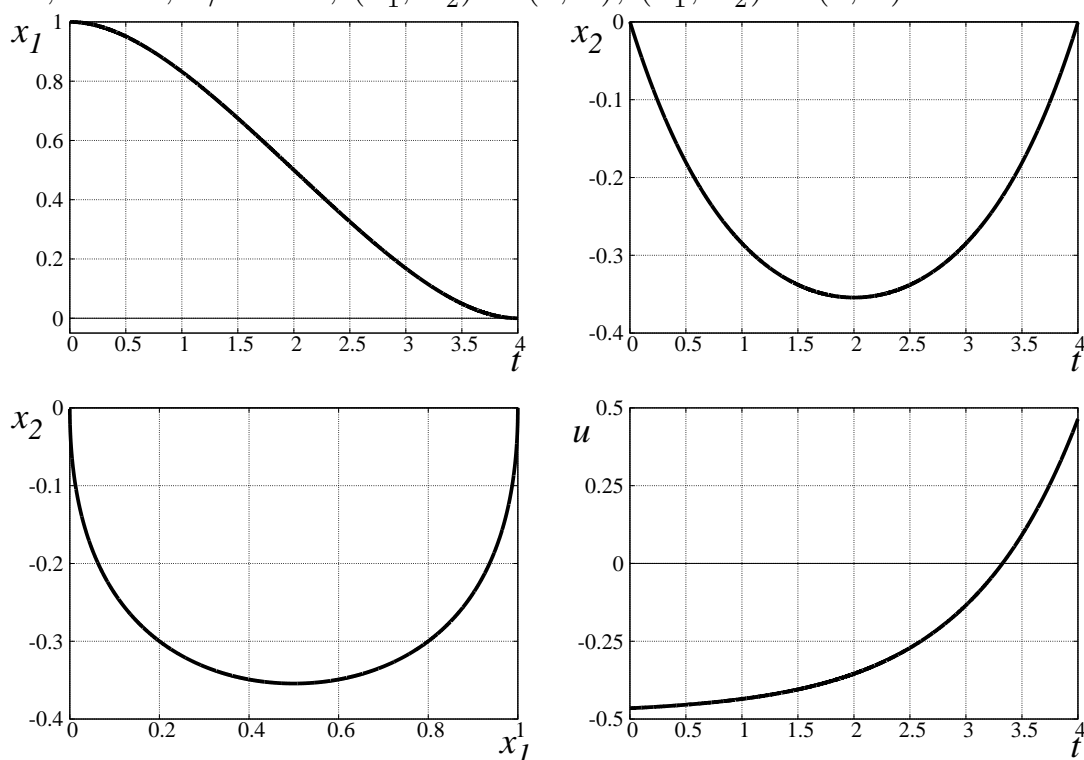
$$\int_0^T R_{[0;T]}^{\psi_{s-n}} N_{s,k} dt = \left(x_{s-n}^k - \sum_{k=1}^M a_{s-n,k} N_{s-n,k}(T) - x_{s-n}^0 \right) \widetilde{W}_{s,k}(T), \quad (10)$$

где $s = \overline{n+1, 2n}$; $k = \overline{1, M}$.

Соотношения (8), (10) представляют собой систему $2Mn$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных. Решив её, мы закончим процесс построения приближённого решения уравнений (1), (5), удовлетворяющих условиям (2) и (3).

3. Пример численного решения задачи. Пусть материальная точка массы m кг движется под действием некоторой управляющей силы $F(t)$ и силы сопротивления $F_{\text{сопр}} = -k v$. Введём фазовые координаты $x_1 = x$ (координата точки), $x_2 = dx/dt = v$ (скорость точки) и управляющий параметр $u = F(t)/m$. На рисунке показаны результаты

решения задачи о движении точки для следующих значений параметров: $M = 9$, $T = 4$, $k/m = 1$, $(x_1^0; x_2^0) = (1; 0)$, $(x_1^K; x_2^K) = (0; 0)$.



Управляемое движение точки с учётом силы сопротивления

Из рисунка видно, что при $t = 2$ скорость точки достигает своего минимального значения и $t = 2$ – точка перегиба функции $x_1 = x_1(t)$. При этом погрешность определения конечного значения координаты точки меньше погрешности определения скорости точки в конце движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир. 1986. 318 с.

УДК 532

И. А. Панкратов, Д. С. Рымчук

РАСЧЁТ ТЕЧЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

1. Постановка задачи. Уровень знаний и недостаточность известных данных во многих случаях не оправдывают применения более сложных математических моделей для исследования течений в прибрежных водах, в озерах и т. д., чем модели, основанные на численном решении двухмерных уравнений, полученных путем применения усредненных

по вертикали характеристик (так называемых уравнений мелкой воды). Трехмерные же решения на данном этапе нецелесообразны, так как они потребовали бы большого количества дополнительной информации и машинного времени.

Для решения задач циркуляции воды в водоемах может быть использован метод конечных разностей. Известно, что разностные схемы имеют недостаточно гибкие сетки и в некоторых случаях очень трудно удовлетворить граничным условиям. В этом отношении конечные элементы дают возможность применять значительно более гибкую разбивку.

Основные уравнения движения жидкости при упрощениях, в результате которых получаются уравнения мелкой воды, можно записать в виде [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{H} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (N_{11} - N_p) + B_1; \end{cases} \quad (1)$$

Здесь q – поток количества жидкости; ρ – плотность жидкости; $H = h + \eta$, h – расстояние от оси x до дна, а η – возвышение свободной поверхности; N_{11} , N_p , B_1 – сложные выражения.

2. Метод взвешенных невязок. Применив процедуры метода взвешенных невязок к системе уравнений (1), получим

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{H} \right) + \frac{\partial N_p}{\partial x} - B_1 \right\} W_l d\Omega = 0, \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} \right\} W_l d\Omega = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Слагаемые B_1 и $\partial N_p / \partial x$ можно объединить, и тогда

$$B_1^* = B_1 - \frac{\partial N_p}{\partial x} = \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{c^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q^2}{H^2} - \rho g H \frac{\partial H}{\partial x} - H \frac{\partial p_a}{\partial x}.$$

Здесь γ^2 – коэффициент ветрового напряжения; ρ_a – плотность воздуха; W – скорость ветра, θ – угол между осью x и направлением ветра; g – ускорение свободного падения; c – коэффициент Шези; p_a – атмосферное давление.

Пусть атмосферное давление в области Ω постоянно, тогда последнее слагаемое в B_1^* равно нулю. В уравнениях мелкой воды могут быть также отброшены конвективные члены, т. е. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{H} \right)$.

После переноса нелинейной части первого уравнения из (2) направо, окончательно указанная система примет вид

$$\begin{cases} \iint_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega = \iint_{\Omega} \left\{ \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{c^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{q^2}{H^2} - \rho g H \frac{\partial H}{\partial x} \right\} d\Omega, \\ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\partial \rho H)}{\partial t} \right\} d\Omega = 0. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве пробных функций для q выберем $N_{qk} = x^k(1-k)t^k$, а для H : $N_{Hk} = x^{k-1}t^k$.

Воспользуемся методом Галёркина. Решение системы (2) будем искать в виде

$$q \approx \tilde{q} = \sum_{k=1}^M a_k x^k (1-x) t^k, \quad H \approx \tilde{H} = \sum_{k=1}^M b_k x^{k-1} t^k + H_0(x, 0), \quad (4)$$

где M – количество базисных функций, a_k, b_k – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (4) в (3), получим итоговую систему нелинейных алгебраических уравнений:

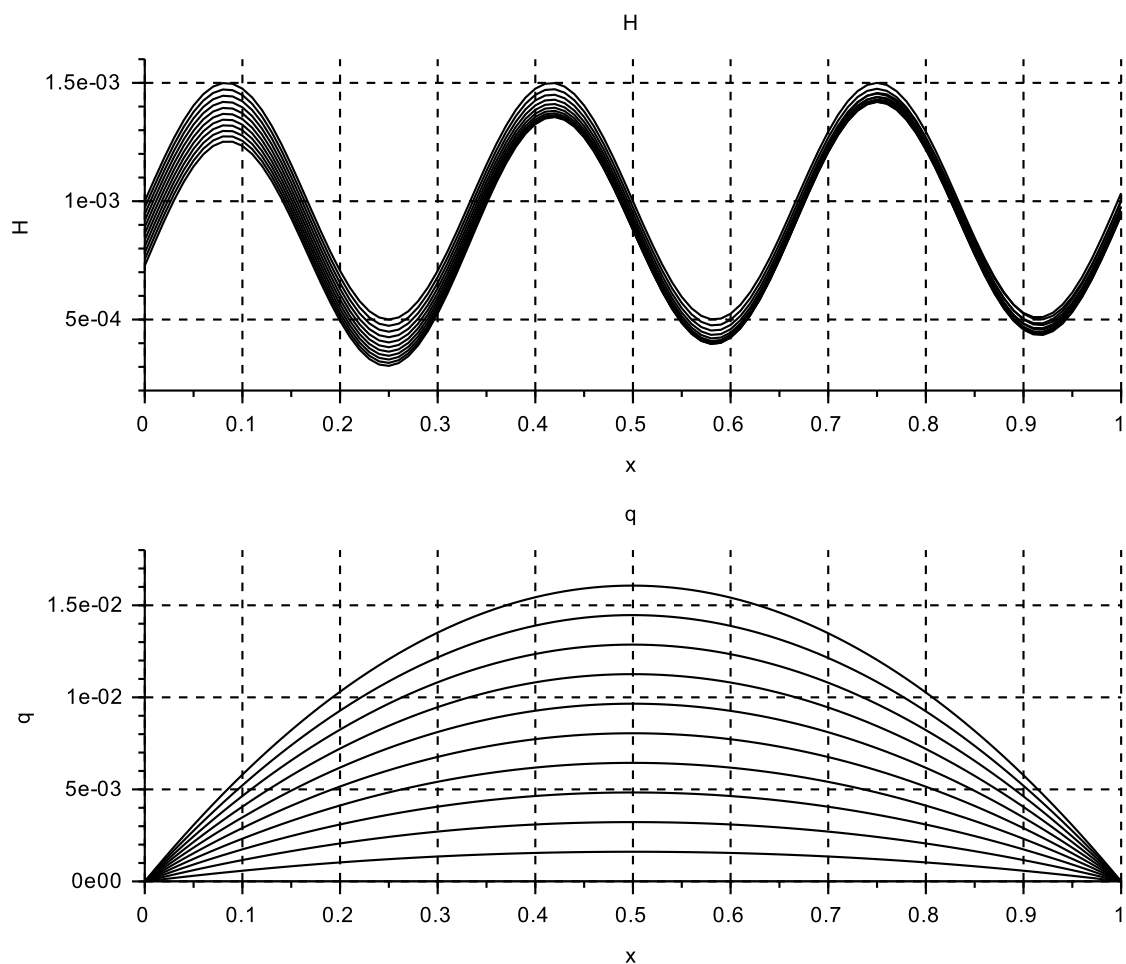
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^M a_k \iint_{\Omega} (x^k (1-x) k t^{k-1}) d\Omega = \\ = \iint_{\Omega} \left\{ \gamma^2 \rho_a W^2 \cos \theta - \left(\frac{g}{c^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\left(\sum_{k=1}^M a_k x^k (1-x) t^k \right)^2}{\left(\sum_{k=1}^M b_k x^{k-1} t^k + H_0(x, 0) \right)^2} - \right. \\ \left. - \rho g \left(\sum_{k=1}^M b_k x^{k-1} t^k + H_0(x, 0) \right) \frac{\partial \left(\sum_{k=1}^M b_k x^{k-1} t^k + H_0(x, 0) \right)}{\partial x} \right\} d\Omega, \\ \sum_{k=1}^M a_k \iint_{\Omega} t^k (k x^{k-1} - (k+1) x^k) d\Omega + \sum_{k=1}^M b_k \rho \iint_{\Omega} x^k k t^{k-1} d\Omega = 0. \end{cases}$$

Отметим, что область интегрирования является прямоугольником $\Omega = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

3. Пример численного решения задачи. Для численного решения задачи была составлена программа с помощью математического пакета Scilab. Нелинейная система уравнений вида

$$K \mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{a}^k)$$

решалась с помощью метода простой итерации с нулевым начальным приближением для вектора неизвестных $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_M)^T$. Результаты решения нелинейной системы уравнений, описывающей течение мелкой воды, приведены на рисунке. (Предполагается, что дно параллельно оси x , т. е. $h \equiv 0$.)



Высота свободной поверхности и поток ($M = 2, T = 3$)

Показаны законы изменения высоты свободной поверхности H и потока q . Разные линии на графиках соответствуют разным моментам времени $t = 0, 0.3, \dots, 3.0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коннор Дж., Бреббиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. 264 с.

Я. Г. Сапунков

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫВОДЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИМПУЛЬСНОЙ ТЯГОЙ НА ОРБИТУ В KS-ПЕРЕМЕННЫХ

В статье с использованием KS-переменных [1] решается задача об оптимальном выводе космического аппарата (КА) с импульсным двигателем на заданную орбиту. С помощью принципа максимума Понтрягина решение задачи оптимального управления сведено к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений по определению фазовых и сопряженных переменных. С помощью предельного перехода, в котором максимальное значение допустимой тяги неограниченно возрастает, получены соотношения для скачков фазовых и сопряженных переменных в момент сообщения импульса [2]. Краевая задача решается с помощью композиции модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Представлены два примера численного решения задачи.

1. Постановка задачи. Переменные Кустаанхеймо—Штифеля или KS-переменные $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3)$ связаны с векторами положения \mathbf{r} и скорости \mathbf{v} центра масс КА соотношениями [2]

$$\mathbf{r} = P^T(\mathbf{u})\mathbf{u}; \quad \mathbf{v} = (2/r)P^T(\mathbf{u})\mathbf{s}; \quad r = |\mathbf{r}| = u^2. \quad (1)$$

В начальный момент времени КА находится на эллиптической орбите, которая определяется классическими элементами (a – большая полуось, e – эксцентриситет, I – угол наклона орбиты, Ω_u – долгота восходящего узла, ω_π – угловое расстояние от восходящего узла до перицентра):

$$a = a_n, \quad e = e_n, \quad I = I_n, \quad \Omega_u = \Omega_{un}, \quad \omega_\pi = \omega_{\pi n}. \quad (2)$$

Истинная аномалия КА в начальный момент определяется полярным углом

$$\varphi = \varphi_{0n}. \quad (3)$$

Требуется перевести КА на новую эллиптическую орбиту с классическими элементами:

$$a = a_k, \quad e = e_k, \quad I = I_k, \quad \Omega_u = \Omega_{uk}, \quad \omega_\pi = \omega_{\pi k}. \quad (4)$$

Масштаб координат положения R (параметр эллиптической орбиты), масштаб координат скорости и импульса тяги, отнесенного к единице массы КА, V , масштаб времени T определяются по формулам

$$R = a_{\text{H}}^{\text{разм}}(1 - e_{\text{H}}^2), \quad V = (\gamma M/R)^{1/2}, \quad T = R(R/(\gamma M))^{1/2}, \quad (5)$$

где M – масса притягивающего центра, γ – гравитационная постоянная.

Большая полуось в результатах расчетов, представленных ниже, отнесена к размерному значению большой полуоси начальной орбиты.

Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет свертку двух критериев: времени и суммы величин импульсов тяги, затраченных на процесс управления, с весовыми множителями α_0 , α_1 , и в безразмерных переменных имеет вид

$$J = \alpha_0 t_{\text{к}} + \alpha_1 \sum_{i=1}^n |\mathbf{imp}_i|, \quad (6)$$

где $t_{\text{к}}$ – длительность процесса управления, $|\mathbf{imp}_i|$ – величина импульса, отнесенного к единице массы КА, n – число импульсов.

2. Примеры численного решения задачи. Результаты расчетов, кроме угловых элементов орбиты, представлены в безразмерных переменных. В начальный момент времени КА находится на эллиптической орбите, которая определяется классическими элементами $a_{\text{H}} = 1.0$, $e_{\text{H}} = 0.1$, $I_{\text{H}} = 5.0^\circ$, $\Omega_{\text{uH}} = 30.0^\circ$, $\omega_{\text{пH}} = 50.0^\circ$; истинная аномалия положения КА на орбите $\varphi_{\text{H}} = 0.5$ радиан.

Начальное состояние КА при $t = 0$ в первом и втором примерах

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.292240, & x_2 &= 0.868089, & x_3 &= 0.078557, \\ v_1 &= -1.478540, & v_2 &= -0.428856, & v_3 &= 0.032184. \end{aligned}$$

В первом примере орбита, на которую необходимо перевести КА, определяется классическими элементами $a_{\text{к}} = 1.0$, $e_{\text{к}} = 0.1$, $I_{\text{к}} = 8.0^\circ$, $\Omega_{\text{ук}} = 34.0^\circ$, $\omega_{\text{пк}} = 46.0^\circ$; т.е. решается задача об оптимальной переориентации орбиты. Весовые множители в функционале (6) в первом примере $\alpha_0 = 1.0$, $\alpha_1 = 2.5$. Оптимальное управление состоит из двух импульсов, которые сообщаются в начальный и конечный момент времени, и пассивного полета КА по промежуточной орбите.

Координаты и величина первого импульса следующие:

$$\text{imp}_1 = 0.00626, \quad \text{imp}_2 = -0.00992, \quad \text{imp}_3 = 0.10665, \quad |\mathbf{imp}| = 0.10729.$$

Координаты вектора скорости КА после сообщения импульса

$$v_1 = -1.472277, \quad v_2 = -0.438774, \quad v_3 = 0.138834.$$

После сообщения первого импульса КА на промежутке $0.0 < t < 0.487559$ совершает пассивный полет по орбите с классическими элементами $a_{\text{пас}} = 1.004243$, $e_{\text{пас}} = 0.102826$, $I_{\text{пас}} = 6.981823^\circ$, $\Omega_{u \text{ пас}} = 64.152157^\circ$, $\omega_{\pi \text{ пас}} = 17.817078^\circ$.

Состояние управляемого КА в конце пассивного этапа такое:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.862459, & x_2 &= 0.432056, & x_3 &= 0.118121, \\ v_1 &= -0.774826, & v_2 &= -1.242409, & v_3 &= 0.019060. \end{aligned}$$

Координаты и величина второго импульса и координаты вектора скорости КА после сообщения импульса определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \text{imp}_1 &= 0.00626, & \text{imp}_2 &= -0.00992, & \text{imp}_3 &= 0.10665, & |\mathbf{imp}| &= 0.10729. \\ v_1 &= -1.472277, & v_2 &= -0.438774, & v_3 &= 0.138834. \end{aligned}$$

Значение функционала $J = 1.010670$.

Во втором примере орбита, на которую необходимо перевести КА, определяется классическими элементами: $a_{\text{к}} = 1.52$, $e_{\text{к}} = 0.1$, $I_{\text{к}} = 8.0^\circ$, $\Omega_{u \text{ к}} = 34.0^\circ$, $\omega_{\pi \text{ к}} = 46.0^\circ$.

Весовые множители в функционале (6) $\alpha_0 = 1.0$, $\alpha_1 = 10.0$. Оптимальное управление так же, как и в первом примере, состоит из двух импульсов, которые сообщаются в начальный и конечный моменты времени, и этапа пассивного полета по промежуточной орбите.

Координаты и величина первого импульса и координаты вектора скорости КА после сообщения импульса определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \text{imp}_1 &= -0.16181, & \text{imp}_2 &= 0.05379, & \text{imp}_3 &= -0.03905, & |\mathbf{imp}| &= 0.17493. \\ v_1 &= -1.472277, & v_2 &= -0.438774, & v_3 &= 0.138834. \end{aligned}$$

После сообщения импульса КА на промежутке $0.0 < t < 2.439017$ совершает пассивный полет по орбите с классическими элементами $a_{\text{пас}} = 1.303016$, $e_{\text{пас}} = 0.315968$, $I_{\text{пас}} = 4.955154^\circ$, $\Omega_{u \text{ пас}} = 10.180309^\circ$, $\omega_{\pi \text{ пас}} = 74.438054^\circ$.

Состояние управляемого КА в конце пассивного этапа такое:

$$\begin{aligned} x_1 &= -0.741581, & x_2 &= -1.504768, & x_3 &= -0.117046, \\ v_1 &= 0.757296, & v_2 &= -0.531333, & v_3 &= -0.056946. \end{aligned}$$

Координаты и величина второго импульса: $\text{imp}_1 = 0.155816$, $\text{imp}_2 = 0.055903$, $\text{imp}_3 = -0.070209$, $|\mathbf{imp}| = 0.179814$.

Координаты вектора скорости КА после сообщения импульса: $v_1 = 0.913112$, $v_2 = -0.475430$, $v_3 = -0.127155$.

Значение функционала $J = 5.986480$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М. : Наука, 1975. 304 с.

2. Сапунков Я. Г. Оптимальное управление космическим аппаратом с двигателем ограниченной или импульсной тяги и солнечным парусом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 55–61.

УДК 519.257

Г. П. Шиндяпин, А. А. Матутин, Ю. Д. Баранова

ВЛИЯНИЕ ГАЗСОДЕРЖАНИЯ ВОДНОЙ СРЕДЫ НА ВОЗНИКАЮЩИЕ РЕЖИМЫ УДАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА

Методами асимптотической теории коротких волн [1, 2] исследуется влияние газосодержания водной среды на возникающие режимы рефракции ударной волны (УВ) с невырожденным фронтом преломлённой УВ в воздухе.

1. При падении УВ AR, BR (рис. 1) относительной интенсивности $\varepsilon = \frac{p_1 - p_0}{p_0}$ под углом α к вертикали на свободную поверхность AF океана, разделяющую воздух и воду с газосодержаниями γ^+ , γ^- , возникают различные режимы рефракции [3]: RR – регулярной; NR – нерегулярной; FNR – free Neumann ref. – с волной разрежения; RW – регулярной с отражённой УВ; TNR – twin Neumann ref. – двойной отражённой УВ.

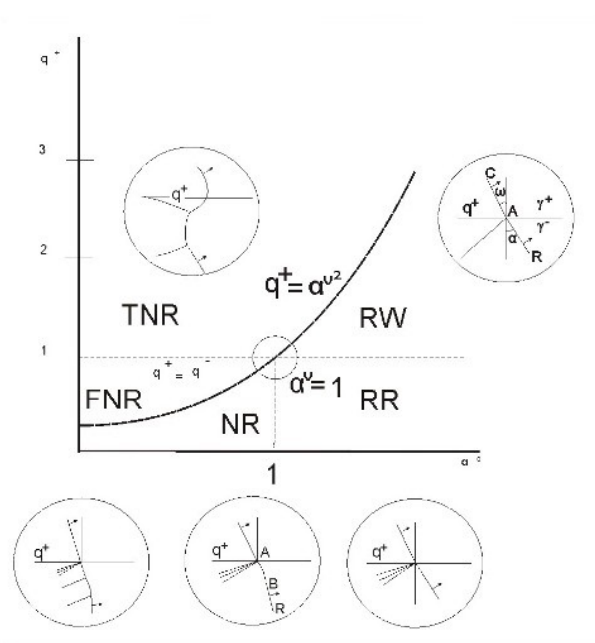


Рис. 1. Точка 5-ти режимов при $\varepsilon = 0.01$

Особый интерес представляет положение точки « K » – точки 5-ти режимов, в зависимости от ε , α , γ , $\gamma = \gamma^- = \frac{m_{II}}{m_I}$ – относительного газосодержания, (m_{II} – масса пузырьков газа, m_I – масса жидкости при пузырьковом режиме течения ($0 \leq \gamma^- \leq 10^{-4}$)), $q^+ = \frac{p_A^+ - p_0}{p_1 - p_0}$ – интенсивности преломлённой УВ.

При использовании модели гомогенной локально равновесной пузырьковой среды с газосодержаниями γ^- для жидкости и $\gamma^+ = \infty$ для газа были установлены [1, 4] основные параметры для относительно слабых УВ (ρ_0 – плотность, c_0 – скорость звука)

$$\bar{\varepsilon} \ll 1, \quad \bar{\varepsilon} = L0(\gamma^-)\varepsilon = R_0(\gamma^-)P_{10}, \quad P_{10} = \frac{p_1 - p_0}{\rho_0(\gamma^-)},$$

$$B_0(\gamma^-) = \rho_0(\gamma^-)c_0^2(\gamma^-), \quad L0(\gamma^-) = \frac{p_0 R_0(\gamma^-)}{B_0(\gamma^-)}. \quad (1)$$

Для точки A – падения УВ AR на свободной поверхности были установлены [5] инварианты рефракции: (I) $c_0^+ \xi_A^- = c_0^- \xi_A^+$; (II) $v^+ = v^-$.

В переменных теории коротких волн (см. [1]) (для областей больших градиентов):

$$\frac{x}{c_0 t} = \xi = 1 + \bar{\varepsilon}X, \quad \frac{y}{c_0 t} = \eta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y, \quad \frac{R}{c_0 t} = 1 + \bar{\varepsilon}\delta, \quad \theta = \bar{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}Y,$$

$$\delta = X + \frac{1}{2}Y^2, \quad \frac{u}{c_0} = \bar{\varepsilon} \frac{\mu}{R_0}, \quad \frac{v}{c_0} = \bar{\varepsilon}^{\frac{3}{2}} \frac{\nu}{R_0},$$

$$\frac{p_1 - p_0}{B_0} = P_{10}P^{(1)}, \quad \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = P_{10}H^{(1)}. \quad (2)$$

Течения в областях возмущения (за фронтом УВ) описываются системой уравнений коротких волн (см. [1]):

$$\mu(\mu - 2\delta)\mu_\delta + \nu_Y + 3\mu = 0, \quad \mu_Y = \nu_\delta, \quad \mu = P^{(1)} = H^{(1)}. \quad (3)$$

Решение (3) для волны разрежения имеет вид

$$\mu = -\frac{1}{2}z^2 + \delta_A, \quad \nu = \frac{1}{3}z^3 + \mu Y + d, \quad z = \frac{X - X_A}{Y}. \quad (4)$$

Решение за фронтом Маха имеет вид

$$\mu = 1 - m\sqrt{1 - \delta}, \quad \nu = 1 + (m^2 - 1)(Y - Y_B),$$

$$(Y_B = \alpha^\nu - 1, 1 - m^2 = \delta_A). \quad (5)$$

На фронтах УВ $X = X * (Y)$, ограничивающих области возмущения, имеем условия (см. [1]) (μ' , ν' – значения перед фронтом)

$$X - \Psi^\nu Y = \frac{1}{2}(\Psi^{\nu^2} + \mu + \mu'), \quad \Psi^\nu = \frac{dX}{dY};$$

$$(\mu - \mu')(\Psi^\nu + Y) = \nu' - \nu, \quad P^{(1)} = H^{(1)} = \mu. \quad (6)$$

В точке А за фронтом в NR имеем $\mu_A = q^-$ перед передним фронтом волны разрежения, $\mu_A = q^+$ – за задним фронтом волны разрежения:

$$q^- = \frac{p_A^- - p_0}{p_1 - p_0}, \quad q^+ = \frac{p_A^+ - p_0}{p_1 - p_0}. \quad (7)$$

Вследствие равенства давлений (сверху и снизу) на свободной поверхности за точкой А значение q^+ (как функция ε , α , γ) характеризует интенсивность преломлённой УВ AC в воздухе при всех режимах. В переменных (2) теории коротких волн инварианты I, II имеют вид (см. [4])

$$(I) : \omega^{\nu^2} = 2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{L} + q^-, \quad \omega^\nu = \frac{tg\omega}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha^\nu = \frac{tg\alpha}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

$$(II) : q^+ \bar{\rho} \bar{c} \omega^\nu = \frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d. \quad (9)$$

Исключая ω^ν из (8), (9), получим для режимов NR , RR и RW выражение для q^+ :

$$q^{+2} (\bar{\rho} \bar{c})^2 (2c_\gamma + \alpha^{\nu^2} - \frac{q^+}{L} + q^-) = [\frac{1}{3}(2X_A - 2q^+)^{\frac{3}{2}} + d]^2. \quad (10)$$

Здесь параметры подобия

$$C_\gamma = \frac{c_0^- - c_0^+}{c_0^- \varepsilon}, \quad \bar{L} = \frac{L_0^-}{L_0^+}, \quad \alpha^\nu = \frac{tg\alpha}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad \bar{\rho} \bar{c} (\bar{\rho} = \frac{\rho_0^-}{\rho_0^+}, \quad \bar{c} = \frac{c_0^-}{c_0^+}). \quad (11)$$

Для режима RR правая часть (10) имеет вид (см. [4])

$$[\frac{1}{3}((\alpha^{\nu^2} + 1) - q^+)^{\frac{3}{2}} + \alpha^\nu - \frac{1}{3}((\alpha^{\nu^2} - 1)^{\frac{3}{2}})]^2; \quad (12)$$

для режима NR –

$$[\frac{1}{3}(2(q^- - q^+))^{\frac{3}{2}} + (q^-)^{\frac{3}{2}}]^2; \quad (13)$$

для режима RW –

$$[\alpha^\nu - (q^+ - 1)\sqrt{\alpha^{\nu^2} - q^+}]^2. \quad (14)$$

Правые части (12)–(14) совпадают вдоль линии $q^+ = 1.0$ (см. рис. 1), когда исчезает волна разрежения, а отражённые УВ нулевой интенсивности. В этих случаях линия $q^+ = 1.0$ является границей режимов RR и RW ; FNR и TNR . Другие границы согласно (12)–(14) (подчёркнутые выражения) возникают при $\alpha^\nu = 1.0$ – между NR и RR ; при $q^+ = q^-$ – между NR и FNR ; при $q^+ = \alpha^\nu$ – между RW и TNR .

2. Точка « K » – точка 5-ти режимов на пересечении границ: $q^+ = 1.0$, $q^+ = \alpha^{\nu^2}$, $q^+ = q^-$, т. е. в ней

$$q^+ = q^- = \alpha^\nu = 1.0. \quad (15)$$

Определим положение этой точки в пространстве ε , α , γ .

Основные уравнения (10) относительно q^+ третьей степени, однако, его решение при $q^+ = 1.0$ и при $\bar{\rho c} \gg 1$ ($\bar{\rho c} \approx 10^6$ при $\gamma \approx 10^6$) и отбрасывание правой части происходит за счёт обращения в ноль скобки левой части, т. е. при

$$2(1 + c_\gamma) = \frac{1}{\bar{L}}. \quad (16)$$

Подставляя c_γ , \bar{L} согласно (11) в (1), получим зависимости $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$, $\alpha = \alpha(\gamma, \varepsilon)$:

$$\varepsilon = \frac{2(c_0^-(\gamma) - c_0^+)}{c_0^-(\gamma)(L_0^+ - 2L_0^-(\gamma))}; \quad tg\alpha = (L_0^-(\gamma))^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

На рис. 2 изображена зависимость $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \alpha)$ для точки « K » 5-ти режимов на линии $q^+ = 1.0$. Показательно, что эти режимы возникают ($\varepsilon \geq 0$) при достижении газосодержания определённого значения $\gamma \geq \gamma^*$. При $\gamma = \gamma^*$ согласно (7)

$$\varepsilon = 0 \quad \text{т.е.} \quad \underline{c_0^-(\gamma^*) = c_0^+} \quad (\text{в расчётах } c_0^+ = 343(\frac{m}{c})),$$

$$\gamma^* = 0.95 \cdot 10^{-6}; \quad \underline{\gamma^* \leq \gamma \leq 10^{-4}}. \quad (18)$$

С ростом газосодержания водовоздушной среды γ в точке 5-ти режимов возрастает интенсивность падающей УВ ε и угол её наклона α .

В тоже время согласно (8) $c_0^-(\gamma) \leq c_0^+$ и режимы рефракции типа slow-fast (см. [3]).

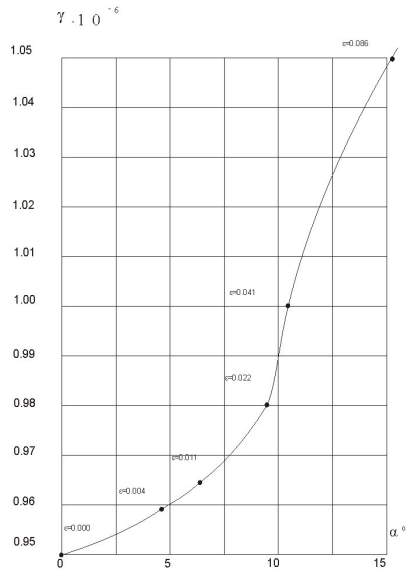


Рис. 2. Зависимость $\varepsilon(\gamma, \alpha)$

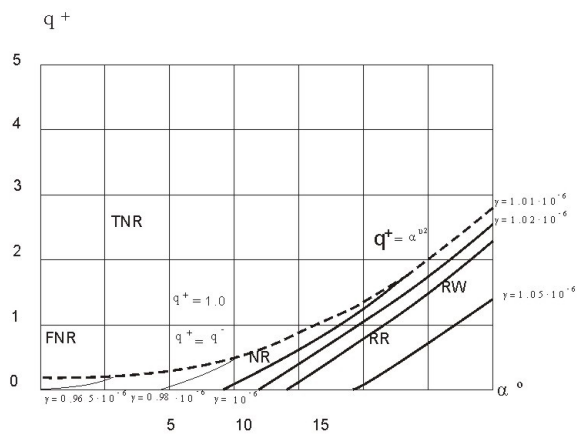
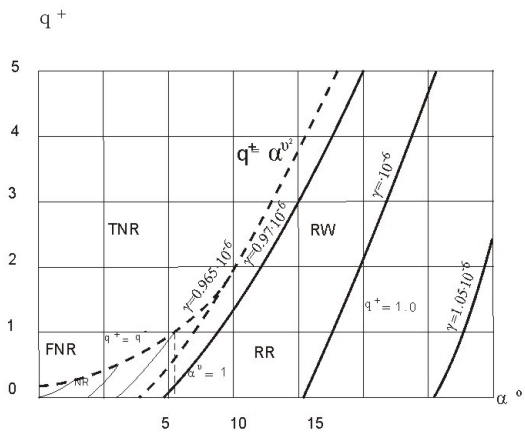


Рис. 3. Границы режимов при $\varepsilon = 0.01$ и $\varepsilon = 0.041$

На рис. 3 приведены результаты расчёта согласно (10)–(14), аналогично [2] областей существования (границ) режимов рефракции RR , NR , FNR (с волной разрежения) и RW , NR (с отражаемой УВ), а также интенсивности преломлённой УВ (AC) при фиксированных значениях $\varepsilon = 0.010$ и $\varepsilon = 0.041$.

Границы областей существования различных режимов в плоскости γ, α

Сравнение при фиксированных $\varepsilon = 0.010$ и $\varepsilon = 0.041$:

- с ростом интенсивности падающей УВ точка 5-ти режимов и все границы (кроме $q^+ = 1.0$) смещаются в сторону больших углов α ;
- при этом в целом возрастают значения газосодержания среды γ ($\gamma \geq \gamma^*$), при которых реализуются соответствующие режимы;
- предельные значения возрастания q^+ интенсивности преломлённой УВ (при $q^+ > 1.0$) для режимов RW , NR могут быть установлены при выполнении условия $\omega = 0$ для угла преломленной УВ аналогично [1] (см. рис. 3) с помощью более общей теории–модели потенциальных адиабатических течений газожидкостных сред.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Нелинейные взаимодействия ударных волн в газах и газожидкостных средах. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1997. 104 с.
2. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Взаимодействие ударной волны в воздухе при рефракции ударной волны на поверхности океана // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013.
3. Htnderson L. K., Ma J., Sakuzui A., Takayama K. Refraction of Shock wave at an air-water interface // Fluid Dynamics Research. 1990. NS. P. 337–350.
4. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Анализ нелинейной рефракции ударных волн методами асимптотической теории коротких волн // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 150–154.
5. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. О законах подобия рефракции ударных в газовых и газожидкостных средах. // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 146–150.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

АНШВАЕВА Н. Ю., БРЕДИХИН Д. А. О классах упорядоченных полугрупп отношений с диофантовыми операциями	3
БЕССОНОВ Л. В., РОМАКИНА Л. Н. Изображение простых ковров на простом 4-контуре гиперболической плоскости положительной кривизны	6
БОНДАРЕНКО Н. П. Характеризация спектральных данных матричного оператора Штурма—Лиувилля с потенциалом из класса W_2^1	9
БОРИСОВА Л. В. О необходимых и достаточных условиях сходимости в точке Лебега рядов Фурье—Лежандра	12
БУКУШЕВА А. В. Когомологии оснащенных распределений	15
ВЫГОДЧИКОВА И. Ю. О задаче приближения двузначной функции алгебраическим полиномом	18
ГАЛАЕВ С. В. ГОХМАН А. В. Внутренняя связность, ассоциированная с вполне интегрируемым лежандровым слоением	22
ГУДОШНИКОВА Е. В. Теорема насыщения для класса операторов	25
ИВАНИЛОВА С. В. Математическая модель денежного потока, финансирующего инновационную деятельность	29
КОРНЕВ В. В., ХРОМОВ А. П. О методе Фурье в одной смешанной задаче	32
КОРОЛЕВА О. А., ХРОМОВ А. П. О теореме Штейнгауза	36
КУЗНЕЦОВА И. А. Об одной иерархической игре со случайными факторами	39
МИРОНОВ В. А., ТЕРЕХИН П. А. Минимальность аффинных систем функций типа Уолша	42
МОЛЧАНОВ В. А. Об определмости канонических отношений универсальных планарных автоматов	44
НОВИКОВ В. Е. Однозначный контекст с упорядоченными множествами атрибутов	48
ПОЛИКАРПОВ С. И. Представление конечного детерминированного автомата рядом Фурье	49
РАЗУМОВСКАЯ Е. В., ТИМОФЕЕВ В. Г. Оптимальное восстановление значений оператора дифференцирования на некоторых классах функций многих переменных	53
РОЗЕН В. В. Перенос упорядочения критериев на множество альтернатив в задачах многокритериальной оптимизации	56
РОМАКИНА Л. Н. Длина дуги орицикла на гиперболической плоскости положительной кривизны	59
РОМАНОВ Р. О., ДУДОВ С. И. О внешней оценке сегментной функции полиномиальной полосой	62

РЫХЛОВ В. С. Кратная полнота корневых функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на двух лучах	66
САМСОНОВА К. А. Об отображении с минимальной емкостью разреза . . .	69
СМИРНОВА Д. С. Сокращение паретовского оптимума в задачах многокритериальной оптимизации	72
СОВЕТНИКОВА С. Ю., ХРОМОВА Г. В. Об одном методе регуляризации .	75
ТРЫНИН А. Ю. Об одной модификации аналога формулы Неваи для синкприближений непрерывных функций на отрезке	79
ХРОМОВ А. А. О погрешности приближений к производной	82
ХРОМОВА Г. В. Об аппроксимации производных на отрезке	85
ШЕБАЛДИН В. Р. О необходимых условиях экстремума в одной задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями	87
ЮРКО В. А. Дифференциальные операторы переменных порядков на пространственных сетях	91

СЕКЦИЯ МЕХАНИКИ

КОЖАНОВ В. С., СЕВОСТЬЯНОВ Г. Д. Уравнение для одномерных нестационарных течений газа	98
КОЗЛОВ Е. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н., ПАНКРАТОВ И. А. К задаче оптимальной коррекции угловых оскулирующего элемента орбиты	102
КРЫЩЕНКО Ю. В., ПАНКРАТОВ И. А., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Общая задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата	105
ЛОБАНКОВ Я. В., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н., ПАНКРАТОВ И. А. Кватернионное решение задачи оптимальной коррекции угловых элементов плоскости орбиты космического аппарата для задачи быстрогодействия	108
ЛОМОВЦЕВА Е. И., ЧЕЛНОКОВ Ю. Н. Решение обратной задачи кинематики стэнфордского манипулятора с применением бикватернионной теории кинематического управления	111
МАРКЕЛОВА О. И., ПАНКРАТОВ И. А. Расчет циркуляции воды в озере .	115
ПАНКРАТОВ И. А. Решение задач оптимального управления методом взвешенных невязок	118
ПАНКРАТОВ И. А., РЫМЧУК Д. С. Расчет течений мелкой воды	121
САПУНКОВ Я. Г. Задача об оптимальном выводе космического аппарата с импульсной тягой на орбиту в KS-переменных	125
ШИНДЯПИН Г. П., МАТУТИН А. А., БАРАНОВА Ю. Д. Влияние газосодержания водной среды на возникающие режимы ударных волн на поверхности океана	128